

2024-2025 竞赛班讲义 (数学类) 上

柯西永远爱你

2025 年 5 月 17 日

[illegible]

年轻人，你渴望力量吗？

目录

第一章 前言	2
第二章 实数基本定理及其应用	3
2.1 定理介绍与证明	3
2.2 定理综合应用	4
2.3 练习题	15
第三章 数列极限问题	16
3.1 不动点与蛛网图方法	17
3.2 上下极限技巧	23
3.3 无理数初步	26
3.4 综合问题	31
3.5 练习题	37
第四章 函数性态分析	38
4.1 连续函数性质与应用	39
4.2 微分不等式问题	42
4.3 各类导数问题	45
4.4 单调函数与凸函数	49
4.5 综合问题	51
4.6 练习题	54
第五章 语文类性态分析	55
5.1 例题讲解与习题	56
第六章 决赛常微分方程	61
6.1 解的连续依赖性	63
6.2 单调性与周期性	66
6.3 积分曲线与几何法	69
6.4 解微分方程	70
6.5 杂题	72
6.6 练习题	75

第七章 多项式	76
7.1 基本问题	77
7.2 综合问题	82
7.3 练习题	85
第八章 矩阵	86
8.1 行列式计算方法	88
8.2 线性方程组想法	97
8.3 摄动法	101
8.4 分块矩阵应用	104
8.5 数论组合类问题	107
8.6 矩阵空间线性映射	111
8.7 综合问题	113
8.8 挑战题 (非习题难度)	117
8.9 练习题	118
第九章 线性空间初步	120
9.1 维数问题	121
9.2 对偶空间问题	126
9.3 无限维线性空间	129
9.4 杂题	130
9.5 练习题	133
第十章 空间解析几何	134
10.1 各类例题讲解	135
10.2 练习题	142
第十一章 16 届决赛数学类	143
第十二章 习题答案	150
12.1 第二章习题答案	150
12.2 第三章习题答案	155
12.3 第四章习题答案	160
12.4 第五章习题答案	167
12.5 第六章习题答案	170
12.6 第七章习题答案	173
12.7 第八章习题答案	175
12.8 第九章习题答案	181
12.9 第十章习题答案	184
第十三章 补充题	187
13.1 正经习题	187
13.2 野题	190

第一章 前言

这是 2024-2025 上期竞赛班的数学类讲义，全部内容和答案均已经更新完毕，此即最终版（细节和排版错误如果比较多，影响理解，后续会再发修正版）。本期讲义主要以数学分析和高等代数的上册内容为主，解析几何以及决赛针对决赛的常微分方程内容也会讲解。目录是按照“数分，高代，解几，常微分”的顺序排的，并非实际上课顺序。另外常微分方程部分本质数学分析，因此即便你准备初赛，也应该学习。

注意：上期课程主要是讲解数分高代课本上册内容对应的问题，下期是讲下册，上下两期合起来是完整一套内容，学习时建议按顺序来（除非你很强），上下两期课程的内容同等重要，缺一不可！

最后的“补充题”章节中的问题，大多是在讲完相关专题后才诞生或者发现的题目，因此没有机会讲了，放到最后供感兴趣的同学自己研究。补充题都是难度适当的可以做出来的练习题，但是不同于练习题：这部分补充题不提供答案，如需解答请自行搜索，或者来最新一期答疑群提问。

数学类讲义与非数讲义完全不会重复，不存在任何的覆盖关系！即便你是数学系，如果你基础掌握不牢或者感觉看数学类课程太吃力，就先去看非数课程和讲义学习，会很有帮助。另外有些专题和方法虽然属于重要的基本功，并且常见于非数 CMC 和考研中，但是在数学系考试里面却很少出现，所以这种我们只能放入非数课程讲解（比如中值定理，积分计算等等），如果你不擅长这个专题，就有必要看非数课学习。

讲义细分了大专题和每个专题下的具体小节，必要的课本上没有的知识点会在专题中补充并列出，相应的定理也会有证明过程。部分题目难度较大，如果看不懂可以先跳过，以后再说；练习题是针对这一大专题而给出的，并非针对其中某个特定小专题；练习题答案在最后一章，以对应章节的习题 + 答案形式呈现。

大家应该掌握 mathematica（手机端对应的是简易版 wolfram alpha）、几何画板（手机端对应 geogebra）的使用方法，并下载安装好，平时很多极限、积分、级数计算问题，函数图像问题，递推数列问题，微分方程问题等等都可以利用这些软件快速解决，而且操作很简便。特别是面对钓鱼题时，会用软件可以帮你快速鉴别出来；对于平时拿不准的计算问题，鼓励大家用软件辅助检查，效率比发到群里让大家帮你验算和检查一遍要高很多。

第二章 实数基本定理及其应用

2.1 定理介绍与证明

实数基本定理一共有六个：

1. 确界存在定理：有上界的非空数集一定有上确界
2. 单调有界原理：单调有界数列一定收敛
3. 柯西收敛准则：数列 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 N 使得任意 $m, n > N$ 都有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$
4. 闭区间套定理：闭区间套 $I_n = [a_n, b_n]$ 满足 $I_{n+1} \subset I_n$ 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ ，则存在唯一的 ξ ，使得 ξ 属于每一个 I_n
5. 聚点定理：有界数列必有收敛子列
6. 有限覆盖定理：有界闭集的任意一族开覆盖，都存在有限子覆盖

注意：紧集是以有限覆盖性质来作为定义的，而有界闭集则是字面意思，二者在 $\mathbb{R}^n$ 中等价，其余的不一定。以上六个命题，除去前两个外，都可以平凡的推广到 $\mathbb{R}^n$ 中，表述是差不多的，证明也一样。

这些定理互相都是等价的，从任何一个出发均可以推出来剩下其余所有结论，排列组合下来一共 30 个命题，任何一个的推导都是简单的（自证不难），如果感兴趣，想要看汇总版的证明，可以直接百度搜索，这里提供两个汇总版链接：[互推证明参考 1](#)、[互推证明参考 2](#)

关于定理的应用，综合性与技巧性较强的通常是闭区间套定理和有限覆盖定理，能够在很多看起来比较隐蔽与复杂的问题中发挥至关重要的作用，其余四个当然也重要，只不过应用都很直接，没什么变化或者绕圈子的感觉，写出来通常也只不过是一句话而已。

这些定理将会贯穿整个数学分析，处处都会用到，本节我们着重讲解闭区间套定理和有限覆盖定理的应用，用它们来解决一些看上去比较奇怪，或者是直观却不易证明的问题，或者是比较反直觉的问题，总之都是数学分析味道非常浓厚的题目，综合性较强。

在这一节开始之前，需要知道以下几个基本定义，或许在数学分析上册中不会提及，但很简单

定义 2.1.1: 点集相关的基本概念

1. 如果存在 $r > 0$ 使得 $(a - r, a + r) \subset A$ ，则称 a 是集合 A 的内点（高维改为开球即可）
2. 如果一个集合 A 中的每一个点都是内点，则称 A 是开集
3. 如果集合 A 中的任意一个收敛序列 x_n 的极限点 x ，都有 $x \in A$ ，则称 A 是闭集
4. 设 $B \subset A$ ，如果对任意 $r > 0$ 和任意 $x \in A$ ，都有 $(x - r, x + r) \cap B \neq \emptyset$ ，则称 B 在 A 中稠密

下面我们要介绍 Baire 纲定理及其应用，这一部分对于刚上大一的学生来说有难度，可能会感觉很抽象（虽然证明不需要任何高级知识），如果学起来吃力，可以先跳过，以后再来看。

本章题目数量很有限，这期课程已经列出了几乎所有的问题，因此日后新课就再也没有这一章了（绝版内容）

2.2 定理综合应用

例题 2.2.1 设 $f(x): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 单调递增且 $f(0) > 0, f(1) < 1$, 证明: 存在 x 使得 $f(x) = x$

证明. 用区间套来做, 反证法, 假设 $f(x) \neq x$ 恒成立, 记 $[a_1, b_1] = [0, 1]$, 现在看 $f(\frac{1}{2})$, 如果 $f(\frac{1}{2}) > \frac{1}{2}$, 则考虑区间 $[\frac{1}{2}, 1]$, 而如果 $f(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$, 则考虑区间 $[0, \frac{1}{2}]$, 并把这个新的区间记为 $[a_2, b_2]$, 然后对区间 $[a_2, b_2]$ 再继续操作, 也就是看中点的函数值大小去确定下一个区间, 如此进行下去得到一系列闭区间 $[a_n, b_n]$, 并且根据构造方式, 显然 $f(a_n) > a_n, f(b_n) < b_n$ 恒成立

根据区间套定理, 存在唯一 $\xi \in [a_n, b_n], \forall n \geq 1$, 现在关注 ξ 点: 注意函数是单调递增的, 所以 $f(a_n) \leq f(\xi) \leq f(b_n)$, 于是 $a_n < f(\xi) < b_n$ 恒成立, 令 $n \rightarrow \infty$ 可知 $\xi \leq f(\xi) \leq \xi$, 所以 $f(\xi) = \xi$ 导致矛盾

□

注释 2.2.1: 思考矛盾点在哪: 显然区间两端一大一小, 中间才可能会有矛盾, 所以我们关注这样的区间就可以了, 注意本题没有连续性, 所以不可能用介值性做出来的

以下结论通常称为“勒贝格数引理”，考研题考过，在 n 维空间中和 $\mathbb{R}$ 中是没有区别的，这个结论以后在你们拓扑课程中还会见到，不过其实没什么特别的用处（或者说：并不必要存在，因为平凡而且可以被其他方法代替）

例 2.2.2 证明：如果 $\{O_\alpha\}$ 是区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖，则存在一个正数 $\delta > 0$ ，使得对于区间 $[a, b]$ 中的任何两个点 x', x'' ，只要 $|x' - x''| < \delta$ ，就存在开覆盖中的一个开区间，它覆盖 x', x'' 。（称这个数 δ 为开覆盖的 Lebesgue 数。）

证明. 要证的是：存在 $\delta > 0$ ，使得任意 $|x - y| < \delta$ 都有某个 $I \in \{O_\alpha\}$ 使得 $x, y \in I$

反证法，则对于 $\delta = \frac{1}{n}$ ，存在相应的 $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ ，使得任意 $I \in \{O_\alpha\}$ ，要么 $x_n \notin I$ ，要么 $y_n \notin I$

这里 x_n 是有界数列，所以存在收敛子列，不妨设 $x_n \rightarrow x_0 \in [a, b]$ ，那么 y_n 也收敛于 x_0 ，考虑极限点 x_0 ，根据条件，存在 $I \in \{O_\alpha\}$ 使得 $x_0 \in I$

由于 I 是开集，故存在 $\delta > 0$ 使得 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$ ，因为 x_n, y_n 都收敛于 x_0 ，则存在 N 充分大使得 $|x_N - x_0| < \delta, |y_N - x_0| < \delta$ ，于是区间 $I \in \{O_\alpha\}$ 就同时覆盖了 x_N, y_N 这两个点，与假设矛盾

□

注释 2.2.2: 本题证明方法很多，在数学类红宝书上册里面有一个直接构造，从正面进行证明的方法，当然正常人肯定是注意不到那个构造的；在谢惠民上册有限覆盖定理一章，有利用有限覆盖来证明的做法，可以自行对比，不过上述反证法，或许是最无脑最直接的做法，也是最好想到的

例题 2.2.3 证明：在 $\mathbb{R}^n$ 中，紧集和有界闭集是等价的.

证明. 用 $B(x, r)$ 表示以 x 点为圆心, r 为半径的开球, 用 $\overline{B(x, r)}$ 表示以 x 点为圆心, r 为半径的闭球

如果 A 是紧集, 我们证明它有界, 并且是闭集

假如 A 无界, 则显然 $B(0, m), m = 1, 2, \dots$ 这样一组开球构成了 A 的开覆盖, 于是存在里面有限个开球覆盖 A , 显然这有限个开球的并集等于最大的那个开球, 它覆盖了 A , 与 A 有界矛盾

假如 A 不是闭集, 则存在 A 中的一列点 x_k 收敛到点 x , 但是 $x \notin A$, 现在来构造一组开集, 使得无限个可以覆盖, 有限个总是不能覆盖:

注意单点集 x 的补集是开集, 并且它覆盖了 A (因为 x 不在 A 中), 而这个补集可以写成这样一组开集的并:

$$\mathbb{R}^n - \{x\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\mathbb{R}^n - \overline{B\left(x, \frac{1}{k}\right)} \right)$$

根据紧集条件, 则存在有限个这样的开集, 它们并集可以覆盖 A , 所以存在正整数 N 使得

$$A \subset \mathbb{R}^n - \overline{B\left(x, \frac{1}{N}\right)} \Rightarrow A^c \supset \overline{B\left(x, \frac{1}{N}\right)} \supset B\left(x, \frac{1}{N}\right)$$

但是点列 $x_k \rightarrow x$, 所以 k 充分大时 $|x_k - x| < \frac{1}{N}$, 上式表明 $x_k \notin A$, 与定义矛盾

如果 A 是有界闭集, 我们证明它具备有限覆盖性质

反证法, 则存在 A 的一组开覆盖, 使得其中任何有限个开集都不能覆盖 A

因为 A 有界, 则存在有界的闭正方体 I_1 覆盖住 A , 现在将 I_1 均分为 2^n 个小的闭方体, 考虑每一个小方体与 A 的交集 (是一个闭集, 因为这俩都是闭集), 这 2^n 个闭集中至少有一个不能被有限覆盖 (若都能, 则合并起来, A 也就被有限覆盖了, 矛盾), 不能被有限覆盖的那一部分对应的方体记为 I_2 , 相应 $I_2 \cap A$ 不能有限覆盖

继续, 将 I_2 等分为 2^n 个闭的小方体, 同样又会存在其中某一个小方体, 记为 I_3 , 使得闭集 $I_3 \cap A$ 不能有限覆盖, 以此类推, 得到一系列闭方体 I_k 并且显然直径趋于零, 同时每一个 $I_k \cap A$ 都不能被有限覆盖, 根据闭集套定理 (对闭集 $I_k \cap A$ 使用), 存在唯一 x 属于每一个 $I_k \cap A$, 现在关注 x 点

根据已知条件, x 被开覆盖中某个开集 O 覆盖了, 于是存在 $\delta > 0$ 使得 $B(x, \delta) \subset O$, 但是闭方体 I_k 的直径趋于零并且 x 属于每一个 I_k , 所以当 k 充分大时, 方体 $I_k \subset B(x, \delta) \subset O$, 因此 $I_k \cap A$ 被一个开集覆盖住了, 与 I_k 的定义矛盾

□

注释 2.2.3: 再次强调: 如果集合 A 的任意一组开覆盖都存在有限子覆盖, 则称 A 是紧集, 它的定义是利用的有限覆盖性质, 只不过在 $\mathbb{R}^n$ 里面经过证明发现紧集和有界闭集等价, 但是一般情况下二者的定义是互相独立的

对于新手, 注意“不是闭集”并不意味着“是开集”, 小心不要伪证

从过程中可以看出, 我们后面从有界闭集去推导紧集的时候, 每一次都要将区域做 2^n 等分, 这就利用了 $\mathbb{R}^n$ 的性质, 设想如果是 $\mathbb{R}^\infty$ 还能这么做吗? 肯定不行了, 因为等分时候会出问题, 自然结论也不再成立

例题 2.2.4 1. 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 中且对任意 x , 都存在与 x 有关的 $r > 0$, 使得 $f(x)$ 在区间 $(x-r, x+r)$ 中为常值函数, 证明: $f(x)$ 是常值函数.

2. 设 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 中的函数, 如果对任意 $x \in [a, b]$, 均存在 $\delta_x > 0$ 以及 M_x , 使得 $|f(y)| \leq M_x, \forall y \in (x-\delta_x, x+\delta_x) \cap I$, 证明: $f(x)$ 是有界的.

3. 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上, 对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$ 均存在与 x_0 有关的 $\delta > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 是单调递增的, 证明: f 在整个 $\mathbb{R}$ 上也是单调递增的.

这个结果说明: 局部常值函数就是常值函数, 闭区间上局部有界的函数都是有界函数, 局部单调递增函数是在整个区间上也是单调递增的, 实数基本定理能够将局部性质扩充为整体性质.

证明. 1. 本题做法很多, 下面展示三种, 首先采用反证法, 设 $f(a) \neq f(b), a < b$, 然后推矛盾

方法一 (有限覆盖定理): 对任意 $x \in [a, b]$, 存在 $r_x > 0$ 使得 $f(t)$ 在区间 $(x-r_x, x+r_x)$ 为常值函数, 则 $\bigcup_{x \in [a, b]} (x-r_x, x+r_x) \supset [a, b]$, 故存在其中有限个区间 $(x_k-r_k, x_k+r_k), 1 \leq k \leq n$ 使得他们的并集包含 $[a, b]$

直观来看只需要将这些区间 “从小到大” 排列, 就可以依次推出每一个区间上都是相同的一个常值函数, 但是所谓 “从小到大” 排列目前是无法准确定义的 (自己画图思考原因或看上课视频), 所以这样说不清楚, 优化如下

方案 1: 选择其中个数尽可能少的区间, 使得它们的并集可以覆盖 $[a, b]$ 但是任意删去一个都不可以 (这是能够准确定义的一个操作), 此时区间具备性质 “任意一个不能被其余的并集盖住”, 接下来将这些区间按照左端点的大小关系来排序, 去论证它们确实是如你所想的那样 “从小到大” 排列的 (关注右端点), 进而得证

方案 2: 利用勒贝格数引理, 将区间 $[a, b]$ 分为有限个 $[a, a+r], [a+r, a+2r], \dots, [a+nr, b]$, 则每一个闭区间都可以被开覆盖中的某一个开区间覆盖住, 于是分段常值函数, 并且还能拼接起来, 所以是常值函数

方法二 (确界存在定理): 因为 $f(x)$ 在 $(a-r, a+r)$ 内是常值函数, 所以考虑最大的区间也即

$$x_0 = \sup \{x \in [a, b] \mid f(t) = f(a), \forall t \in [a, x]\}$$

则 $a+r \leq x_0 \leq b$, 根据上确界的定义我们知道: 任意 $\varepsilon > 0$, 集合中有一个元素大于 $x_0 - \varepsilon$ 也即 $f(t) = f(a), \forall x \in [a, x_0 - \varepsilon]$, 所以任意 $x \in [a, x_0]$ 都有 $f(x) = f(a)$, 现在关注 x_0 点, 有两种情况

如果 $f(x_0) \neq f(a)$, 则存在 $\delta > 0$ 使得 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内都为常数且不等于 $f(a)$, 这与任意 $x \in [a, x_0]$ 都有 $f(x) = f(a)$ 矛盾

如果 $f(x_0) = f(a)$, 则存在 $\delta > 0$ 使得 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内恒为常数 $f(a)$, 结合已知, 所以集合 $\{x \in [a, b] \mid f(t) = f(a), \forall t \in [a, x]\}$ 的上确界至少应为 $x_0 + \delta$, 和上确界是 x_0 矛盾

方法三 (闭区间套定理): 不妨 $f(a) < f(b)$, 记区间 $[a_1, b_1] = [a, b]$ 然后关注中点的取值, 如果 $f(\frac{a+b}{2}) > f(a)$, 则考虑区间 $[a, \frac{a+b}{2}]$, 如果 $f(\frac{a+b}{2}) \leq f(a)$, 则考虑区间 $[\frac{a+b}{2}, b]$, 并将这个区间记为 $[a_2, b_2]$, 由此可见 $f(a_2) < f(b_2)$

以此类推构造一系列区间套 $[a_n, b_n]$, 则总有 $f(a_n) < f(b_n)$ 并且存在唯一 ξ 属于每一个 $[a_n, b_n]$, 现在看 ξ 点, 根据条件, 存在 $r > 0$ 使得 $f(x)$ 在 $(\xi-r, \xi+r)$ 内为常值函数, 而 $a_n, b_n \rightarrow \xi$ 所以当 n 充分大时 $a_n, b_n \in (\xi-r, \xi+r)$, 这导致 $f(a_n) = f(b_n)$, 与 a_n, b_n 的取法矛盾

2. 用聚点原理来解决, 采用反证法, 设 $f(x)$ 无界, 则存在一系列 $x_n \in [a, b]$ 使得 $|f(x_n)| > n$, 有界数列 x_n 必有收敛子列, 不妨 $x_n \rightarrow x_0 \in [a, b]$, 考虑 x_0 点, 则存在 $\delta > 0, M > 0$ 使得 $|f(x)| < M, \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, 而当 $n > N$ 充分大时总有 $x_n \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, 于是 $M > |f(x_n)| > n$ 恒成立, 矛盾

3. 采用区间套定理, 反证法, 则存在 $a < b$ 使得 $f(a) > f(b)$, 我们用中点函数值的大小来选择区间, 如果 $f(\frac{a+b}{2}) \geq f(a)$, 则考虑区间 $[\frac{a+b}{2}, b]$, 而如果 $f(\frac{a+b}{2}) < f(a)$, 则考虑区间 $[a, \frac{a+b}{2}]$, 由此得到闭区间套 $[a_n, b_n]$ 并且 $f(a_n) > f(b_n)$ 恒成立, 同样考虑所有区间的交点 ξ , $f(x)$ 在 $(\xi-r, \xi+r)$ 内是递增的, 因此当 n 充分大时 $a_n, b_n \in (\xi-r, \xi+r)$, 那么根据单调性得 $f(a_n) \geq f(b_n)$, 与 a_n, b_n 的取法保证的不等式 $f(a_n) > f(b_n)$ 矛盾

□

例题 2.2.5 设 $f(x)$ 在区间 I 中连续, 并且在每一点 $x \in I$ 处都取到极值, 证明: $f(x)$ 是常值函数, 并且连续这一条件不可删去, 也不可减弱为至多在可数个点不连续.

证明. 两种做法, 方法一需要一个很关键的独立于本题的引理, 方法二则是直接针对本题证明

引理 2.2.1: 设 $f(x)$ 定义在区间 I 中, 则 $f(x)$ 的全体极值构成的集合是至多可数集

极值分为极大值和极小值, 只要证明极大值全体与极小值全体都是至多可数的就行了
设 $f(x)$ 的全体极小值构成的集合为 A , 则

$$A = \{f(x) \mid \exists \delta > 0, \forall t \in (x - \delta, x + \delta), f(t) \geq f(x)\}$$

为了描述可数, 将区间 $(x - \delta, x + \delta)$ 缩小为有理开区间 (r, s) , 其中 $r, s \in \mathbb{Q}$, 于是 (显然的, 也可以去验证)

$$A = \{f(x) \mid \exists r, s \in \mathbb{Q}, r < x < s, \forall t \in (r, s), f(t) \geq f(x)\}$$

因此任何一个极小值 y , 都有 $y \in A$ 并且存在 x 使得 $y = f(x)$, 进而对应了一个包含 x 的有理开区间 (r, s) (显然不唯一, 也不需要唯一性, 随便取一个 x 和相应的区间 (r, s) , 只要存在就可以了), 不同的两个极小值 y_1, y_2 很明显不能对应同一个有理开区间 (r, s) , 否则这个区间内 $f(x)$ 有两个不同的最小值, 矛盾, 现在定义一个从全体极小值构成的集合 A 到全体有理开区间构成的集合 B 的映射 φ , 将极值 y 映射为相应的有理开区间 (r, s) , 则前面分析说明了 φ 是单射, 而全体有理开区间构成的集合是可数的, 所以 $f(x)$ 的极小值全体至多可数

同理极大值个数也是至多可数, 于是引理得证

回到原题, 如果 $f(x)$ 不是常值函数, 则存在 $a \neq b$ 使得 $f(a) \neq f(b)$, 故 $f(x)$ 可以取到 $f(a), f(b)$ 之间的一切值 (连续性), 则 $f(x)$ 的值域是不可数集 (区间都是不可数的), 但是条件表明 $f(x)$ 处处取极值, 根据引理 $f(x)$ 的值域是至多可数集, 矛盾

证法 2 (反证) 假设 f 在 I 上不是常值函数, 则 $\exists a_1, b_1 \in \mathbb{R}, s.t. f(a_1) \neq f(b_1)$. 不妨设 $f(a_1) < f(b_1)$.

因为 f 连续, 故由介值定理, $\exists c \in (a_1, b_1), s.t. f(a_1) < f(c) = \frac{f(a_1) + f(b_1)}{2} < f(b_1)$.

若 $b_1 - c \leq \frac{b_1 - a_1}{2}$, 则令 $a_2 = c$, 取 b_2 满足 $a_2 = c < b_2 < b_1$, 且 $f(a_1) < f(a_2) = f(c) < f(b_2) < f(b_1)$;

若 $c - a_1 < \frac{b_1 - a_1}{2}$, 则令 $b_2 = c$, 取 a_2 满足 $a_1 < a_2 < c = b_2$, 且 $f(a_1) < f(a_2) < f(c) = f(b_2)$.

无论哪种情形, 都有 $f(a_2) < f(b_2)$. 在 $[a_2, b_2]$ 上重复上述做法, 并依次类推下去, 得一闭区间套

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots, 0 < b_n - a_n \leq \frac{b_1 - a_1}{2^n} \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty).$$

据闭区间套原理, $\exists x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. 由上述选法, 易见 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$. 再由 f 连续, $f(a_n)$ 严格增收敛于 $f(x_0)$, $f(b_n)$ 严格减收敛于 $f(x_0)$. 因此 $f(a_n) < f(x_0) < f(b_n)$

故 x_0 不为 f 的极值点, 这与 I 中每一点都是 f 的极值点相矛盾.

至于反例, 考虑黎曼函数即可, 它处处取极值, 并且在有理点不连续, 无理点连续, 自行验证

□

注释 2.2.4: 这两个证明方法都非常重要, 方法一是抛开本题直接证明一个很好用的性质 (在后面的题会用): 函数的极值构成的集合至多可数, 注意这个性质不依赖于连续性, 并且可以平凡推广到 $\mathbb{R}^n$ 中的函数, 但是显然极值点个数未必可数, 不同的极值点也完全可以对应同一个极值

方法二就是前面反复用的区间套技巧, 只不过需要稍加改造 (上课强调过利用介值性取点时候必须搞两次, 如果只搞一次会做不出来, 也举了例子), 可见这个定理很好用, 但是缺点就是无法发现法一那个本质的结果, 仅仅是针对本题完成了证明

利用闭区间套定理，可以导出一个非常重要和好用的定理：Baire 纲定理，它在 $\mathbb{R}^n$ 中也是成立的

命题 2.2.1: Baire 纲定理

1. 设 $A_n \subset \mathbb{R}$ 是一列没有内点的闭集，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 也没有内点.
2. 设 $A_n \subset \mathbb{R}$ 是一列开集并且都在 $\mathbb{R}$ 中稠密，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ 也在 $\mathbb{R}$ 中稠密.
3. 设 $A_n \subset \mathbb{R}$ 是一列闭集，并且 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 也是闭集，则存在开区间 (a, b) (可以是无穷区间) 和正整数 N 使得 $(a, b) \cap A \subset A_N$.
4. 设 A_n 是一列无处稠密集 (闭包没有内点)，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 也没有内点.

证明. 1. 用反证法. 设 $x_0 \in A$ 为内点, 则存在 $\delta_0 > 0$, 使得 $[x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \subset A$.

因为 A_1 没有内点, 故存在 $x_1 \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) - A_1$. 由于 A_1 为闭集, 故存在 $\delta_1 > 0$, 使得

$$[x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \subset (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0), \quad [x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \cap A_1 = \emptyset$$

不妨设 $\delta_1 < 1$. 因为 A_2 没有内点, 故存在 $x_2 \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) - A_2$. 由于 A_2 为闭集, 故存在 $\delta_2 > 0$, 使得

$$[x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2] \subset (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1), \quad [x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2] \cap A_2 = \emptyset$$

不妨设 $\delta_2 < \frac{1}{2}$. 如此继续, 我们得到闭区间套

$$[x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \supset [x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2] \supset \cdots \supset [x_n - \delta_n, x_n + \delta_n] \supset \cdots,$$

使得 $[x_n - \delta_n, x_n + \delta_n] \cap A_n = \emptyset, \delta_n < \frac{1}{n} (n \geq 1)$.

根据闭区间套原理, 存在 $\xi \in [x_n - \delta_n, x_n + \delta_n], \forall n \geq 1$. 因此 $\xi \notin \bigcup_{n \geq 1} A_n = A$,

这和 $\xi \in [x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \subset (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \subset A$ 相矛盾.

2. 条件表明每一个 A_n 的补集都没有内点, 并且是闭集, 于是并集 (根据结论 1, Baire 纲定理) 也没有内点, 取补集可知交集是稠密的

3. 本结果将会在本节练习题中进行证明

4. 与 1 类似可证

□

例题 2.2.6 设 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 中可导, 证明: $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 中的一个稠密子集中连续.

证明. 要证明的是 $f'(x)$ 的连续点集合是稠密的, 反证法, 如果不稠密, 则存在 $(0, 1)$ 的一个子区间, 使得 $f'(x)$ 在这个子区间内处处不连续, 同时注意 $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$ 是一列连续函数的极限, 综合上述两点, 我们的反证法意味着如下命题成立 (然后我们推翻这个命题就可以了, 想法是利用 baire 纲定理)

存在一列定义在区间 $[0, 1]$ 中的连续函数 $f_n(x)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in [0, 1]$ 且 $f(x)$ 处处不连续.

对任意 $\varepsilon > 0$, 定义 $E_n = \{x \in [0, 1] | \forall i, j \geq n, |f_i(x) - f_j(x)| \leq \varepsilon\}$, 则 E_n 是一列闭集且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = [0, 1]$, 所以存在正整数 N 和子区间 $[a, b] \subset (0, 1)$ 使得集合 E_N 包含了这个区间, 也就是说对任意 $x \in [a, b]$ 和任意 $i, j \geq N$ 都有 $|f_i(x) - f_j(x)| \leq \varepsilon$

现在取 $j = N$ 然后令 $i \rightarrow \infty$, 则有 $|f(x) - f_N(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in [a, b]$, 于是对任意 $x, y \in [a, b]$ 都有

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \leq 2\varepsilon + |f_N(x) - f_N(y)|$$

根据 $f_N(x)$ 的一致连续性, 可见存在 $\delta > 0$ 使得任意 $x, y \in [a, b], |x - y| < \delta$ 都有 $|f(x) - f(y)| < 3\varepsilon$

注意这个式子并不意味着 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内一致连续 (也就是说至此还没有矛盾), 因为不同的 ε 对应的区间 $[a, b]$ 也是不一样的, 但是至少说明了: 对区间 $[a, b]$ 内任意一点 x_0 , 函数 $f(x)$ 在 x_0 点的振幅是不超过 3ε 的, 所谓一个点的振幅, 直观来说就是指该点附近很小的一个区间内, 任意两点函数值之差的最大值

因此为了导出矛盾, 我们希望 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 的某个子区间内振幅能有一个一致的下界, 下面定义振幅

称 $w_f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{u, v \in B(x, \frac{1}{n})} |f(u) - f(v)|$ 为函数 $f(t)$ 在 $t = x$ 点的振幅 (非负递减数列极限), 具有性质:

1. f 在 x 点连续等价于 $w_f(x) = 0$; 2. 对任意 $\delta > 0$, 集合 $\{x | w_f(x) < \delta\}$ 是开集 (或相对开集)

第一点根据连续性的定义结合反证法是显然的, 对于第二点, 要说明若 $w_f(x_0) < \delta$, 则存在 $r > 0$ 使得任意 $|x - x_0| < r$ 都有 $w_f(x) < \delta$, 根据极限定义 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{u, v \in B(x, \frac{1}{n})} |f(u) - f(v)| < \delta$, 则存在正整数 N 使得

$$\sup_{u, v \in B(x, \frac{1}{N})} |f(u) - f(v)| \leq \delta - \frac{1}{2}\varepsilon < \delta$$

取 $r = \frac{1}{N}$, 则对任意 $|x - x_0| < \frac{1}{N}$ 都可以找 x_0 附近一个小的邻域包含在区间 $(x_0 - \frac{1}{N}, x_0 + \frac{1}{N})$ 中, 则在邻域内 $f(x)$ 的振幅不超过大区间的振幅也就是 $\delta - \frac{1}{2}\varepsilon_0$, 取极限可知 x 点的振幅不超过 $\delta - \frac{1}{2}\varepsilon_0$ 也就是小于 δ 的

记 $D_{\neq}$ 为 $f(x)$ 的不连续点集合, 则 $D_{\neq} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in [0, 1] \mid w_f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$ 是一列闭集的并, 根据 baire 纲定理可知存在一个集合有内点, 也就是说存在 $[A, B] \subset [0, 1]$ 和正整数 n_0 使得对任意 $x \in [A, B]$ 都有 $w_f(x) \geq \frac{1}{n_0}$

现在回到原题, 我们只需要对前半部分过程做些修改: 取 $\varepsilon = \frac{1}{6n_0}$ 并将集合 E_n 定义中的区间 $[0, 1]$ 改为 $[A, B]$, 那么根据之前的推导, 在得到的 $[a, b] \subset [A, B]$ 中振幅就处处不超过 $\frac{1}{2n_0}$, 与区间 $[A, B]$ 定义矛盾, 得证

□

注释 2.2.5: 如果定义 $E_n = \{x \in [0, 1] | \forall k \geq n, |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon\}$, 则由于极限函数缺乏连续性, E_n 不一定是闭集, 所以我们改用柯西收敛准则去定义集合, 想法还是一样的, 这样就是闭集了

在本题条件下, 集合 $\{x \in [0, 1] | w_f(x) < \delta\}$ 是相对开集 (相对于区间 $[0, 1]$), 但是本身并不一定是开集, 而 $\{x \in [0, 1] | w_f(x) \geq \delta\}$ 就是通常意义下的闭集, 因此如果你不承认相对开集或者不理解, 那就直接按照定义去证明 $\{x \in [0, 1] | w_f(x) \geq \delta\}$ 是一个闭集, 反正使用 baire 纲定理的时候也是对这个闭集用的

例题 2.2.7 设数列 a_n 单调递增趋于正无穷, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, 函数 $f(x)$ 定义在 $(0, +\infty)$ 中且对任意 $x \geq 1$ 都有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n x) = 0$

1. 若 $f(x)$ 是连续函数, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$;

2. 若删去连续这一条件, 或者虽然连续, 但是 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, 则上述结论均不成立.

证明. 1. 对任意 $\varepsilon > 0$, 定义 $E_n = \{x \geq 1 \mid \forall k \geq n, |f(a_k x)| \leq \varepsilon\}$, 则 E_n 是一列闭集, 根据条件有 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = [1, +\infty)$, 于是根据 baire 纲定理可知存在正整数 N 和区间 (u, v) 使得 $(u, v) \subset E_N$, 也就是说, 任意 $x \in (u, v)$, 任意 $n \geq N$ 都有 $|f(a_n x)| \leq \varepsilon$, 换句话说我们得到了一个一致的 N

因此 $|f(x)|$ 在区间 $(a_N u, a_N v), (a_{N+1} u, a_{N+1} v), \dots$ 中都是不超过 ε 的, 只要这些区间在 n 很大之后能够相互有重叠, 一个接着下一个, 全覆盖就行了

换句话说, 我们要证明: 存在 N_0 使得任意 $n \geq N_0$ 都有 $a_{n+1} u < a_n v$, 这等价于 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{v}{u}$, 注意条件: 极限等于 1 并且右端 $\frac{v}{u} > 1$, 所以上式成立

将前面推导的东西梳理一下, 就是说: 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 M 使得 $x > M$ 时恒有 $|f(x)| < \varepsilon$, 结论得证

2. 例如考虑 $a_n = n$, 定义 $f(x)$ 为: 当 $x = m \cdot 2^{\frac{1}{m}}, m \in \mathbb{N}^+$ 时候取 1, 其余情况都取 0, 则对任意的 $x > 0$, 数列 $f(nx)$ 中都至多只有一项为 1, 因此极限总是 0, 但是很明显 $f(x)$ 的极限并不存在

另外一个反例, 可以考虑 $a_n = e^n$, 现在有连续性, 条件为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(e^n x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(e^{n+\ln x}) = 0$$

将 $\ln x \in \mathbb{R}$ 看成一个变量, 相应的考虑 $g(x) = f(e^x)$, 则连续函数 $g(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上且满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} g(y+n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(e^{y+n}) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$, 我们构造一个例子使得 $g(x)$ 在无穷处极限非零或者不存在即可

这与经典的命题有关: 设 $f(x)$ 一致连续且 $f(x+n) \rightarrow 0$ 对任意 x 成立, 则 $f(x) \rightarrow 0$, 现在删去了一致连续性命题自然是错的, 具体构造留作习题

□

注释 2.2.6: 通常, 点态收敛 (上题) 或者数列极限 (本题) 这种非一致性的条件, 描述起来是 “任意 $x \in (0, 1)$, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得任意 $n > N$ 都有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ” 或者 “任意 $x > 0$, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得任意 $n > N$ 都有 $|f(a_n x)| < \varepsilon$ ”, 很明显这里的 N 是与 x, ε 都有关系的, 如果我们事先取定 $\varepsilon > 0$, 那么这个过程可以说是 “给定 x , 去找对应的 N ”

而 baire 纲定理的想法就是反过来找: 不同的 x 对应的 N 确实可以不一样, 那就先取好 N , 我们看都有哪些 x 对应到这一个 N , 也就是说事先取定 $\varepsilon > 0$, 然后对每一个 n 去定义集合, 反找 x . 所有 baire 纲定理相关的问题, 思想都是如此, 根据定理便能得到一个一致的东西, 拿来做事情

例题 2.2.8 设任意阶可导的函数 $f(x)$ 定义在 $[0, 1]$ 中, 且对任意 $x \in [0, 1]$, 都存在与 x 有关的正整数 n 使得 $f^{(n)}(x) = 0$, 证明: $f(x)$ 是多项式.

证明. 先考虑一个弱化的命题: 若 $f(x)$ 满足对任意 $x \in [0, 1]$ 都存在一个邻域使得 $f(x)$ 在邻域内为多项式 (不同的 x 对应的邻域以及多项式可以是不同的), 则 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 中恒等于某个多项式

这个结论利用确界原理配合反证法很容易证明, 自行完成, 或者见练习题, 我们会反复用这件事情定义集合

$$E = \{x \in [0, 1] | \text{存在 } \delta > 0, \text{使得 } f(x) \text{ 在 } (x - \delta, x + \delta) \cap [0, 1] \text{ 中是多项式}\}$$

我们希望证明 $E = [0, 1]$, 这样根据前面的命题就能得到 $f(x)$ 是多项式, 于是问题转化为证明集合 $F = E^c$ 是空集, 采用反证法, 假设 F 是非空的

容易看出集合 E 是相对开集, F 是闭集 (直接验证 F 是闭集, 下面提到的所有邻域都是指开邻域与 $[0, 1]$ 的交集: 点 $x \in F$ 当且仅当在 x 的任意邻域内 $f(x)$ 都不是多项式, 设有一列点 $x_n \in [0, 1]$ 都具备这样的性质, 并且他们的极限点是 x_0 , 假如 x_0 不具备这样的性质, 也就是说在 x_0 附近的某个邻域, 使得 $f(x)$ 在邻域内是一个确定的多项式, 而 n 充分大之后 x_n 会落入这个邻域, 很明显就与其定义矛盾了)

进一步可以证明 F 是没有孤立点的: 如果集合 F 有孤立点 x_0 , 则意味着存在 $\delta > 0$ 使得 $(x_0 - \delta, x_0) \subset E, (x_0, x_0 + \delta) \subset E$ (这里如果 x_0 是区间端点 $0, 1$, 则上述两个开区间删去一个, 看另一个就可以了, 无本质区别故不再单独说明), 根据定义, 这说明对于区间 $(x_0 - \delta, x_0)$ 中任意一点 t , $f(x)$ 在 $x = t$ 的某个邻域内都是多项式, 根据最开始的弱化命题可知 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0)$ 中是一个多项式 $p(x)$, 同理 $f(x)$ 在区间 $(x_0, x_0 + \delta)$ 中也是一个多项式 $q(x)$, 考虑 x_0 点, 则 $p(x), f(x), q(x)$ 三者在该点的函数值以及任意阶导数值都相同 (按照导数定义计算即可), 将两个多项式 $p(x), q(x)$ 都在 x_0 点泰勒展开可知 $p(x), q(x)$ 是相同的多项式, 因此在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中 $f(x)$ 都恒等于多项式 $p(x)$, 这与 $x_0 \in F$ 矛盾, 所以 F 是没有孤立点的闭集

注意 $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in F \mid f^{(n)}(x) = 0\right\}$ 是一列闭集的并, 同时并集还是闭集, 所以根据 baire 纲定理 (命题 2.2.1 的第三条) 可知存在区间 $[a, b]$ 和正整数 N 使得 $[a, b] \cap F \subset \left\{x \in F \mid f^{(N)}(x) = 0\right\}$, 并且可以要求 $(a, b) \cap F$ 非空

对 $[a, b] \cap F$ 中的点 x_0 则有 $f^{(N)}(x_0) = 0$, 因为 x_0 不是孤立点, 故可以取充分小的 Δx 使得 $x + \Delta x \in F$, 于是 $f^{(N)}(x + \Delta x) = 0$, 再根据导数定义可知

$$f^{(N+1)}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(N)}(x + \Delta x) - f^{(N)}(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, x + \Delta x \in F} \frac{f^{(N)}(x + \Delta x) - f^{(N)}(x)}{\Delta x} = 0$$

这说明对于 $[a, b] \cap F$ 中的点, 其 $N + 1$ 阶导数也恒为零, 以此类推可知任意 $x \in [a, b] \cap F$ 和任意 $n \geq N$ 都有 $f^{(n)}(x) = 0$, 下面看 $[a, b] \cap E$ 中的点

对任意 $x \in [a, b] \cap E$, 则 $x \notin F$ 于是存在 x 的一个邻域 $(x - r, x + s) \subset [a, b] \cap E$, 如果这里 x 是区间端点 a, b 则我们考虑单侧的邻域就可以了, 进一步我们不妨设这个邻域是最大的 (也即上确界和下确界, 注意不超出 $[a, b]$), 于是对邻域内每一点, $f(x)$ 在局部小区间内都等于某个多项式

根据最开始的结论可知 f 在区间 $(x - r, x + s)$ 内恒等于某一多项式, 所以在 $[x - r, x + s]$ 内也是如此, 而区间两个端点至少有一个在 F 中 (由于 $(a, b) \cap F$ 非空, 所以区间 $[x - r, x + s] \neq [a, b]$, 如果端点有一个是 a 或者 b , 则另外一个端点在开区间 (a, b) 内且必然属于 F , 考虑它就是了; 若两个端点都不是 a 或者 b 则不用额外说明这些), 所以这个多项式在端点处的 $n \geq N$ 阶导数均为零, 那么泰勒展开表明这个多项式的次数不超过 $N - 1$, 所以在 $x \in [a, b] \cap E$ 点处的 $n \geq N$ 阶导数也是均为零

综上, 我们证明了区间 $[a, b]$ 中不管是 $x \in E$ 还是 $x \in F$ 都满足: 任意 $n \geq N$, $f^{(n)}(x) = 0$, 于是 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 中是多项式, 进而 $(a, b) \cap F$ 是空集 (依据定义), 矛盾

□

例题 2.2.9 设 $f(x) \in C[0, 1]$, $A \subset [0, 1]$ 为至多可数集, 并且对任意 $x \in [0, 1], x \notin A$ 都有 $f'(x) = 0$, 证明: $f(x)$ 是常值函数.

证明. 不妨 $f(0) = 0$, 要证明 $f(x) = 0$ 恒成立, 显然只要证明 $f(1) = 0$, 否则在区间 $[0, x]$ 中考虑问题即可

设 $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ 是可数集, 先直观感受一下

$$\begin{aligned} 1. x \notin A, f'(x) &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = 0 \Rightarrow \exists \delta_x > 0, \forall t \in (x - \delta_x, x + \delta_x), |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon |t - x| \\ 2. x \in A, & \text{只有唯一条件: 连续, } \Rightarrow \exists \delta_x > 0, \forall t \in (x - \delta_x, x + \delta_x), |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon \\ & \Leftrightarrow \forall a_n \in A, \exists \delta_n > 0, \forall u, v \in (a_n - \delta_n, a_n + \delta_n), |f(u) - f(v)| \leq \frac{\varepsilon}{2^n} \end{aligned}$$

将 $f(0)$ 看成已知的, 尝试估计 $f(1)$, 先举个例子来估计 $f(x)$: 假定 $0 < a_1 < a_2 < x < 1$, 便有

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x) - f(a_2 + \delta_2)| + |f(a_2 + \delta_2) - f(a_2 - \delta_2)| \\ &\quad + |f(a_2 - \delta_2) - f(a_1 + \delta_1)| + |f(a_1 + \delta_1) - f(a_1 - \delta_1)| + |f(a_1 - \delta_1)| \end{aligned}$$

而在区间 $(0, a_1 - \delta_1)$ 中, 首先对比较小的 t 有 $|f(t)| < \varepsilon |t|$, 然后我们以 t 为起点, 注意 $f'(t) = 0$, 考虑 t 右端附近一小段, 则对 $s > t$ 且距离 t 较近的 s 有 $|f(s) - f(t)| < \varepsilon |s - t|$, 这样两段拼起来就是 $|f(s)| < \varepsilon s$, 然后我们一直操作下去, 一直这样子“扩张区间”, 似乎 $f(x)$ 会被斜率 ε 的直线控制住增长速度 (在相邻的 a_i 之间), 代入上述不等式有

$$|f(x)| \leq \varepsilon(x - (a_2 + \delta_2)) + \frac{\varepsilon}{2^2} + \varepsilon((a_2 - \delta_2) - (a_1 + \delta_1)) + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon(a_1 - \delta_1) < \varepsilon x + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2}$$

似乎 $f(x)$ 增长速度被右端这样的很小的函数控制住了, 那么 ε 的任意性就意味着本题做完了

下面开始证明, 对任意 $\varepsilon > 0$, 定义 $E = \left\{ x \in [0, 1] \mid |f(x)| \leq \varepsilon x + \sum_{a_n < x} \frac{\varepsilon}{2^n} \right\}$

根据条件可知 E 是非空集合并且 E 的上确界 $\beta > 0$, 我们要证明 $\beta \in E$ 且 $\beta = 1$

由于 $\beta = \sup E$, 所以存在一列 $\beta_m \in E$ 满足 $\beta_m < \beta, \beta_m \rightarrow \beta$, 也就是说

$$|f(\beta_m)| \leq \varepsilon \beta_m + \sum_{a_n < \beta_m} \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \varepsilon \beta_m + \sum_{a_n < \beta} \frac{\varepsilon}{2^n}, \forall m \geq 1$$

注意 $f(x)$ 是连续函数, 取极限得到 $|f(\beta)| \leq \varepsilon \beta + \sum_{a_n < \beta} \frac{\varepsilon}{2^n} \Rightarrow \beta \in E$, 下面证明 $\beta = 1$

如果 $\beta < 1$, 关注 β 点, 分为两种情况

1. $\beta \neq a_n$ 也就是说 $f'(\beta) = 0$, 则存在 $\delta > 0$ 使得 $|f(\beta + \delta) - f(\beta)| \leq \varepsilon \delta$, 进而

$$|f(\beta + \delta)| \leq |f(\beta + \delta) - f(\beta)| + |f(\beta)| \leq \varepsilon \delta + \varepsilon \beta + \sum_{a_n < \beta} \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \varepsilon(\beta + \delta) + \sum_{a_n < \beta + \delta} \frac{\varepsilon}{2^n}$$

这说明 $\beta + \delta \in E$ 与 β 是上确界矛盾

2. 如果 β 等于某一个 a_k , 则存在 $\delta > 0$ 使得 $|f(\beta + \delta) - f(\beta)| \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$, 进而

$$|f(\beta + \delta)| \leq |f(\beta + \delta) - f(\beta)| + |f(\beta)| \leq \frac{\varepsilon}{2^k} + \varepsilon \beta + \sum_{a_n < \beta} \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \varepsilon(\beta + \delta) + \sum_{a_n < \beta + \delta} \frac{\varepsilon}{2^n}$$

验证一下最后一个不等号: 只需说明 $\sum_{\beta \leq a_n < \beta + \delta} \frac{\varepsilon}{2^n} \geq \frac{\varepsilon}{2^k}$, 注意当 $n = k$ 时候 $a_n = \beta$ 所以左边求和项至少包括了右边那一项, 不等式成立, 于是 $\beta + \delta \in E$, 又与 β 是上确界矛盾了

综上 $\beta = 1 \in E$, 于是 $|f(1)| \leq \varepsilon + \sum_{a_n < 1} \frac{\varepsilon}{2^n} \leq 2\varepsilon$ 对任意 $\varepsilon > 0$ 恒成立, 由任意性可知 $f(1) = 0$, 结论得证

□

例题 2.2.10 设 $f(x) \in C[0, 1]$, $f(0) \neq f(1)$, $f(x)$ 的值域为 M , 若对任意 $c \in M$, $f(x) = c$ 都至多只有有限个解, 证明: 存在 $c_0 \in M$ 使得 $f(x) = c_0$ 恰好有奇数个解.

证明. **方法一**: 利用函数的极值个数是至多可数集 (前面例题已经证明)

不妨设 $f(0) < f(1)$, 则集合 $(f(0), f(1))$ 是不可数集, 于是可以取一点 $c \in (f(0), f(1))$ 使得 c 不是 $f(x)$ 的极值

此时设 $f(x) = c$ 的全部解从小到大依次是 $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$, 这一共对应着 $n+1$ 个区间, 在相邻的两个开区间内, 显然 $f(x)$ 要么恒大于 c , 要么恒小于 c , 并且如果某个区间是恒大于 c 的, 则旁边相邻的区间内就必须是恒小于 c 的, 否则依据极值点的定义可知 c 是 $f(x)$ 的极值, 导致矛盾

注意 $f(0) < c < f(1)$ 并且 (画图理解, 数个数) “小于” 和 “大于” 交替出现, 所以 n 一定是奇数, 得证

方法二: 采用反证法: 不妨设 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 任取 $c_0 \in (0, 1)$, 记 $f(x) = c_0$ 全部的解从小到大依次为 $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$, 则显然有 $0 < x_i < x_{i+1} < 1$, 补充定义 $x_0 = 0, x_{2n+1} = 1$, 根据连续函数的介值性, $f(x)$ 在每一个区间 (x_i, x_{i+1}) 上, 要么恒大于 c_0 , 要么恒小于 c_0

如果在某个区间 (x_i, x_{i+1}) 上, $f(x) > c_0$ 恒成立, 则给区间 (x_i, x_{i+1}) 标记 + 号, 而如果 $f(x) < c_0$ 恒成立, 则给区间 (x_i, x_{i+1}) 标记 - 号, 这样 $(x_i, x_{i+1}), i = 0, 1, \dots, 2n$ 一共 $2n+1$ 个区间, 每一个区间都被标记了 + 或者 - 号, 因为 $0 = f(0) < c < f(1) = 1$, 所以区间 $(0, x_1)$ 对应 - 号, 而区间 $(x_{2n}, 1)$ 对应 + 号

这 $2n+1$ 个符号中, 要么 + 号更多, 要么 - 号更多 (显然不可能个数一样), 不妨设 - 号更多 (另一种情况是完全类似的, 可以同理证明)

因 $f(x)$ 连续, 则在每个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上, 函数 $|f(x) - c_0|$ 都有最大值 $|f(x_i) - c_0|$, 记为 $\delta_i, i = 0, 1, \dots, 2n$, 则显然 $\delta_i > 0$, 我们记 $\delta = \min_{0 \leq i \leq 2n} \delta_i > 0, d_0 = c_0 - \frac{1}{2}\delta$, 设这 $2n+1$ 个区间中, 全体被标记 - 号的区间是

$$(x_{j_1}, x_{j_1+1}), (x_{j_2}, x_{j_2+1}), \dots, (x_{j_m}, x_{j_m+1}), 0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq 2n-1, m \geq n+1$$

其余的区间标记的均为 + 号

现在任取 $c \in (d_0, c_0)$, 考虑 $g(x) = f(x) - c$, 则有 $g(x_{j_i}) > 0, g(x_{j_i}') < 0, g(x_{j_i+1}) > 0, i = 2, 3, \dots, m$, 因此对于这 $m-1$ 个区间 $(x_{j_i}, x_{j_i+1}), i = 2, 3, \dots, m$, $g(x)$ 在每个区间中都至少有两个零点, 注意到 $j_2 \geq 1$, 因此上述区间一定不包括 (x_0, x_1) , 但是 $g(x_0) = g(0) < 0, g(x_1) = c_0 - c > 0$, 因此 $g(x)$ 至少还有一个零点介于 $(0, x_1)$ 之间, 综上 $g(x)$ 至少有 $2(m-1) + 1 \geq 2n+1$ 个零点

根据反证法的假设可知 $g(x)$ 的零点个数必须是偶数, 因此我们得到: 对任意 $c \in (d_0, c_0)$, 方程 $f(x) = c$ 都至少有 $2n+2$ 个根

下面我们使用区间套定理完成最后的证明:

在开区间 (d_0, c_0) 之中任取一点 c_1 , 则 $f(x) = c_1$ 有 $2n_1$ 个解, 并且根据前面的论证可知 $n_1 \geq n+1$, 再次使用上文构造区间 (d_0, c_0) 的方法, 我们可以找到 $d_1 \in (d_0, c_0), d_1 \neq c_1$, 使得对任意 $c \in (d_1, c_1)$ (或 $c \in (c_1, d_1)$), 这取决于标记的正负号的个数, 也即 d_1, c_1 的大小关系, 都满足 $f(x) = c$ 至少有 $2n_1+2$ 个解

同样的, 在开区间 (d_1, c_1) (或 (c_1, d_1) 之中), 又可找到子区间 (d_2, c_2) (或 (c_2, d_2)), 方便起见不妨设为前者), 使得任意 $c \in (d_2, c_2)$, $f(x) = c$ 至少有 $2n_2+2$ 个解且 $n_2 \geq n_1+1$

以此类推我们得到了一列区间, 且 $[d_{k+1}, c_{k+1}]$ (或 $[c_{k+1}, d_{k+1}]$) $\subset (c_k, d_k)$ (或 (d_k, c_k)), 且任意 $c \in (c_k, d_k)$ (或 (d_k, c_k)), $f(x) = c$ 都至少要有 $2n_k+2$ 个解, 其中 $n_k \geq n_{k-1}+1$

根据闭区间套定理知, 存在 y 使得 y 在每一个闭区间 $[c_{k+1}, d_{k+1}]$ (或 $[d_{k+1}, c_{k+1}]$) 之中, 则 y 在每一个开区间 (c_k, d_k) (或 (d_k, c_k)) 之中, 因此根据这些区间的定义可知 $f(x) = y$ 至少有 $2n_k+2 \geq 2(n_1+k-1)+2 = 2n+2k$ 个解, 这对于任意正整数 k 都成立, 因此 $f(x) = y$ 的解个数必定为无穷, 这与条件: 任意 $c \in M, f(x) = c$ 都至多只有有限个解矛盾, 从而我们证明了结论

□

2.3 练习题

习题 2.3.1 证明: $\mathbb{R}^n$ 中既开又闭的集合只有空集和 $\mathbb{R}^n$.

习题 2.3.2 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 中, 且对任意 x , 都存在与 x 有关的 $r > 0$ 使得 $f(x)$ 在区间 $(x-r, x+r)$ 中恒等于某个多项式, 证明: $f(x)$ 是一个多项式.

上述问题来自于新领军考试, 可以与例题做个对比, 很明显这题比例题简单的多

习题 2.3.3 证明: 集合 $[0, 1]$ 不是可数集.

习题 2.3.4 证明: 不存在定义在 $[0, 1]$ 上的函数 $f(x)$ 使得其在有理点连续, 而在无理点不连续.

上题的一般结论如下

命题 2.3.1: 一般结论

集合 $A \subset [0, 1]$ 为某一定义在 $[0, 1]$ 上的函数的全体连续点集当且仅当 A 可以写成至多可数个开集的交; 换句话说, 函数的不连续点集一定是闭集并, 反之给定集合, 也一定能构造这样的函数.

以上命题将在日后合适的时机放到对应的章节中, 上课讲解

习题 2.3.5 证明: 区间 $(0, 1)$ 不能写成一列两两不相交的闭集的并.

上题难度较大, 初学者谨慎尝试! 应对考试掌握有限个的情况即可, 仅做拓展

习题 2.3.6 是否存在定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 $f(x)$, 使得对任意 $c \in \mathbb{R}$, 方程 $f(x) = c$ 都恰好有两个解, 又问将恰好有两个解换成恰好有三个解, 结论如何.

可以与上课例题做个对比, 本题明显难度低并且算是特例, 但依然不简单

习题 2.3.7 设 $f(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上且恒正的函数, 证明: 可以选取有限个 $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ 使得区间 $(x_k - f(x_k), x_k + f(x_k))$ 互不相交, 并且 $f(x_1) + \dots + f(x_n) > \frac{1}{4}$.

习题 2.3.8 设每一点 $x \in \mathbb{R}$ 均为函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 的极小值点, 证明: f 的值域 $f(\mathbb{R})$ 是一个至多可数集, 并且存在区间 I 使得 $f(x)$ 在区间 I 中为常值函数, 又问将条件中的“极小值点”改为“极值点”, 结论如何.

习题 2.3.9 甲和乙两人玩一个 $\mathbb{R}$ 上的区间套游戏: 甲先选取一个闭区间 W_1 , 然后乙选一个 W_1 的子区间 L_1 , 但是要求 L_1 的长度不能超过 W_1 的一半; 然后甲再选一个 L_1 的子区间 W_2 , 又轮到乙再选一个 W_2 的子区间 L_2 , 同样要求 L_2 的长度不超过 W_2 的一半; 如此下去, 第 n 步, 甲选一个 L_{n-1} 的子区间 W_n , 又轮到乙再选一个 W_n 的子区间 L_n , 但是要求 L_n 的长度不超过 W_n 的一半. 他们两个人得到一个区间套:

$$W_1 \supset L_1 \supset W_2 \supset L_2 \supset \dots \supset W_n \supset L_n \supset \dots$$

甲和乙发现 $\bigcap_{n \geq 1} W_n = \bigcap_{n \geq 1} L_n = \{x\}$ 是一个实数. 他们规定, 如果 x 是有理数那么甲赢, 如果 x 是无理数就是乙赢, 试问结果如何 (问谁有必胜策略)?

注: 本题称为 Banach-Mazur 游戏, 可以帮你理解可数与不可数究竟差在哪里, 对比例题 2.10 感受一下.

第三章 数列极限问题

数列极限涵盖的内容极多，递推数列，数项级数，函数项级数，初等不等式，上下极限，估阶方法，无理测度等等全部都会涉及到，综合性极强，考察范围也很广

面对递推数列的性态分析问题，通常是先画图或者归纳来做定性分析（注意蛛网图方法面对递推式含有 n 的数列是无效的！这个时候只能自己找感觉，没有通法，但是如果递推式是线性的，则母函数方法通常强有效），但是数学类考试的题目往往没这么简单，是需要做进一步定量分析的，可能的技巧就很多了，比如母函数方法，加强归纳方法，上下极限方法，强求通项之类的，很考验高中不等式的基本功以及对数列大小和变化速度的感觉

估阶问题一般来说是有通法的，无非就是泰勒展开，然后裂项求和（强求通项思想），接着迭代回去，阶就升高了，总之各种各样的估阶问题几乎都是围绕泰勒公式进行的

注意：估阶问题我们在上一届竞赛班已经系统全面的讲过了，因此这里不再单独专门讲估阶（尤其是估计高阶渐近）；对于具体问题中遇到的估阶相关问题（一定会遇到，估阶是一种思想，各种各样的题目里面都会涉及），会顺带讲解并做简单的方法整理

无理数有关的问题若非题干中明确出现“有理数”“无理数”这样的文字，则剩下的情况基本都是围绕三角函数和整数展开考的，这部分需要的定理就是最简单的有理数稠密性以及狄利克雷定理（本质抽屉原理），由此导出一个经典结果： a 为无理数，则 na 的小数部分稠密，考试会用的基本就这些

无理数相关的还有等分布理论，这些内容我们在下册讲，因为证明起来需要傅里叶和积分的若干个逼近定理

上下极限方法面对高阶递推数列或者多个数列缠在一起的问题很好用，因为这种问题通常有界性是显然的，但是极限不一定存在，怎么办呢？上下极限总是存在的，之后反复抽子列（收敛子列）然后运用上下极限的基本不等式便可完成证明（核心目的是说明上下极限相等）

剩下还有很多无法归类的综合问题，只能具体情况具体分析，面对难题，通常只有当你画图与枚举发现了一些数列的变化规律之后，才有破解的可能性（因此数学归纳法是很重要的工具），如果不知道从何入手，可以先取几个特殊的数列找感觉，或者对题目加条件做一些不妨设

注意：作为数学类的课程讲义，可能这一章从头到尾就没有什么很简单的问题，因此如果你的基础不过关，就先去看非数的递推数列，扎实打牢基础，那边会介绍许多简单常规问题的常用基本方法，对于基础不好的数学系学生来说或许并不容易，值得去看

3.1 不动点与蛛网图方法

例题 3.1.1 设连续函数 $f(x) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $x_1 \in [0, 1]$, $x_{n+1} = f(x_n)$, 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$.

证明. 如果 x_n 收敛, 则显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$, 要证明收敛, 反证法, 则记

$$L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, l = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, 0 \leq l < L \leq 1$$

引理 3.1.1: 有界数列 x_n 如果满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$, 则 x_n 的全体聚点构成一个闭区间.

这个引理很直观也很重要, 我们就在本题过程中顺带证明此结果

反证法, 则存在 $A \in (l, L)$ 使得 A 不是聚点, 故存在 $\delta > 0$ 使得区间 $(A - \delta, A + \delta)$ 中只包含了有限个 x_n , 因此存在正整数 N_1 使得 $n > N_1$ 时恒有 $|x_n - A| \geq \delta$, 并且可以要求 $A + \delta < L, A - \delta > l$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$, 所以存在 N_2 使得 $n > N_2$ 时恒有 $|x_{n+1} - x_n| < \delta$, 记 $N = \max(N_1, N_2)$

根据上下极限的定义, 存在 $j > i > N$ 使得 $x_i > A + \delta, x_j < A - \delta$, 现在看 $x_i, x_{i+1}, \dots, x_j$ 这些项, 考虑其中最后一个大于等于 $A + \delta$ 的项, 记为 x_k , 显然 $k \leq j - 1$, 那么 $x_{k+1} < A + \delta$, 根据反证法的假设知 $x_{k+1} \leq A - \delta$, 则 $|x_{k+1} - x_k| \geq 2\delta$, 矛盾, 因此引理得证

现在来证明 $f(x) = x$ 对任意 $x \in [l, L]$ 恒成立, 任取 $A \in [l, L]$ 则存在一个子列 $x_{n_k} \rightarrow A$, 根据条件可知 $x_{n_k+1} \rightarrow A$, 在递推式 $x_{n_k+1} = f(x_{n_k})$ 中令 $k \rightarrow \infty$ 可知 $A = f(A)$

对于 $A = \frac{l+L}{2}$, 这也是一个极限点, 所以存在 $x_N \in [l, L]$, 因此 $x_n = x_N, \forall n \geq N$, 这与数列不收敛矛盾

□

例 3.1.2 设 d 为正整数, 给定 $1 < a \leq \frac{d+2}{d+1}$, $x_0, x_1, \dots, x_d \in (0, a-1)$, 令 $x_{n+1} = x_n(a - x_{n-d})$, $n \geq d$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在并求极限.

证明. 先以 $d=1$ 为例来分析和证明

此时 $a \in (1, \frac{3}{2}]$, $x_0, x_1 \in (0, a-1)$, 递推式为 $x_{n+1} = x_n(a - x_{n-1})$ 显然我们只需要证明极限存在, 因为极限一旦存在, 则必然是 $a-1$

从递推式可知, 如果 $x_{n-1} < a-1$, 则 $x_{n+1} > x_n$, 如果 $x_{n-1} > a-1$, 则 $x_{n+1} < x_n$

如果从某项开始, 后面所有的 x_n 都 $\geq a-1$, 或者从某项开始, 后面所有的 x_n 都 $\leq a-1$, 则前者导致数列单调递减有下界, 后者使得数列单调递增有上界, 因而极限都存在

反之, 注意初值 $x_0, x_1 < a-1$, 结合单调性的分析可知数列 x_n 会先递增超过 $a-1$, 然后递增两项达到局部最大值, 接着开始递减, 若干项后小于 $a-1$, 然后递减两项打到局部最小值, 接着继续递增, 若干项后超过 $a-1$, 然后递增两项达到局部最大值, 以此类推

具体写出变化规律为

$$\begin{aligned} x_1 &< x_2 < \dots < x_{n_0} \leq a-1 < x_{n_0+1} < x_{n_0+2} \\ x_{n_0+2} &> x_{n_0+3} > \dots > x_{n_1} > a-1 \geq x_{n_1+1} > x_{n_1+2} \\ x_{n_1+2} &< x_{n_1+3} < \dots < x_{n_2} \leq a-1 < x_{n_2+1} < x_{n_2+2} \\ &\dots \end{aligned}$$

现在看局部最大项 $x_{n_0+2}, x_{n_2+2}, x_{n_4+2}, \dots$ 和局部最小项 $x_{n_1+2}, x_{n_3+2}, x_{n_5+2}, \dots$

注意

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= x_{n+1}(a - x_n) = x_n(a - x_n)(a - x_{n-1}) \\ x_{n_0+2} &= x_{n_0}(a - x_{n_0})(a - x_{n_0-1}) \leq (a-1)a \leq \frac{a}{2} \\ \left(x_{n_0} \leq a-1 < \frac{a}{2} \Leftrightarrow a < 2, (a-1)a \leq \frac{a}{2} \Leftrightarrow a \leq \frac{3}{2} \right) \\ x_{n_1+2} &= x_{n_1}(a - x_{n_1})(a - x_{n_1-1}) \geq (a-1)(a - (a-1))a \\ x_{n_2+2} &= x_{n_2}(a - x_{n_2})(a - x_{n_2-1}) \leq (a-1)(a - x_{n_1+2}) \\ &\dots \end{aligned}$$

这样就得到了局部最大项的一系列上界, 以及局部最小项的一系列下界, 我们只要说明这些上界和下界, 都在向着中间值 $a-1$ 靠拢即可

事实上这些上界和下界可以用递推数列来刻画, 如下:

令 $u_{n+1} = (a-1)(a - u_n)$, $u_1 = (a-1)a$, 这是一阶线性递推数列, 求通项得 $u_{n+1} = a-1 + (1-a)^n(u_1 - a + 1)$, 注意 $1 < a \leq \frac{3}{2}$, 所以取极限得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a-1$, 因此结论得证

注释 3.1.1: 分析可以发现, 本题的数列如果是“最终单调”(从某一项开始, 之后一直单调)的, 那么不论递增还是递减, 都是有界的, 所以极限存在, 于是只需要研究“永不单调”的情况, 此时数列的变化具备“负反馈”性质, 也就是说如果连续 $d+1$ 项小于 $a-1$, 那么之后就会一直增加, 然后某个时刻超过 $a-1$, 超过之后还会继续增, 但是只能增 $d+1$ 项, 然后负反馈又生效了, 数列开始递减, 某一时刻小于 $a-1$ 后, 再递减 $d+1$ 项接着递增, 以此类推

画图可以看到数列有一列极大值和极小值, 我们只需要说明这些极值都在逐渐的趋于 $a-1$ 就可以了, 因为数列任何一项肯定都夹在相邻两个极值之间, 所以(夹逼准则)得证

现在来看一般情况

简单分析可知: 如果 x_n 是最终单调的, 那么单调有界便得证, 以下考虑“永不单调”的情况, 也就是说不存在 N 使得 $n > N$ 之后 x_n 单调, 则 x_n 的变化规律是: 从 $x_0, x_1, \dots, x_d$ 开始, 先递增若干项到 $x_{n_0} \leq a-1$, 下一项 $x_{n_0+1} > a-1$, 然后连续递增 $d+1$ 项一直到 x_{n_0+d+1} 为局部极大值, 然后开始持续递减若干项到某一个 $x_{n_1} > a-1$, 下一项 $x_{n_1+1} \leq a-1$, 然后连续递减 $d+1$ 项一直到 x_{n_1+d+1} 为局部极小值, 接着递增若干项到 $x_{n_2} \leq a-1$, 下一项 $x_{n_2+1} > a-1$, 然后连续递增 $d+1$ 项一直到 x_{n_2+d+1} 为新的局部极大值, 便又开始递减

以此类推我们得到了一系列的局部极大值 $x_{n_0}, x_{n_2}, x_{n_4}, \dots$ 和局部极小值 $x_{n_1}, x_{n_3}, x_{n_5}, \dots$, 下面去估计这些极大值的上界和极小值的下界, 然后说明上界和下界都是趋于 $a-1$ 的即可

根据递推式 $x_{n+1} = x_n(a - x_{n-d})$ 可知

$$\frac{x_{n+d+1}}{x_{n+d}} = a - x_n, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_n} = a - x_{n-d} \Rightarrow x_{n+d+1} = x_n(a - x_n)(a - x_{n-1}) \dots (a - x_{n-d})$$

因为 $x_{n_0}, x_{n_0-1}, \dots, x_{n_0-d} \in [0, a-1], a-1 \leq \frac{a}{2}$, 结合二次函数 $x(a-x)$ 单调性有

$$x_{n_0+d+1} = x_{n_0}(a - x_{n_0})(a - x_{n_0-1}) \dots (a - x_{n_0-d}) \leq a^d x_{n_0}(a - x_{n_0}) \leq a^d(a-1) \stackrel{\text{def}}{=} u_1$$

然后看下一个极小值, 利用 $x_{n_1}, x_{n_1-1}, \dots, x_{n_1-d} \in [a-1, x_{n_0+d+1}] \subset [a-1, u_1], u_1 = a^d(a-1) \leq \frac{a}{2}$ 有

$$x_{n_1+d+1} = x_{n_1}(a - x_{n_1})(a - x_{n_1-1}) \dots (a - x_{n_1-d}) \geq (a - u_1)^d x_{n_1}(a - x_{n_1}) \geq (a-1)(a - u_1)^d \stackrel{\text{def}}{=} u_2$$

这里补充证明一下不等式 $a^d(a-1) \leq \frac{a}{2}$ 也即 $a^{d-1}(a-1) \leq \frac{1}{2}$, 因为 $1 < a \leq \frac{d+2}{d+1}$, 所以

$$\begin{aligned} a^{d-1}(a-1) &\leq \left(\frac{d+2}{d+1}\right)^{d-1} \frac{1}{d+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (d-1)\ln(d+2) - d\ln(d+1) + \ln 2 \leq 0 \\ p(d) &= (d-1)\ln(d+2) - d\ln(d+1) + \ln 2, p(1) = 0 \\ p'(d) &= \ln(d+2) + \frac{d-1}{d+2} - \ln(d+1) - \frac{d}{d+1}, p''(d) = \frac{d^2 - d - 3}{(d+1)^2(d+2)^2} \end{aligned}$$

由此可见 $p'(d)$ 在 $[1, +\infty)$ 中先减后增, 注意 $p'(1) < 0, p'(+\infty) = 0$, 所以 $p'(d) < 0$ 恒成立, 也就是说 $p(d)$ 单调递减, 注意 $p(1) = 0$, 所以 $p(d) \leq 0$ 恒成立, 不等式得证, 同理有

$$x_{n_2+d+1} = x_{n_2}(a - x_{n_2})(a - x_{n_2-1}) \dots (a - x_{n_2-d}) \leq (a - u_2)^d x_{n_2}(a - x_{n_2}) \leq (a-1)(a - u_2)^d \stackrel{\text{def}}{=} u_3$$

因此定义数列 $u_{n+1} = (a-1)(a - u_n)^d, u_1 = a^d(a-1)$, 则各个局部极值都夹在相邻的两个 u_n 当中, 我们证明 $u_n \rightarrow a-1$ 即可, 显然递推函数是单调递减的, 前面的推导给出 $0 \leq u_2 \leq u_n \leq u_1 \leq \frac{a}{2}$ (其实从逻辑上讲应该将 u_n 的定义以及变化规律这些东西拿到最开始证明, 然后再去放缩 x_n 的各个极值, 因为过程中有利用二次函数单调性放缩, 那就需要验证 u_n 具备上述范围, 这样才能落入单调递增区间中, 放缩合理)

记 $f(x) = (a-1)(a-x)^d$ 则 $f(x)$ 在区间 $[u_2, u_1]$ 中是单调递减的, 因此 $f(f(x))$ 单调递增, 所以 u_{2n-1} 递减, u_{2n} 递增并且都是有界数列, 所以奇偶子列极限都存在, 设 $u_{2n-1} \rightarrow A, u_{2n} \rightarrow B$ 于是 $A = (a-1)(a-B)^d, B = (a-1)(a-A)^d$, 也就是说方程 $x = (a-1)(a - (a-1)(a-x)^d)^d$ 在区间 $[u_2, u_1]$ 中有两个解 $x = A, B$

经过反复构造函数, 求导, 研究单调性便可证明 $A = B = a-1$, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a-1$

注释 3.1.2: 最后对于 u_n 的处理, 上课提到了“对 $f(x)$ 直接压缩映射”方法, 其实这个方法在 d 较大时是无法实现的, 或者说只能在极限点附近实现, 但是我们却不易证明 u_n 会落入极限点附近的压缩映射区间内, 因此难以操作, 只能去证明 $f(f(x))$ 是全局的压缩映射

下一页我们针对一般情况来写一个完整、严谨并且梳理好逻辑顺序的最终解答, 也会补充上面缺失的细节 (例如最后的求导部分, 放到下面证明), 考试时应当如下写过程

针对一般情况的最终证明

引理 3.1.2: 设 $1 < a \leq \frac{d+2}{d+1}, d \in \mathbb{N}^+$, 定义 $u_{n+1} = (a-1)(a-u_n)^d, u_1 = a^d(a-1)$, 则有:

$$0 \leq u_2 \leq u_n \leq u_1 \leq \frac{a}{2}, u_{2n-1} \text{ 单调递减}, u_{2n} \text{ 单调递增}, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a-1$$

设 $f(x) = (a-1)(a-x)^d$, 则 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 中是单调递减的, 先归纳证明 $0 \leq u_2 \leq u_n \leq u_1 \leq \frac{a}{2}$

对于 $n=1, 2$ 的情况, 要证明 $u_1 \leq \frac{a}{2}, u_2 \leq u_1, u_2 \geq 0$ 三个不等式

因为 $u_1 \leq \frac{a}{2} \Leftrightarrow a^{d-1}(a-1) \leq \frac{1}{2}$ 且 $1 < a \leq \frac{d+2}{d+1}$, 所以

$$a^{d-1}(a-1) \leq \left(\frac{d+2}{d+1}\right)^{d-1} \frac{1}{d+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (d-1)\ln(d+2) - d\ln(d+1) + \ln 2 \leq 0$$

$$p(d) = (d-1)\ln(d+2) - d\ln(d+1) + \ln 2, p(1) = 0$$

$$p'(d) = \ln(d+2) + \frac{d-1}{d+2} - \ln(d+1) - \frac{d}{d+1}, p''(d) = \frac{d^2 - d - 3}{(d+1)^2(d+2)^2}$$

由此可见 $p'(d)$ 在 $[1, +\infty)$ 中先减后增, 注意 $p'(1) < 0, p'(+\infty) = 0$, 所以 $p'(d) < 0$ 恒成立, 也就是说 $p(d)$ 单调递减, 注意 $p(1) = 0$, 所以 $p(d) \leq 0$ 恒成立, 也即 $u_1 \leq \frac{a}{2}$, 进而

$$u_2 = (a-1)(a-u_1)^d \geq (a-1)\left(a - \frac{a}{2}\right)^d \geq 0, u_1 \geq 0 \Rightarrow u_2 = f(u_1) \leq f(0) = u_1$$

如果对正整数 n 已有 $0 \leq u_2 \leq u_n \leq u_1 \leq \frac{a}{2}$, 则下一项根据单调性可知

$$f(0) \geq f(u_2) \geq f(u_n) \geq f(u_1) \Rightarrow u_1 \geq u_3 \geq u_{n+1} \geq u_2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq u_2 \leq u_{n+1} \leq u_1 \leq \frac{a}{2}$$

由归纳法知成立

因为 $f(f(x))$ 在区间 $[0, a]$ 中是单调递增的 (这是由于 $f(x)$ 递减), 并且

$$u_{2n+1} = f(f(u_{2n-1})), u_3 \leq u_1, u_{2n} = f(f(u_{2n-2})), u_2 \geq 0, u_1 = a^d(a-1) = f(0)$$

所以反复用 $f(f(x))$ 作用在不等式两端即可得到 u_{2n-1} 单调递减, u_{2n} 单调递增, 根据单调有界知他们分别都收敛, 设 $u_{2n-1} \rightarrow L, u_{2n} \rightarrow l$, 则 $L, l \in [u_2, u_1]$ 并且 L, l 都满足方程 $f(f(x)) = x$, 下面证明 $L = l = a-1$

更强的, 可以说明 $f(f(x))$ 在区间 $[0, a]$ 中是压缩映射, 也即存在 $m \in (0, 1)$ 使得 $(f(f(x)))' \leq m$ 恒成立, 一旦这个得证, 注意 $f(f(a-1)) = f(a-1) = a-1$, 便显然 (减去不动点) 有 x_n 收敛于 $a-1$

设

$$\begin{aligned} g(x) &= f(f(x)) = (a-1)\left(a - (a-1)(a-x)^d\right)^d, x \in [0, a] \\ g'(x) &= (a-1)d\left(a - (a-1)(a-x)^d\right)^{d-1} (a-1)d(a-x)^{d-1} \\ &= (a-1)^2 d^2 \left(\left(a - (a-1)(a-x)^d\right)(a-x)\right)^{d-1} \\ h(x) &= \left(a - (a-1)(a-x)^d\right)(a-x) = a(a-x) - (a-1)(a-x)^{d+1} \\ h'(x) &= (a-1)(d+1)(a-x)^d - a \text{ 在 } [0, a] \text{ 中单调递减} \end{aligned}$$

注意 $h'(0) = a^d(a-1)(d+1) - a, h'(a) = -a < 0$, 则 $h(x)$ 在 $[0, a]$ 中要么一直递减, 要么先递增再递减, 所以当 $h'(0) = a^d(a-1)(d+1) - a \leq 0$ 时 $h(x)$ 的最大值为 $h(0)$, 当 $h'(0) = a^d(a-1)(d+1) - a > 0$ 时 $h(x)$ 的最大值是 $h(x_0)$, 这里 x_0 是 $h'(x)$ 在区间 $[0, a]$ 中的唯一零点, 满足 $(a-x_0)^d = \frac{a}{(a-1)(d+1)}$

下面分类讨论, 来证明存在 $m \in (0, 1)$ 使得 $g'(x) = (a-1)^2 d^2 h(x)^{d-1} \leq m < 1$

1. 如果 $d = 1$, 则利用条件显然 $g'(x) = (a-1)^2 \leq \frac{1}{4}$, 成立, 以下设 $d \geq 2$

2. 如果 $h'(0) \leq 0$, 则 $a^{d-1}(a-1)(d+1) \leq 1$ 且 $h(x) \leq h(0)$, 运用伯努利不等式有

$$\begin{aligned} 1 &\geq (1+(a-1))^{d-1}(a-1)(d+1) \geq (1+(d-1)(a-1))(a-1)(d+1) \\ u &\stackrel{\text{def}}{=} (a-1)d \Rightarrow (u+a-1)(u+2-a) = u^2 + u - (a-1)(a-2) \leq 1 \\ &\Rightarrow u^2 + u \leq 1 + (a-1)(a-2) \leq 1 \Rightarrow u \in \left[0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right] \\ g'(x) &= (a-1)^2 d^2 h(x)^{d-1} \leq u^2 h(0)^{d-1}, h(0) = (a-a^d(a-1))a \\ h(0) &= \left(a - (1+(a-1))^d(a-1)\right)a \leq (a-(a-1)(1+d(a-1)))a = a - da(a-1)^2 \\ ad(a-1)^2 + \frac{1}{4d} &\geq 2\sqrt{\frac{a(a-1)^2}{4}} = \sqrt{a}(a-1) > a-1 \Rightarrow h(0) = a - da(a-1)^2 \leq 1 + \frac{1}{4d} \\ g'(x) &\leq u^2 \left(1 + \frac{1}{4d}\right)^{d-1} \leq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{4d}\right)^{d-1} \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \left(1 + \frac{1}{4d}\right)^d \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} e^{\frac{1}{4}} < 1 \end{aligned}$$

3. 如果 $h'(0) > 0$, 则 $h(x)$ 先增后减, 在 $x = x_0 \in [0, a]$ 处取到最大值且 $(a-x_0)^d = \frac{a}{(a-1)(d+1)}$, 进而

$$\begin{aligned} h(x) &\leq h(x_0) = \left(a - (a-1)(a-x_0)^d\right)(a-x_0) = \left(a - \frac{a}{d+1}\right)(a-x_0) \\ &= \frac{ad}{d+1}(a-x_0) = \frac{ad}{d+1} \left(\frac{a}{(a-1)(d+1)}\right)^{\frac{1}{d}}, a \leq \frac{d+2}{d+1} \\ g'(x) &= (a-1)^2 d^2 h(x)^{d-1} \leq (a-1)^2 d^2 \left(\frac{ad}{d+1}\right)^{d-1} \left(\frac{a}{(a-1)(d+1)}\right)^{1-\frac{1}{d}} \\ &= (a-1)d \left(\frac{ad}{d+1}\right)^d \left(\left(1-\frac{1}{a}\right)(d+1)\right)^{\frac{1}{d}} \leq \frac{d}{d+1} \left(\frac{\frac{d+2}{d+1}d}{d+1}\right)^d \left(\left(1-\frac{d+1}{d+2}\right)(d+1)\right)^{\frac{1}{d}} \\ &= \frac{d}{d+1} \left(1 - \frac{1}{(d+1)^2}\right)^d \left(1 - \frac{1}{d+2}\right)^{\frac{1}{d}} \leq \frac{d}{d+1} < 1 \end{aligned}$$

由此可知引理成立

注释 3.1.3: 可以看出来, 如果单纯证明 $u_n \rightarrow a-1$, 其实从蓝字“更强的...”部分开始书写就可以了, 前面的过程可以省略, 只需要简单验证一下 $u_n \in [0, a]$ 也即 $f(x) \in [0, a], \forall x \in [0, a]$, 这是显然的, 根据递减性代入 $x = 0, a$ 两个端点立即得证, 无需再求导

回到原题, 简单分析可知: 如果 x_n 是最终单调的, 那么单调有界便得证, 以下考虑“永不单调”的情况, 也就是说不存在 N 使得 $n > N$ 之后 x_n 单调, 则 x_n 的变化规律是: 从 $x_0, x_1, \dots, x_d$ 开始, 先递增若干项到 $x_{n_1} \leq a-1$, 下一项 $x_{n_1+1} > a-1$, 然后连续递增 $d+1$ 项一直到 x_{n_1+d+1} 为局部极大值, 然后开始持续递减若干项到某一个 $x_{n_2} > a-1$, 下一项 $x_{n_2+1} \leq a-1$, 然后连续递减 $d+1$ 项一直到 x_{n_2+d+1} 为局部极小值, 接着递增若干项到 $x_{n_3} \leq a-1$, 下一项 $x_{n_3+1} > a-1$, 然后连续递增 $d+1$ 项一直到 x_{n_3+d+1} 为新的局部极大值, 便又开始递减

以此类推我们得到了一系列的局部极大值 $x_{n_1}, x_{n_3}, x_{n_5}, \dots$ 和局部极小值 $x_{n_2}, x_{n_4}, x_{n_6}, \dots$, 下面去估计这些极大值的上界和极小值的下界, 然后说明上界和下界都是趋于 $a-1$ 的即可

考虑引理中定义的数列 u_k , 我们归纳证明: $x_{n_{2k-1}+d+1} \leq u_{2k-1}, x_{n_{2k}+d+1} \geq u_{2k}$ 对任意 k 恒成立

根据条件有

$$\frac{x_{n+d+1}}{x_{n+d}} = a - x_n, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_n} = a - x_{n-d} \Rightarrow x_{n+d+1} = x_n(a-x_n)(a-x_{n-1})\dots(a-x_{n-d})$$

因为 $x_{n_1}, x_{n_1-1}, \dots, x_{n_1-d} \in [0, a-1], a-1 \leq \frac{a}{2}$, 结合二次函数 $x(a-x)$ 单调性有

$$x_{n_1+d+1} = x_{n_1}(a-x_{n_1})(a-x_{n_1-1}) \dots (a-x_{n_1-d}) \leq a^d x_{n_1}(a-x_{n_1}) \leq a^d(a-1) = u_1$$

然后看下一个极小值, 利用 $x_{n_2}, x_{n_2-1}, \dots, x_{n_2-d} \in [a-1, x_{n_1+d+1}] \subset [0, u_1]$, 引理表明 $u_1 \leq \frac{a}{2}$, 所以

$$x_{n_2+d+1} = x_{n_2}(a-x_{n_2})(a-x_{n_2-1}) \dots (a-x_{n_2-d}) \geq (a-u_1)^d x_{n_2}(a-x_{n_2}) \geq (a-1)(a-u_1)^d = u_2$$

这说明对 $k=1$ 结论成立, 如果 k 时有 $x_{n_{2k-1}+d+1} \leq u_{2k-1}, x_{n_{2k}+d+1} \geq u_{2k}$, 则 $k+1$ 时结合引理有

$$\begin{aligned} & x_{n_{2k+1}}, x_{n_{2k+1}-1}, \dots, x_{n_{2k+1}-d} \in [x_{n_{2k}+d+1}, a-1] \subset [u_{2k}, a-1] \subset \left[0, \frac{a}{2}\right] \\ \Rightarrow & x_{n_{2k+1}+d+1} = x_{n_{2k+1}}(a-x_{n_{2k+1}})(a-x_{n_{2k+1}-1}) \dots (a-x_{n_{2k+1}-d}) \\ & \leq (a-u_{2k})^d x_{n_{2k+1}}(a-x_{n_{2k+1}}) \leq (a-u_{2k})^d(a-1) = u_{2k+1} \leq \frac{a}{2}, (\text{lemma}) \\ & x_{n_{2k+2}}, x_{n_{2k+2}-1}, \dots, x_{n_{2k+2}-d} \in [a-1, x_{n_{2k+1}+d+1}] \subset [a-1, u_{2k+1}] \subset \left[a-1, \frac{a}{2}\right] \\ \Rightarrow & x_{n_{2k+2}+d+1} = x_{n_{2k+2}}(a-x_{n_{2k+2}})(a-x_{n_{2k+2}-1}) \dots (a-x_{n_{2k+2}-d}) \\ & \geq (a-u_{2k+1})^d x_{n_{2k+2}}(a-x_{n_{2k+2}}) \geq (a-u_{2k+1})^d(a-1) = u_{2k+2} \end{aligned}$$

因此我们用归纳法证明了每一个极大值的上界不超过 u_{2k-1} , 每一个极小值的下界不小于 u_{2k}

引理表明 u_n 收敛于 $a-1$, 结合 x_n 的变化规律可知 $x_n \rightarrow a-1$, 结论得证

□

注释 3.1.4: 本题实际上可以拆分成三道题: $d=1$ 时的命题、引理 3.1.2 本身, 以及用引理去解决一般情况的这一部分, 各自分别都是有一定难度的数列综合题, 题目出自于匈牙利的竞赛

其实本题的思路是清晰的, 数列变化规律也不难刻画, 关键在于一般的 d 要说明收敛, 则依赖于引理 3.1.2 的结果, 这个引理自始至终就是纯粹的高考题, 很考验高中所学的数列/不等式放缩技巧以及导数题的功底. 如果上面的题目实在看不下去, 可以先选择其中一部分学习, 如我所说拆成三个问题去看

3.2 上下极限技巧

例题 3.2.1 设 $x_0, y_0 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1}, y_{n+1} = \frac{1}{2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1}$, 证明: 数列 x_n, y_n 都收敛且极限相同.

证明. 根据条件可知 $x_n, y_n > 0$, 并且进一步 $x_n, y_n \in [0, 1]$, 所以上下极限也都在 $[0, 1]$ 之间

$$\begin{aligned} x_{n+1} - y_{n+1} &= \frac{1}{x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1} - \frac{1}{2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1} \\ &= \frac{x_n^2 - y_n^2}{(x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1)(2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1)} \\ |x_{n+1} - y_{n+1}| &= |x_n - y_n| \frac{x_n + y_n}{(x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1)(2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1)} \\ &\leq |x_n - y_n| \frac{x_n + y_n}{(x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1)(x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1)}, x^2 + xy + y^2 \geq \frac{3}{4}(x+y)^2 \\ &\leq |x_n - y_n| \frac{x_n + y_n}{\left(1 + \frac{3}{4}(x_n + y_n)^2\right)^2} = |x_n - y_n| \frac{u}{\left(1 + \frac{3}{4}u^2\right)^2}, u = x_n + y_n \geq 0 \\ 1 + \frac{3}{4}u^2 &= \frac{3}{4}u^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \geq 4\sqrt[4]{\frac{u^2}{36}} = 4\sqrt{\frac{u}{6}} \Rightarrow \frac{u}{\left(1 + \frac{3}{4}u^2\right)^2} \leq \frac{3}{8} \\ |x_{n+1} - y_{n+1}| &\leq \frac{3}{8} |x_n - y_n| \leq \dots \leq \left(\frac{3}{8}\right)^n |x_1 - y_1| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0 \end{aligned}$$

因此, 设

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B, A, B \in [0, 1], A \geq B$$

利用上下极限的基本性质 (加法, 乘法对应不等式, 取倒数对应等式, 对于正数情况) 有

$$\begin{aligned} A &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1)} \leq \frac{1}{4B^2 + 1} \\ B &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1)} \geq \frac{1}{4A^2 + 1} \\ \Rightarrow A &\leq \frac{1}{4B^2 + 1} \leq \frac{1}{\frac{4}{(4A^2 + 1)^2} + 1} = \frac{(4A^2 + 1)^2}{(4A^2 + 1)^2 + 4} \end{aligned}$$

去分母并化简, 因式分解得到 (这个方法难算, 建议用 mma, 或者慢慢手动拆)

$$A \left((4A^2 + 1)^2 + 4 \right) - (4A^2 + 1)^2 = (2A - 1)^3 (2A^2 + A + 1) \leq 0$$

于是 $A \leq \frac{1}{2}$, 同理可知 $B \geq \frac{1}{2}$, 所以 $A = B = \frac{1}{2}$, 因此 x_n, y_n 都收敛到 $\frac{1}{2}$

方法二: 最后计算 A, B 时候如果采用上述方法硬做有点难算, 其实有巧妙一些的选择

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} (4x_n^2 - (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2)) = 0$ (拆成几项, 都是有界数列乘以趋于零的量这样的形式, 因此极限必然是零), 进而上下极限也有等式

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 4x_n^2 = 4B^2, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 4x_n^2 = 4A^2$$

代入可知

$$\begin{aligned} A &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1)} = \frac{1}{4B^2 + 1} \\ B &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1)} = \frac{1}{4A^2 + 1} \\ \Rightarrow 4AB^2 + A &= 4A^2 B + B = 1, (4AB - 1)(B - A) = 0 \end{aligned}$$

所以若 $A = B$ 则显然成立, 若 $A \neq B$ 则 $AB = \frac{1}{4}$, 代入有 $A + B = 1$, 显然解出 $A = B = \frac{1}{4}$ 矛盾

□

注释 3.2.1: 有必要先来证明 $x_n - y_n \rightarrow 0$ 而不是上来直接设 x_n, y_n 的上下极限一共四个数字, 这样的话根本算不出来 (用 mma 都算不出来), 而如果证明了 $x_n - y_n \rightarrow 0$, 则只有两个变量了

方法二好做是因为都是等式了, 所以可以作差然后简单的因式分解出来, 而方法一那样无脑硬算, 就要麻烦。本题运用的若干上下极限性质都可以在任何一本数学分析教材上面找到证明。只要你记住三点:

1. 逐项 (包括加法也包括乘法) 取上下极限通常都会成立一个确定方向的不等式
2. 计算上下极限时候, 如果其中某一项极限就是存在的, 那么上下极限的不等式将会成为等式
3. 对于都是正数的问题, 取倒数的上下极限运算规则就是你脑海中最自然的那种情况

这样考试时候就算忘了具体的结论, 也可以通过画图和举例快速确定下来

例题 3.2.2 设 $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k > 0, k \geq 2, a_n = \sum_{i=1}^k \frac{b_i}{a_{n-i}}, n \geq k+1$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt[k]{\sum_{i=1}^k b_i}$.

证明. 先证明数列是有界的, 为此取充分大的正数 M 使得

$$a_n \in \left[\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{M}, M \right], n = 1, 2, \dots, k$$

然后归纳证明对任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 都有上述不等式成立, 若 n 时成立, 则 $n+1$ 时

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{b_1}{a_n} + \frac{b_2}{a_{n-1}} + \dots + \frac{b_k}{a_{n-k+1}} \geq \frac{b_1}{M} + \frac{b_2}{M} + \dots + \frac{b_k}{M} = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{M} \\ a_{n+1} &= \frac{b_1}{a_n} + \frac{b_2}{a_{n-1}} + \dots + \frac{b_k}{a_{n-k+1}} \leq \frac{b_1}{\frac{b_1 + \dots + b_k}{M}} + \frac{b_2}{\frac{b_1 + \dots + b_k}{M}} + \dots + \frac{b_k}{\frac{b_1 + \dots + b_k}{M}} = M \end{aligned}$$

因此 a_n 是有界数列, 设其上极限为 L , 下极限为 l , 则 $L \geq l$

在递推式两边取上下极限可知

$$\begin{aligned} L &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_1}{a_{n-1}} + \frac{b_2}{a_{n-2}} + \dots + \frac{b_k}{a_{n-k}} \right) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1}{a_{n-1}} + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{b_2}{a_{n-2}} + \dots + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{b_k}{a_{n-k}} = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{l} \\ l &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_1}{a_{n-1}} + \frac{b_2}{a_{n-2}} + \dots + \frac{b_k}{a_{n-k}} \right) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1}{a_{n-1}} + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{b_2}{a_{n-2}} + \dots + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{b_k}{a_{n-k}} = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{L} \end{aligned}$$

所以 $Ll = b_1 + b_2 + \dots + b_k$, 只要证明 $L = l$ 便可得到需要的结论

根据上极限定义, 可以取子列 $a_{n_i} \rightarrow L$, 不妨要求 $n_{i+1} - n_i > 2k + 2$, 然后关注各个 a_{n_i} 的上一项 a_{n_i-1} 构成的数列, 这也是一个有界数列, 所以一定存在收敛子列, 我们可以将其记为 $a_{n_{i_j}-1}, j = 1, 2, \dots$, 那么对于这个子列的每一项, 它后面的那一项 $a_{n_{i_j}}$ 构成的数列, 是之前取的数列 $a_{n_i} \rightarrow L$ 的子列, 自然成立 $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_{i_j}-1} = l_1 \in [l, L], \lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_{i_j}} = L$, 为了方便起见, 我们将这两个数列分别记为 a_{n_i-1}, a_{n_i}

进一步考虑每个 a_{n_i-1} 的上一项构成的数列, 作为有界数列一定存在收敛子列, 然后取出这个收敛子列, 则对于这个子列, 它后面一项构成的数列趋于 l_1 , 它后面第二项构成的数列趋于 L

以此类推反复操作有限次, 最终我们可以得到一列正整数 n_i 单调递增趋于无穷, 满足

$$a_{n_i} \rightarrow L, a_{n_i-1} \rightarrow l_1, a_{n_i-2} \rightarrow l_2, \dots, a_{n_i-k} \rightarrow l_k, a_{n_i-k-1} \rightarrow l_{k+1}, n_{i+1} - n_i \geq 2k + 2, l_1, \dots, l_{k+1} \in [l, L]$$

代入到条件递推式中, 取极限有

$$\begin{aligned} L &= \lim_{i \rightarrow \infty} a_{n_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{b_1}{a_{n_i-1}} + \frac{b_2}{a_{n_i-2}} + \dots + \frac{b_k}{a_{n_i-k}} \right) = \frac{b_1}{l_1} + \frac{b_2}{l_2} + \dots + \frac{b_k}{l_k} \leq \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{l} = L \\ \Rightarrow l_1 &= l_2 = \dots = l_k = l \\ l &= l_1 = \lim_{i \rightarrow \infty} a_{n_i-1} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{b_1}{a_{n_i-2}} + \frac{b_2}{a_{n_i-3}} + \dots + \frac{b_k}{a_{n_i-k-1}} \right) = \frac{b_1}{l_2} + \frac{b_2}{l_3} + \dots + \frac{b_k}{l_{k+1}} \geq \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{L} = l \\ \Rightarrow l_2 &= l_3 = \dots = l_{k+1} = L \end{aligned}$$

于是 $L = l = l_2$ (这是公共的一个, 注意 $k \geq 2$), 结论得证

□

注释 3.2.2: 本题中 $k \geq 2$ 是必要的, 显然 $k = 1$ 时结论不对, 当然从最后一步也能看到这个条件有用. 本题的做法具备一般性, 通常这种题目需要先证明数列有界, 然后反复取收敛子列, 使得连续若干项分别都收敛, 并且其中一个为上极限或者下极限, 然后代入到递推式中取极限, 再放缩即可.

3.3 无理数初步

定理 3.3.1: 狄利克雷定理

1. 对于无理数 a , 则存在无穷多对互素的整数 p, q 使得 $|a - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$, 而对有理数 a , 这样的互素整数对 (p, q) 只能是有限个.

这通常称为“齐次逼近”, 证明也是简单的

推论 3.3.1

对于实数 a , 则 a 为无理数当且仅当任意 $\varepsilon > 0$, 存在整数 x, y 使得 $0 < |ax - y| < \varepsilon$.

证明. 对任意正整数 N , 将 $[0, 1]$ 均分为 N 个闭区间, 每一个长度 $\frac{1}{N}$, 则 $n+1$ 个数 $0, \{a\}, \{2a\}, \dots, \{Na\}$ 全部落在 $[0, 1]$ 中, 根据抽屉原理必定有两个数落入同一区间, 也即存在 $0 \leq i < j \leq N$ 使得 $\{ia\}, \{ja\} \in [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$

注: 因为 a 是无理数, 所以任意 $i \neq j$ 都一定有 $\{ia\} \neq \{ja\}$, 否则 $ia - [ia] = ja - [ja]$ 意味着 a 是有理数所以

$$|\{ia\} - \{ja\}| = |(i-j)a - M| \leq \frac{1}{N} \Rightarrow \left| a - \frac{M}{j-i} \right| \leq \frac{1}{N(j-i)}$$

这里 M 是一个整数, 现在不一定有 M 与 $j-i$ 互素, 但是我们可以将其写成既约分数 $M = up, j-i = uq$, 其中 $(p, q) = 1, u \in \mathbb{N}^+$, 代入得到: 对任意正整数 N , 都存在互素的整数 p, q , 其中 $1 \leq q \leq N$ 是正整数, 使得 $\left| a - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{Nq} \leq \frac{1}{q^2}$, 这里可以要求 q 是正整数

现在还没有说明“无穷多个”, 采用反证法, 假如使得 $|a - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$ 成立的互素的整数 (p, q) 只有有限多对, 记为 $(p_1, q_1), \dots, (p_m, q_m)$, 那么 (在上面证明的结论里面) 依次取 $N = 3, 4, \dots$, 则每一个 N 都能够对应这 m 对 (p, q) 中的某一个, 而 $N = 3, 4, \dots$ 是无限的, m 是有限的, 所以必定有一个 (p_i, q_i) 对应了无穷多个正整数 N

不妨设 $i = 1$, 换句话说: 存在一列正整数 N_k 单调递增趋于正无穷, 使得 $\left| a - \frac{p_1}{q_1} \right| \leq \frac{1}{N_k q_1}$ 恒成立, 令 $k \rightarrow \infty$ 可知 $a = \frac{p}{q}$ 是有理数, 导致矛盾

而如果 $a = \frac{m}{n}$ 是有理数, 但是有无穷个互素的 (p, q) 使得 $\left| \frac{m}{n} - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$, 则当 q 充分大时, 所有这些 (p, q) 中的 p 也都会充分大 (相当于同时趋于无穷), 然而不等式等价于 $\frac{1}{q} \geq \frac{|mq - np|}{n}$, 则当 p, q 都充分大时 $mq - np \neq 0$ (不然会导致 $p|mq$ 结合互素有 $p|m$ (对充分大的 p 均成立), 显然矛盾), 于是 $\frac{1}{q} \geq \frac{|mq - np|}{n} \geq \frac{1}{n}$ 导致 q 有上界, 还是矛盾, 结论得证

□

定理 3.3.2: kronecker 逼近定理

给定无理数 θ , 则对任意 $a \in [0, 1]$ 和任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 n 使得 $|\{n\theta\} - a| < \varepsilon$.

这通常称为“非齐次逼近”, 证明起来要借用前面的结论且麻烦一些

推论 3.3.2

给定无理数 θ 和实数 a , 则对任意 $N > 0$, 均存在正整数 $n > N$ 以及整数 k 使得 $|n\theta - k - a| < \varepsilon$.

推论 3.3.3

给定无理数 θ , 则 $n\theta$ 的小数部分构成的数列在 $[0, 1]$ 中是稠密的.

证明. 反证法, 则存在 $a \in (0, 1)$ 和 $\delta > 0$ 使得任意正整数 n , $\{n\theta\}$ 都不落入区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 中, 这个区间与 $[0, 1]$ 的交集是长度至少为 δ 的区间

先找一个 n 使得 $\{n\theta\}$ 充分小, 为此将 $[0, 1]$ 等分为 N 个小区间, N 是任意一个充分大的正整数, 则根据抽屉原理 (注意无理数意味着确实是 $N + 1$ 个不同的数字), 存在 $0 \leq i < j \leq N$ 使得 $\{i\theta\}, \{j\theta\}$ 落入同一个区间中, 因此

$$|\{i\theta\} - \{j\theta\}| = |(i - j)\theta - ([i\theta] - [j\theta])| \leq \frac{1}{N}$$

这说明存在 n 使得 $\{n\theta\}$ 充分接近 0 或者充分接近 1, 于是我们只要让 $\frac{1}{N} < \delta$, 那么 $\{n\theta\} \in (0, \delta) \cup (1 - \delta, 1)$, 进而考虑 $\{n\theta\}, \{2n\theta\}, \dots$ 便显然有一个会落入区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 中, 矛盾

□

注释 3.3.1: 推论 3.3.3 最好的结果是那个数列均匀分布, 不过证明需要逼近相关的知识, 高考方法做不出来, 会在下一届讲

这个定理的证明很直观, 上课已经说了, 比如 $a = \sqrt{2}$ 你应该如何找 n 使得 na 的小数部分在 $[0.9, 1]$ 之间? 直接找不好找, 但是发现 $5\sqrt{2} = 7.071\dots$ 的小数部分大约只有 0.07, 那么考虑 $5\sqrt{2}, 10\sqrt{2}, 15\sqrt{2}, \dots$ 一直下去, 每一次跳跃的幅度都很小, 就肯定能找到你要的, 想明白这个道理, 此定理的证明也就是显然的了

例题 3.3.1 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin 4^n$ 不存在.

证明. 反证法, 如果极限存在, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin 4^n = A \in [-1, 1]$

首先证明 $A \neq 0$, 如果 $\sin 4^n \rightarrow 0$, 则存在 N 使得对任意 $n \geq N$, 都有 $4^n \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(k\pi - \frac{\pi}{8}, k\pi + \frac{\pi}{8}\right)$, 显然这是一列两两不相交的开区间的并集, 我们对应的依次记为区间 I_k , 现在设 $4^N = k\pi + \delta, |\delta| \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right)$, 显然存在唯一的正整数 i 使得 $|4^{i-1}\delta| \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right), |4^i\delta| \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right)$, 于是有

$$4^{N+1} = 4k\pi + 4\delta \in I_{4k}, \dots, 4^{N+i-1} = 4^{i-1}k\pi + 4^{i-1}\delta \in I_{4^{i-1}k}, 4^{N+i} = 4^i k\pi + 4^i \delta \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$$

这与任意 $n \geq N$ 都有 $4^n \in \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ 矛盾, 从而 A 非零

因为 $\sin 4^n \rightarrow A$ 所以 $\sin 4^{n+1} \rightarrow A$, 利用三角函数公式有

$$\sin 4^{n+1} = 2 \sin(2 \cdot 4^n) \cos(2 \cdot 4^n) = 4 \sin 4^n \cos 4^n (1 - 2 \sin^2 4^n)$$

形式上有

$$\cos 4^n = \frac{\sin 4^{n+1}}{4 \sin 4^n (1 - 2 \sin^2 4^n)}, \lim_{n \rightarrow \infty} \cos 4^n = \frac{A}{4A(1 - 2A^2)} = \frac{1}{4(1 - 2A^2)}$$

也就是说极限存在并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos 4^n = \frac{1}{4(1 - 2A^2)} = \pm \sqrt{1 - A^2}$, 但是为此需要说明分母 $1 - 2A^2 \neq 0$, 其实是显然的: 否则从 $\sin 4^{n+1} = 4 \sin 4^n \cos 4^n (1 - 2 \sin^2 4^n)$ 取极限即可得到 $\sin 4^{n+1} \rightarrow 0$ 矛盾

不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos 4^n = \sqrt{1 - A^2}$ (另一个同理) 代入极限式中可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin 4^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \sin 4^n \cos 4^n (1 - 2 \sin^2 4^n) = 4A\sqrt{1 - A^2}(1 - 2A^2) = A$$

注意 A 非零, 解方程得到 $A = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})}$, 下面说明这两个可能的取值都不成立即可根据三倍角公式有

$$\begin{aligned} \sin(3 \cdot 4^n) &= \sin(4^{n+1} - 4^n) = \sin 4^{n+1} \cos 4^n - \cos 4^{n+1} \sin 4^n = 3 \sin 4^n - 4 \sin^3 4^n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin 4^{n+1} \cos 4^n - \cos 4^{n+1} \sin 4^n) &= 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (3 \sin 4^n - 4 \sin^3 4^n) = 3A - 4A^3 \end{aligned}$$

注意 A 非零, 解方程得到 $A = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, 与前面计算出的 A 的两个可能值均不相同, 从而矛盾

□

例题 3.3.2 设 $A = \left\{ \sqrt{\frac{m}{n}} \mid m, n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \setminus \mathbb{Q}, x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$. 对 $x > 0$ 记 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 无理数}, \\ \frac{1}{q^\alpha}, & x = \frac{p}{q} \text{ 为既约分数}. \end{cases}$

证明: 1、对任何 $x \in A$, 存在常数 $M_x > 0$, 使得对任何既约分数 $\frac{p}{q}$ 都有 $\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{M_x}{q^2}$.

2、 f 在 A 中的每个点可微的充要条件是 $\alpha > 2$.

3、对任何 α , 函数 f 在 x_0 处均不可微.

证明. 1. 不妨 $(m, n) = 1$, 则对任意既约分数 $\frac{p}{q}$, 不妨 p, q 是正整数, 都有

$$\left| \sqrt{\frac{m}{n}} - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{p\sqrt{n} - q\sqrt{m}}{q\sqrt{n}} \right| = \left| \frac{p^2n - q^2m}{q\sqrt{n}(p\sqrt{n} + q\sqrt{m})} \right| \geq \frac{1}{q\sqrt{n}(p\sqrt{n} + q\sqrt{m})}$$

最后一步放缩是因为分子肯定非零, 否则与 A 中元素是无理数矛盾, 进而 $q^2 \left| \sqrt{\frac{m}{n}} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{m} + \frac{p}{q}\sqrt{n})}$,

为了找到统一的 M 我们分类讨论一下

如果 $\left| \sqrt{\frac{m}{n}} - \frac{p}{q} \right| \geq 1$ 则直接取 $M = 1$ 就可以了

如果 $\left| \sqrt{\frac{m}{n}} - \frac{p}{q} \right| < 1$, 则 $\frac{p}{q} < 1 + \sqrt{\frac{m}{n}}$ 进而

$$q^2 \left| \sqrt{\frac{m}{n}} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{m} + \frac{p}{q}\sqrt{n})} \geq \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{m} + (1 + \sqrt{\frac{m}{n}})\sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n}(2\sqrt{m} + \sqrt{n})}$$

很明显上式右端是小于 1 的, 所以 $M = \frac{1}{\sqrt{n}(2\sqrt{m} + \sqrt{n})}$ 即为所求

2. 对任意 $\sqrt{\frac{m}{n}} \in A$, 根据导数定义 $f' \left(\sqrt{\frac{m}{n}} \right) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{\frac{m}{n}}} \frac{f(x)}{x - \sqrt{\frac{m}{n}}}$, 让 x 以无理数方式趋近于 $\sqrt{\frac{m}{n}}$ 则上式恒

为零, 所以如果可导则导数必然是零, 并且可导的充要条件为 $\lim_{\frac{p}{q} \rightarrow \sqrt{\frac{m}{n}}} \frac{1}{q^\alpha \left| \frac{p}{q} - \sqrt{\frac{m}{n}} \right|} = 0$, 这里 $\frac{p}{q}$ 是既约分数

如果 $\alpha > 2$, 则根据第一问可知存在 $M > 0$ 使得 $q^\alpha \left| \frac{p}{q} - \sqrt{\frac{m}{n}} \right| \geq Mq^{\alpha-2}$ 恒成立, 注意当 $\frac{p}{q} \rightarrow \sqrt{\frac{m}{n}}$ 时 q 必定会趋于无穷, 由此可知此时可导

而如果 $\alpha \leq 2$, 我们要说明不可导, 结合前面的分析知只要证明以有理数方式趋近时 $q^\alpha \left| \frac{p}{q} - \sqrt{\frac{m}{n}} \right|$ 并非趋于正无穷, 换句话说就是要找一个既约分数子列 $\frac{p_k}{q_k} \rightarrow \sqrt{\frac{m}{n}}$ 使得 $q_k^\alpha \left| \frac{p_k}{q_k} - \sqrt{\frac{m}{n}} \right|$ 是有界的

恰好狄利克雷定理可以帮助我们实现这件事情: 由狄利克雷定理知存在无穷多对互素的正整数对 (p, q) 使得 $\left| \frac{p}{q} - \sqrt{\frac{m}{n}} \right| \leq \frac{1}{q^2}$, 因此有一列 $\frac{p_k}{q_k} \rightarrow \sqrt{\frac{m}{n}}$ 使得 $\left| \frac{p_k}{q_k} - \sqrt{\frac{m}{n}} \right| \leq \frac{1}{q_k^2}$, 进而

$$q_k^\alpha \left| \frac{p_k}{q_k} - \sqrt{\frac{m}{n}} \right| \leq q_k^2 \left| \frac{p_k}{q_k} - \sqrt{\frac{m}{n}} \right| \leq 1$$

结论得证 (这说明用该子列去计算导数, 得到的结果一定是大于等于 1 的, 而用无理数去计算导数显然是零, 二者矛盾, 故不可导)

注释 3.3.2: 这一步如果详细论证, 则应如下操作

若 $\alpha > 2$, 我们证明 $\lim_{x \rightarrow \sqrt{\frac{m}{n}}} \frac{f(x)}{x - \sqrt{\frac{m}{n}}} = 0$, 进而可导

对任意充分大的正整数 N , 在区间 $\left(\sqrt{\frac{m}{n}} - 1, \sqrt{\frac{m}{n}} + 1\right)$ 中全体分母不超过 N 的既约分数显然只有有限个, 结合 $\sqrt{\frac{m}{n}}$ 是无理数可知这些既约分数都不等于 $\sqrt{\frac{m}{n}}$, 于是存在 $\delta > 0$ 使得区间 $\left(\sqrt{\frac{m}{n}} - \delta, \sqrt{\frac{m}{n}} + \delta\right)$ 中的任一既约分数, 其分母都至少为 $N + 1$

另一方面, 根据第一问知存在 $M > 0$ 使得对任意既约分数 $\frac{p}{q}$ 都有 $\left|\frac{p}{q} - \sqrt{\frac{m}{n}}\right| \geq \frac{M}{q^2}$ 成立

从而对任意 $x \in \left(\sqrt{\frac{m}{n}} - \delta, \sqrt{\frac{m}{n}} + \delta\right)$, 如果 $x = \frac{p}{q}$ 是既约分数, 则 $q \geq N + 1$ 并且 $\left|\frac{f(x)}{x - \sqrt{\frac{m}{n}}}\right| = \frac{1}{q^\alpha \left|\frac{p}{q} - \sqrt{\frac{m}{n}}\right|} \leq \frac{1}{q^{\alpha-2}M} \leq \frac{1}{N^{\alpha-2}M}$, 而如果 x 是无理数, 则 $f(x) = 0$, 因此对任意 $x \in \left(\sqrt{\frac{m}{n}} - \delta, \sqrt{\frac{m}{n}} + \delta\right)$

都有 $\left|\frac{f(x)}{x - \sqrt{\frac{m}{n}}}\right| \leq \frac{1}{N^{\alpha-2}M}$, 根据极限定义可知可导并且导数为零

$\alpha \leq 2$ 的情况也可以类似再补充一下

3. x_0 是著名的刘维尔数, 当然是无理数, 先证明一下

反证法, 设 $x_0 = \frac{p}{q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$, 其中 p, q 是正整数且 $(p, q) = 1$, 则对任意正整数 N 有 $10^{N!}p = q \sum_{n=0}^N 10^{N!-n!} + q \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!-N!}}$, 其中左边以及右边第一项都是正整数, 所以右边第二项也是正整数, 故 $q \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!-N!}} \geq 1$

但是

$$\begin{aligned} n! - N! &= (n(n-1) \dots (N+1) - 1)N! \geq (n-1)N!, \forall n \geq N+1 \\ \Rightarrow q \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!-N!}} &\leq q \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{10^{(n-1)N!}} = q \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{1}{10^{N!}}\right)^n = q \frac{\frac{1}{10^{N \cdot N!}}}{1 - \frac{1}{10^{N!}}} \leq \frac{2q}{10^{N \cdot N!}} \end{aligned}$$

导出矛盾, 所以 x_0 是无理数, 下面证明不可导也即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x - x_0}$ 不存在

直接取

$$x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{10^{k!}} = \frac{p_n}{q_n}, q_n = 10^{n!}, p_n = 10^{n!} \sum_{k=0}^n \frac{1}{10^{k!}}, (p_n, q_n) = 1, \forall n \geq 1, x_n \rightarrow x_0$$

代入有 (如果可导)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{x - x_0} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x_n)}{x_n - x_0} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10^{\alpha \cdot n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}} = +\infty$$

最后一步是因为

$$10^{\alpha \cdot n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k! - \alpha \cdot n!}} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{(k-\alpha)n!}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

由此可知矛盾, 所以不可导

□

3.4 综合问题

例题 3.4.1 设 x_n 满足当 $|i-j| \leq 2$ 时总有 $|x_i - x_j| \geq |x_{i+1} - x_{j+1}|$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ 存在.

证明. 条件等价于 $|x_{n+1} - x_n|, |x_{n+2} - x_n|$ 这两个数列都是单调递减的, 显然非负, 所以他们的极限都存在

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$, 则由 stolz 公式显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} - x_n = 0$

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+2} - x_n| = 0$, 则奇偶两个子列分别都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{2n}}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+2} - x_{2n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{2n+1}}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} - x_{2n-1} = 0$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 0$, 因此下面只需讨论 $|x_{n+1} - x_n|, |x_{n+2} - x_n|$ 的极限都非零的情况

不妨设 $|x_{n+1} - x_n|$ 单调递减趋于 1 (如果极限不是 1 而是别的正数, 考虑 kx_n 这样的数列就可以了), 由于非负递减数列 $|x_{n+2} - x_n|$ 的极限非零, 故存在 $\delta \in (0, 1)$ 使得 $|x_{n+2} - x_n| \geq \delta$ 恒成立

如果 x_n 是最终单调的, 也就是说存在 N 使得 $n > N$ 时 $x_{n+1} - x_n$ 恒正或者恒负, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} - x_n = 1$ 或者 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} - x_n = -1$, 再用 stolz 公式可知极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ 存在

如果 x_n 不是最终单调的, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 1$, 所以存在 N 使得 $n > N$ 时恒有 $|x_{n+1} - x_n| \in \left[1, 1 + \frac{\delta}{2}\right]$, 并且 $n > N$ 时 x_n 不是单调的, 故存在 $n > N$ 使得以下两种情况之一成立

$$\begin{aligned} (a) : 1 \leq x_{n+1} - x_n \leq 1 + \frac{\delta}{2}, 1 \leq x_{n+1} - x_{n+2} \leq 1 + \frac{\delta}{2} &\Rightarrow |x_{n+2} - x_n| \leq \frac{\delta}{2} \\ (b) : 1 \leq x_n - x_{n+1} \leq 1 + \frac{\delta}{2}, 1 \leq x_{n+2} - x_{n+1} \leq 1 + \frac{\delta}{2} &\Rightarrow |x_{n+2} - x_n| \leq \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

可见不论哪种情况成立, 都会与 $|x_{n+2} - x_n| \geq \delta$ 恒成立矛盾, 结论得证

□

注释 3.4.1: 仅凭 $|x_{n+1} - x_n|$ 单调递减无法保证极限存在, 只能说明数列 $\frac{x_n}{n}$ 有界, 但是完全有可能其聚点集合是一个闭区间, 所以 $|x_{n+2} - x_n|$ 的递减性是必要的

本题其实画图来看走势很直观, 见上课视频

例题 3.4.2 设四个正数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{t_n\}$ 满足

$$t_n \in (0, 1), \sum_{n=1}^{\infty} t_n = +\infty, \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{t_n} = 0, x_{n+1} \leq (1 - t_n)x_n + a_n + b_n$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

证明. 这类问题直接强求通项即可, 根据条件有

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{(1-t_n) \dots (1-t_1)} &\leq \frac{x_n}{(1-t_{n-1}) \dots (1-t_1)} + \frac{a_n + b_n}{(1-t_n) \dots (1-t_1)} \\ \frac{x_{n+1}}{(1-t_n) \dots (1-t_1)} &\leq x_1 + \sum_{k=1}^n \frac{a_k + b_k}{(1-t_k) \dots (1-t_1)} \\ x_{n+1} &\leq x_1 (1-t_n) \dots (1-t_1) + \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) (1-t_{k+1}) \dots (1-t_n) \end{aligned}$$

换元令 $u_n = 1 - t_n \in (0, 1)$, 则

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln u_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - 1) = -\sum_{n=1}^{\infty} t_n = -\infty \Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} u_n = 0$$

代入有

$$x_{n+1} \leq x_1 u_1 u_2 \dots u_n + \sum_{k=1}^n a_k u_{k+1} u_{k+2} \dots u_n + \sum_{k=1}^n b_k u_{k+1} u_{k+2} \dots u_n$$

显然 $x_1 u_1 u_2 \dots u_n \rightarrow 0$, 于是只需要看后面两项

对于最后一项, 我们待定正整数 $N \leq n$, 则有

$$\sum_{k=1}^n b_k u_{k+1} u_{k+2} \dots u_n = \sum_{k=1}^N b_k u_{k+1} u_{k+2} \dots u_n + \sum_{k=N+1}^n b_k u_{k+1} u_{k+2} \dots u_n$$

其中 $\sum_{k=N+1}^n b_k u_{k+1} u_{k+2} \dots u_n \leq \sum_{k=N+1}^n b_k < \sum_{k=N}^{\infty} b_k$, 于是对任意 $\varepsilon > 0$, 可以取充分大的 N 使得 $\sum_{k=N+1}^n b_k u_{k+1} u_{k+2} \dots u_n < \varepsilon$, 现在 N 已经取定, 再对前面有限项取极限有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k u_{k+1} u_{k+2} \dots u_n \leq \sum_{k=1}^N b_k \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (u_{k+1} u_{k+2} \dots u_n) + \varepsilon = \varepsilon$$

由此可见最后一项的极限是零, 最后来看中间一项, 记 $s_n = \frac{a_n}{t_n} = \frac{a_n}{1 - u_n} \rightarrow 0$, 则对任意 N 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k u_{k+1} u_{k+2} \dots u_n &= \sum_{k=1}^n s_k (1 - u_k) u_{k+1} u_{k+2} \dots u_n \\ &= \sum_{k=1}^N s_k (1 - u_k) u_{k+1} u_{k+2} \dots u_n + \sum_{k=N+1}^n s_k (1 - u_k) u_{k+1} u_{k+2} \dots u_n \\ \sum_{k=N+1}^n s_k (1 - u_k) u_{k+1} u_{k+2} \dots u_n &\leq \sup_{k \geq N} s_k \sum_{k=N+1}^n (1 - u_k) u_{k+1} u_{k+2} \dots u_n \leq \sup_{k \geq N} s_k \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k u_{k+1} u_{k+2} \dots u_n &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N s_k (1 - u_k) u_{k+1} u_{k+2} \dots u_n + \sup_{k \geq N} s_k = \sup_{k \geq N} s_k \end{aligned}$$

由此可见这一部分的极限也是零, 结论得证

□

例题 3.4.3 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sup_{x \in [0,1]} \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k}$

证明. 根据对称性, 不妨设 $x \in [0, \frac{1}{2}]$, 先尝试找到最大值点

在 $x = 0, \frac{1}{2}$ 时代入, 很明显对应的极限是零, 考虑 $x \in (0, \frac{1}{2})$, 根据等比数列求和公式有

$$\sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} = (1-x)^n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{x}{1-x} \right)^k = \frac{x(1-x)}{1-2x} ((1-x)^n - x^n)$$

如果 $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ 已经取定, 则在区间 $[\delta, \frac{1}{2}]$ 中

$$n \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} \leq n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \right)^k (1-\delta)^{n-k} \leq n(1-\delta)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2(1-\delta)} \right)^k = \frac{n(1-\delta)^n}{1 - \frac{1}{2(1-\delta)}}$$

右端是指数级趋于零的并且上式不依赖于 x , 所以函数会一致趋于零

因此最大值点应该在 $x = 0$ 附近, 近似的有

$$n \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{nx(1-x)}{1-2x} ((1-x)^n - x^n) \approx nx(1-x)^n$$

取 $x = \frac{1}{n}$ 显然极限是 $\frac{1}{e}$, 我们猜测这就是答案, 下面开始证明

首先取 $x = \frac{1}{n}$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \right)^k \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 - \frac{2}{n}} \left(\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n - \left(\frac{1}{n} \right)^n \right) = \frac{1}{e}$$

由此可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sup_{x \in [0,1]} \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} \geq \frac{1}{e}$, 下面估计上极限

根据对称性, 不妨只考虑 $x \in [0, \frac{1}{2}]$, 对任意 $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ 取定, 当 $x \in [\delta, \frac{1}{2}]$ 时总有

$$n \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} \leq n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \right)^k (1-\delta)^{n-k} \leq n(1-\delta)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2(1-\delta)} \right)^k = \frac{n(1-\delta)^n}{1 - \frac{1}{2(1-\delta)}}$$

当 $x \in [0, \delta]$ 时, 结合均值不等式有

$$n \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{nx(1-x)}{1-2x} ((1-x)^n - x^n) \leq \frac{nx(1-x)^n}{1-2\delta} \leq \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}}{1-2\delta} \leq \frac{1}{e} \frac{1}{1-2\delta}$$

所以可以取 $n > N$ 充分大, 使得 $\frac{n(1-\delta)^n}{1 - \frac{1}{2(1-\delta)}} < \frac{1}{e}$, 此时便有

$$n \sup_{x \in [0,1]} \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{e} \frac{1}{1-2\delta} \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \sup_{x \in [0,1]} \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{e} \frac{1}{1-2\delta}$$

最后, 根据 δ 的任意性, 可知结论成立

□

例 3.4.4 设 $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}, n \geq 1, a_0 > 0, a_1 > 0$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$

证明. 这类线性递推数列问题采用母函数方法是无敌的, 因为能求出来通项公式

设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 则根据条件有

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1} \right) x^n \\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = a_1 + x f'(x) + f(x) - a_0 + 2x f(x) \\ \Rightarrow f'(x) + \frac{2x+1}{x-1} f(x) &= \frac{a_1 - a_0}{1-x}, f(0) = a_0, f'(0) = a_1 \end{aligned}$$

这是一阶线性微分方程, 容易求出

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6x + 5}{(1-x)^3} \frac{a_1 - a_0}{4} + \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3} \frac{9a_0 - 5a_1}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

然后对左边这两个函数 (先不看系数) 做泰勒展开, 关注 x^n 前面的 n^2 项系数, 就对应极限

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n, \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^n \\ \frac{2x^2 - 6x + 5}{(1-x)^3} &= (2x^2 - 6x + 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (5b_n - 6b_{n-1} + 2b_{n-2}) x^n \\ b_n &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \Rightarrow 5b_n - 6b_{n-1} + 2b_{n-2} = \frac{1}{2} n^2 + O(n) \end{aligned}$$

由此可见第一部分对应着极限 $\frac{a_1 - a_0}{8}$, 然后算第二部分

$$\frac{e^{-2x}}{(1-x)^3} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2)^m}{m!} x^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m+n=k} \frac{(-2)^m}{m!} \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^k$$

所以每一个 x^m 项相应的系数是

$$\sum_{k=0}^m \frac{(-2)^m}{m!} \frac{(k+2-m)(k+1-m)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m \frac{(-2)^m}{m!} (m - (k-1))(m - (k-2))$$

对应的极限为

$$\frac{1}{2} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^m \frac{(-2)^m}{m!} (m^2 - (2k-3)m + (k-1)(k-2))}{m^2} = \frac{1}{2} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{(-2)^m}{m!} = \frac{1}{2e^2}$$

这是因为括号里面的 m 一次项和常数项部分, 对应的求和的极限是零, 由 stolz 公式是显然的
所以第二部分提供了 $\frac{9a_0 - 5a_1}{8e^2}$, 最终所求极限为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \frac{a_1 - a_0}{8} + \frac{9a_0 - 5a_1}{8e^2}$

□

注释 3.4.2: 本题采用单调有界只能证明极限存在, 而并不能算出来极限值:

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{a_n}{n^2} = \frac{a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}}{(n+1)^2} - \frac{a_n}{n^2} = \frac{2n^2 a_{n-1} - (2n+1)(n+1)a_n}{n^2(n+1)^3} < 0$$

例题 3.4.5 设 $x_n > 0$, k 为正整数, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n+k}}{x_n} \geq \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}$ 且常数是最佳的.

证明. 设 $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, 采用反证法, 则存在 N 使得 $n \geq N$ 时恒成立

$$S_{n+k} \leq \lambda(S_n - S_{n-1}), \lambda \in \left[1, \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}\right)$$

显然 S_n 是单调递增的, 如果 S_n 有界, 则在不等式两端取极限可知 S_n 收敛到零, 矛盾, 所以 S_n 严格单调递增趋于正无穷, 因此对任意 $n \geq N$ 有 $S_n > S_{n-1}$

如果已经得到了 $S_n > cS_{n-1}$ 对任意 $n \geq N$ 恒成立, 这里 c 是正数, 则对任意 $n \geq N$ 有

$$\begin{aligned} S_{n+k} &> cS_{n+k-1}, S_{n+k-1} > cS_{n+k-2}, \dots, S_{n+1} > cS_n \Rightarrow S_{n+k} > c^k S_n \\ 0 < S_{n+k} - c^k S_n &\leq (\lambda - c^k) S_n - \lambda S_{n-1} \Rightarrow S_n > \frac{\lambda}{\lambda - c^k} S_{n-1} \end{aligned}$$

这样不等式就加强了, 记 $c' = \frac{\lambda}{\lambda - c^k}$, 我们得到 $S_n > c' S_{n-1}$ 对任意 $n \geq N$ 恒成立

定义数列 u_n 为 $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{\lambda}{\lambda - u_n^k}$, 则重复以上过程可知 $S_n > u_m S_{n-1}$ 对任意 m 以及 $n \geq N$ 都恒成立, 所以 u_m 这个数列必须是有界的, 下面我们就由此导出矛盾

因为 $u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow (\lambda - u_n^k) u_n < \lambda \Leftrightarrow (\lambda - u_n^k)^k u_n^k < \lambda^k$, 由均值不等式有

$$kx^k(\lambda - x^k)^k \leq \left(\frac{k\lambda}{k+1}\right)^{k+1} < k\lambda^k \Leftrightarrow \lambda < \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}$$

显然成立, 所以 u_m 单调递增, 而如果极限存在, 则极限点满足方程 $x = \frac{\lambda}{\lambda - x^k} \Leftrightarrow x(\lambda - x^k) = \lambda$, 这与前面均值不等式导出的结果矛盾, 所以 u_m 单调递增趋于正无穷, 又与有界性矛盾

综上结论得证

□

注释 3.4.3: 此类问题反证法将会带来一个恒成立的不等式, 有很强效果, 所以一般都用反证法, 证明的灵感来源于 $k=1$ 时的情况, 细节见上课视频

例 3.4.6 设 $x_n > 0, x_n \rightarrow 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_n}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = a < 0$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_n}{\ln n} = -1$.

证明. 不妨设 $a = -1$, 否则将 x_n 换成 kx_n 即可, 取 k 将 a 变成 -1

设 $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, 则 $S_n > 0$ 严格单调递增, 如果 S_n 收敛, 则 $\ln x_n \rightarrow -\infty$ 与条件矛盾, 所以 S_n 单调递增趋于正无穷

因为 $\frac{\ln x_n}{\ln n} = \frac{\ln x_n}{S_n} \frac{S_n}{\ln n}$, $\frac{\ln x_n}{S_n} \rightarrow -1$, 所以等价的只要证明 $\frac{S_n}{\ln n} \rightarrow 1$

条件为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_n}{S_n} = -1$, 设想作为等式, 对应着 $S_n - S_{n-1} = e^{-S_n}$ 是一个隐函数类型的递推式, 不方便使用, 所以考虑

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_{n+1}}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_{n+1}}{S_{n+1}} \frac{S_{n+1}}{S_n} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_{n+1}}{S_n} \right) = -1$$

现在等价的, 已知 S_n 单调递增趋于无穷且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(S_{n+1} - S_n)}{S_n} = -1$, 要证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$

由极限定义, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得任意 $n > N$ 都有 $(-1 - \varepsilon) S_n < \ln(S_{n+1} - S_n) < (-1 + \varepsilon) S_n$ 也即

$$\left(\frac{1}{e} - \varepsilon \right)^{S_n} + S_n < S_{n+1} < \left(\frac{1}{e} + \varepsilon \right)^{S_n} + S_n, \forall n \geq N$$

不妨要求 $S_N > 1$, 考虑

$$f(x) = \left(\frac{1}{e} + \varepsilon \right)^x + x, f'(x) = 1 + \left(\frac{1}{e} + \varepsilon \right)^x \ln \left(\frac{1}{e} + \varepsilon \right) > 1 - \left(\frac{1}{e} + \varepsilon \right)^x > 0$$

再定义 $u_N = S_N, u_{n+1} = \left(\frac{1}{e} + \varepsilon \right)^{u_n} + u_n$, 于是若有 $u_n \leq S_n$ 则结合单调性可知 $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(S_n) = S_{n+1}$, 这说明 $S_n \leq u_n$ 对任意 $n \geq N$ 恒成立

同样考虑

$$g(x) = \left(\frac{1}{e} - \varepsilon \right)^x + x, g'(x) = 1 - \left(\frac{1}{e} - \varepsilon \right)^x \ln \left(\frac{1}{e} - \varepsilon \right) \geq 1 - \left(\frac{1}{e} - \varepsilon \right) \ln \left(\frac{1}{e} - \varepsilon \right) > 0$$

再定义 $v_N = S_N, v_{n+1} = \left(\frac{1}{e} - \varepsilon \right)^{v_n} + v_n$, 同样道理 $S_n \geq v_n$ 恒成立, 于是 $\frac{v_n}{\ln n} \leq \frac{S_n}{\ln n} \leq \frac{u_n}{\ln n}, n \geq N$

注意 u_n, v_n 具备完全一样的形式, 所以统一的考虑 $a_1 > 1, a_{n+1} = a_n + c^{a_n}$, 其中 c 在 $\frac{1}{e}$ 附近, 显然这个数列是单调递增趋于正无穷的, 我们用 stolz 公式来计算相应的极限, 则有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\ln n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{c^{-a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c^{-a_{n+1}} - c^{-a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c^{-a_n} (c^{-(a_{n+1}-a_n)} - 1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^{a_n}}{c^{-a_n} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c^x}{e^{-c^x \ln c} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{-x \ln c} - 1} = \frac{1}{-\ln c} \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\ln n} = \frac{1}{-\ln \left(\frac{1}{e} + \varepsilon \right)} = \frac{1}{1 - \ln(1 + e\varepsilon)}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{\ln n} = \frac{1}{-\ln \left(\frac{1}{e} - \varepsilon \right)} = \frac{1}{1 - \ln(1 - e\varepsilon)}$$

这意味着

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\ln n} \leq \frac{1}{1 - \ln(1 + e\varepsilon)}, \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\ln n} \geq \frac{1}{1 - \ln(1 - e\varepsilon)}, \forall \varepsilon > 0$$

由此可知结论成立

□

3.5 练习题

习题 3.5.1 设 $a_1 = 1, a_n = \frac{na_{n-1}}{1 + na_{n-1}^2}$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

注释 3.5.1: 进一步的, 你可以尝试证明本题的加强结论 (后两问无答案, 暂未解决), 第二问若事先知道极限存在则可以轻松的证明这个极限一定是 $\frac{1}{2}$, 然而说明极限存在似乎较难

命题 3.5.1: 征解题

设 $a_1 = 1, a_n = \frac{na_{n-1}}{1 + na_{n-1}^2}$, 证明:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$; 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - a_n) = \frac{1}{2}$
3. 设 $b_n = n\left(n(1 - a_n) - \frac{1}{2}\right)$, 则 b_n 的奇子列和偶子列收敛到不同极限

习题 3.5.2 设 $x_1 = a, x_{n+1} = \frac{2x_n^3}{3x_n^2 - 1}$, 求所有 a 使得数列 $\{x_n\}$ 收敛.

习题 3.5.3 1. 设数列 x_n 满足 $0 \leq x_{m+n} \leq x_m x_n, \forall m, n \geq 1$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$ 存在

2. 设正数列 a_n 满足 $a_{m+n} \leq a_m a_n, \forall m, n \geq 1$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{\ln a_n}{n}$.

习题 3.5.4 正数列 u_n 满足 $u_{n+2} = 1 + \frac{u_{n+1}}{u_n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

习题 3.5.5 设 $a_n \geq 0$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(4a_n(1 - a_{n-1}) - 1) \leq \frac{1}{4}$.

习题 3.5.6 设 $R(x)$ 为黎曼函数, $a \in (0, 2]$, 证明: $R(x)^a$ 处处不可导.

习题 3.5.7 证明: 数列 $\sin n$ 的聚点集是 $[-1, 1]$.

习题 3.5.8 设 $a, b, c > 0$, 记 $f(x) = \sin ax + \sin bx + \sin cx$, 证明: 存在一列单调递增趋于正无穷的 t_n 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x + t_n) = f(x)$ 且这个极限过程是关于 $x \in \mathbb{R}$ 一致收敛的.

习题 3.5.9 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \max_{x \geq 0} \left| e^{-x} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \right|$.

习题 3.5.10 设 $x_1 = \frac{2}{3}, x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{2}{3n}$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

第四章 函数性态分析

这部分内容非常多，题型也很杂，因此不可能面面俱到。上课有限的时间内只能针对一些专题，挑选一部分有代表性的题讲解，所以很有必要自己课后多刷题，否则极容易出现方法技巧上的盲区（知识点上不可能有盲区，因为本来就没有什么知识点）。

本章，后面的“语文类性态分析”以及“决赛常微分方程”部分实际上无本质区别，都可以归为“函数性态分析”，但是即便三章讲义合在一起依然距离“性态分析全覆盖”很远！所以再次强调，上课这些例题以及习题是不够的，自己课后应该去刷习题书，考研竞赛题，以及各种平台上的题等等，背题目没有必要，关键是积累方法，想明白原理，自己理解吃透。

为了与后面的章节区分开，这部分我们几乎不放“语文类性态分析”以及“常微分方程”相关的题目，这些在后面专题中讲解。

下面补充几个基本常识，平时做题经常会用到，结论均易证明，所以只叙述结果：

1. 函数 $f(x)$ 如果是连续的单射，则一定严格单调；
2. $\mathbb{R}$ 上的一致连续函数一定可以被线性函数 $a|x| + b$ 控制住；
3. 单调函数的不连续点只有跳跃间断点，且几乎处处可导（数分里面无法证明这一点）

4. 凸（下凸）函数内闭 Lipschitz 连续（闭区间的话端点不一定），要么单调要么先减后增（因此什么时候取最大值最小值一目了然），单侧导数处处存在且单侧导数具备单调性，割线斜率（若可导则加上切线斜率）具备单调性，凸函数与其割线（若切线存在则加上切线）具备如图所示（自己画图）的显然的不等式关系（因此放缩时候常用），同时凸函数几乎处处二阶可导（这个难证，好像也没用到过）。

结论 1 可以用来做定性分析，也能解决不少二次复合的问题；

结论 2 可以用来判定函数不一致连续，注意逆命题是肯定不对的；

结论 3 是单调函数最重要的性质，很常用，几乎处处可导一般用不上；

结论 4 看着多实际上一句话概括下来就是几何性质，自行画图画一个凸函数，从图中你看到了什么性质，那么就成立什么性质（所以无需死记硬背），注意这里凸性的定义不依赖于可导性连续性等等，用的是数学分析课本最原始的定义。

4.1 连续函数性质与应用

例题 4.1.1 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 中一致连续, 且对任意 $x \in [0, 1]$ 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x+n) = 0$, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

证明. 根据一致连续性, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得只要 $|x - y| < \delta$, 就有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

取正整数 $N > \frac{1}{\delta}$, 将 $[0, 1]$ 区间做 N 等分, 一共有 $N+1$ 个分点, 依次记为 $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{N}, \dots, x_N = 1$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x+n) = 0$, 则对每一个确定的 $0 \leq i \leq N$, 都会存在相应的正整数 N_i 使得当 $n > N_i$ 时恒有 $|f(x_i+n)| < \varepsilon$

上述 N_i 一共是有限个, 所以存在充分大的正整数 M 使得 $n \geq M$ 时, 对每一个 $0 \leq i \leq N$ 都有 $|f(x_i+n)| < \varepsilon$, 于是当 $x \geq M+1$ 时, 对任意的 x , 我们可以寻找与它距离最近的那个分点作为过渡, 则有正整数 K 和 $0 \leq i \leq N-1$ 使得 $x \in [K + x_i, K + x_{i+1}]$

根据假设和一致连续性有 $|f(x)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k)| \leq 2\varepsilon$, 结论得证

□

例题 4.1.2 设 $f(x) \in C(\mathbb{R})$, $a, b \in (0, \frac{1}{2})$, 对任意实数 x 都满足 $f(f(x)) = af(x) + bx$, 求 $f(x)$.

证明. 如果 $f(x) = f(y)$, 两边 f 一次代入条件即有 $x = y$, 所以 $f(x)$ 是单射

因为连续的单射一定严格单调, 所以 $f(x)$ 严格递增或递减, 相应的极限也一定存在

如果 $f(+\infty) = A$ 为有限数, 那么代入条件有 $bx \rightarrow \infty$ 但是 $f(f(x)) - ax \rightarrow f(A) - aA$ 是矛盾的, 从而 $f(x)$ 在正负无穷处的极限, 必然一个正无穷, 一个负无穷, 也即 f 是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的双射

用 $g_n(x)$ 表示 $f(x)$ 的 n 次复合 $f(\dots f(x) \dots)$, 其中 $g_0(x) = x, g_1(x) = f(x)$, 则根据条件反复迭代有

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= af(x) + bx, f(f(f(x))) = af(f(x)) + bf(x), \dots \\ \Rightarrow g_2(x) &= ag_1(x) + bx, g_{n+2}(x) = ag_{n+1}(x) + bg_n(x) \end{aligned}$$

这是二阶线性递推, 求通项得到

$$g_n(x) = c_1(x) \lambda_1^n + c_2(x) \lambda_2^n, \lambda_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}, \lambda_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

根据条件 $0 < a, b < \frac{1}{2}$ 可知 $-1 < \lambda_1 < 0 < \lambda_2 < 1, |\lambda_2| > |\lambda_1|$, 代入初值求出来

$$g_n(x) = \frac{(\lambda_2 x - f(x)) \lambda_1^n + (f(x) - \lambda_1 x) \lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1}, \forall x, n$$

下面分类讨论, 如果 $f(x)$ 递减, 则 $g_{2n}(x)$ 递增, $g_{2n+1}(x)$ 递减

移项后对 n 求极限有 (注意 $\lambda_2 > |\lambda_1|$)

$$\begin{aligned} f(x) - \lambda_1 x &= \frac{g_n(x)(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2^n} - (\lambda_2 x - f(x)) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{g_n(x)(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2^n} - (\lambda_2 x - f(x)) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_n(x)(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2^n} \end{aligned}$$

我们让 n 取奇数并趋于无穷, 从每一项都是递减的可以看出 $f(x) - \lambda_1 x$ 递减, 再让 n 取偶数趋于无穷, 则 $f(x) - \lambda_1 x$ 是递增的, 于是 $f(x) = \lambda_1 x + C$, 将其直接代入到条件 $f(f(x)) = af(x) + bx$ 中有

$$f(f(x)) = f(\lambda_1 x + C) = \lambda_1(\lambda_1 x + C) + C = a(\lambda_1 x + C) + bx \Rightarrow C(\lambda_1 + 1 - a) = 0$$

如果 $C \neq 0$ 则 $\lambda_1 = a - 1$ 也即 $a - 1$ 是方程 $x^2 - ax - b = 0$ 的一个根, 代入得到 $a + b = 1$ 与条件 $a, b \in (0, \frac{1}{2})$ 矛盾, 所以 $C = 0$, 对应的 $f(x) = \lambda_1 x$

如果 $f(x)$ 递增, 则 $g_n(x)$ 递增, 为了做类似的操作, 我们需要说明

$$g_n(x) = \frac{(\lambda_2 x - f(x)) \lambda_1^n + (f(x) - \lambda_1 x) \lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

对于一切负整数 n 也是成立的, 事实上 $f(x)$ 严格递增, 所以反函数 $f^{-1}(x)$ 存在, 因而 n 取负整数时 $g_n(x)$ 自然定义为 $f^{-1}(x)$ 的 n 次迭代, 结合条件容易说明上式对一切整数 n 都成立

类似的有

$$\begin{aligned} \lambda_2 x - f(x) &= \frac{g_n(x)(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1^n} - (f(x) - \lambda_1 x) \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(\frac{g_n(x)(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1^n} - (f(x) - \lambda_1 x) \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \right) = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{g_n(x)(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1^n} \end{aligned}$$

注意 λ_1^n 是正负交替的, 而 $g_n(x)$ 总是递增的, 于是让 n 分别取奇数和偶数趋于无穷, 可以得到 $\lambda_2 x - f(x)$ 既递增又递减, 故为常值函数

所以 $f(x) = \lambda_2 x + C$, 将其代入到已知条件中同理可得 $f(x) = \lambda_2 x$, 综上, $f(x) = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2} x$

□

例题 4.1.3 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上, 有下界, 并且对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$ 和任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时都有 $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$, 证明: 存在 $u \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x) \geq f(u) - |x - u|$ 恒成立.

证明. 先分析一下 u 应该取什么样的点, 注意这个条件比连续还要弱, 而目标是说明 $f(x)$ 可以一直在一条折线上方, 并且还有一个公共点 $(u, f(u))$, 假如 u 不是极值点, 那么不要说整个实轴, 就连 u 附近很小的邻域内都没有道理成立这样的不等式, 因为我们根本无法控制函数的变化速度, 它完全可以迅速减小, 故要找的点必须是极值点

如果最小值存在当然就可以了, 而最小值不存在时候, 光有极值点作为约束还不够, 因为这只能保证局部成立不等式无法得到全局, 所以还需要加条件, 关注 $f(x)$ 位于这条折线下方的部分

简单的语文容易依次得到: 紧集上的下半连续函数一定有下界, 并且有最小值, 对于下半连续函数 $f(x)$ 来说, 集合 $\{x | f(x) \leq c\}$ 一定是闭集, 这里 c 是任意的实数, 集合通常称为“下水平集”.

显然连续函数是下半连续的也是上半连续的, 两个下半连续函数相加还是下半连续的, 以上性质会用到

不妨设 $f(x)$ 的下确界是零, 如果存在一点 u 使得 $f(u) = 0$, 那么 u 显然为所求, 以下考虑 $f(x)$ 恒正的情况

任取一点 x_0 , 考虑相应的折线 $L_0(x) = f(x_0) - |x - x_0|$, 则 $f(x_0) = L_0(x_0)$, $f(x)$ 当然不一定总在 $L(x)$ 上方, 设 $L(x)$ 与 x 轴的两个交点的横坐标为 A, B 且 $A < B$, 在线段 AB 之外显然 $f(x) > 0, L(x) \leq 0$ 所以 $f(x)$ 总在 $L(x)$ 上方, 现在关注线段 AB

考虑集合 $E = \{x | f(x) \leq L_0(x)\}$, 显然 $x_0 \in E$ 所以集合非空, 则前面的分析表明 $E \subset [A, B]$ 是有界集合, 根据下半连续函数的性质可知 E 是闭集, 从而 E 是紧集, $f(x)$ 在 E 上会有最小值, 记为 $f(u) = \min_{x \in E} f(x)$, 相应的考虑折线 $L(x) = f(u) - |x - u|$, 则画图可知 $L(x)$ 完全位于 $L_0(x)$ 下方, 并且满足条件

下面证明一下, 当 $x \in E$ 时因为 u 是最小值点, 所以 $f(x) \geq f(u) \geq f(u) - |x - u|$, 而 $x \notin E$ 时根据定义 $f(x) \geq L_0(x)$, 说明 $L_0(x)$ 在 $L(x)$ 上方即可

由于

$$L_0(x) \geq L(x) \Leftrightarrow f(u) \leq f(x_0) - (|x - x_0| - |x - u|)$$

绝对值不等式表明 $|x - x_0| - |x - u| \leq |x_0 - u|$, 所以只需说明 $f(u) \leq f(x_0) - |x_0 - u| = L_0(u)$, 根据 $u \in E$ 可知结论成立, 得证

□

注释 4.1.1: 条件中的这个定义是函数连续性定义的“左边那一半”, 因此这样的函数称为下半连续函数, 自然的它就只具备连续函数一半的性质

从证明过程可见, 右端的 $|x - u|$ 完全可以换成别的函数, 只要在一个点取值零, 非负, 并且 $x \rightarrow \infty$ 时函数趋于正无穷, 基本上就可以

4.2 微分不等式问题

例 4.2.1 设可导函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$, 并且当 $|f(x)| \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时总是成立 $|f'(x)| \leq |f(x)| |\ln |f(x)||$, 证明: $f(x)$ 恒为零.

证明. 反证法, 则存在一点 $x_0 \neq 0$ 使得 $f(x_0) \neq 0$, 不妨设 $x_0 > 0$ 并且 $f(x_0) > 0$, 根据连续性, $f(x)$ 在 $x = x_0$ 附近都恒正, 考虑 $x = x_0$ 附近的 $f(x)$ 恒正的最大区间, 注意 $f(0) = 0$, 所以这个区间向左最多到 $x = 0$, 于是存在 $t_1 \in [0, x_0)$ 使得 $f(x)$ 在开区间 (t_1, x_0) 中恒正, 并且 $f(t_1) = 0$

注意条件的不等式成立需要 $|f(x)| \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 而 $|f(x_0)|$ 未必在这个范围内, 但是根据连续性可知存在 $t_2 \in (t_1, x_0)$ 使得 $f(x)$ 在区间 (t_1, t_2) 中恒成立 $f(x) \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 并且 $f(t_1) = 0$, 不妨再要求 $t_2 - t_1 < 1$

现在我们在开区间 (t_1, t_2) 中考虑问题, 设 $g(x) = \ln f^2(x)$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow t_1^+} g(x) = -\infty, g(x) \in \left(-\infty, \ln \frac{1}{4}\right), g'(x) = 2 \frac{f'(x)}{f(x)}$$

根据条件有

$$|g'(x)| = 2 \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \leq 2 |\ln |f(x)|| = |\ln f^2(x)| = |g(x)|$$

再令 $h(x) = \ln g^2(x)$, 根据条件可知

$$\lim_{x \rightarrow t_1^+} h(x) = +\infty, h'(x) = 2 \frac{g'(x)}{g(x)} \Rightarrow |h'(x)| = 2 \left| \frac{g'(x)}{g(x)} \right| \leq 2$$

取 $x_1 = \frac{t_1 + t_2}{2} \in (t_1, t_2)$, 则 $h(x_1)$ 是一个确定的数字, 因为 $\lim_{x \rightarrow t_1^+} h(x) = +\infty$, 所以存在 $x_2 \in (t_1, t_2)$ 使得 $h(x_2) - h(x_1) > 3$, 但是根据拉格朗日中值定理可知

$$|h(x_2) - h(x_1)| = |h'(\xi)| |x_2 - x_1| \leq |h'(\xi)| \leq 2$$

这就导出了矛盾, 所以 $f(x)$ 恒为零

□

注释 4.2.1: 对于绝对值的情况, 直接平方就能去掉绝对值符号, 我们可以先形式推导一下, 假装条件恒成立

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln f^2(x), g(0) = -\infty, g'(x) = 2 \frac{f'(x)}{f(x)} \\ |g'(x)| &= 2 \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \leq 2 |\ln |f(x)|| = |\ln f^2(x)| = |g(x)| \\ h(x) &= \ln g^2(x), h(0) = +\infty, h'(x) = 2 \frac{g'(x)}{g(x)} \\ \Rightarrow |h'(x)| &= 2 \left| \frac{g'(x)}{g(x)} \right| \leq 2 \end{aligned}$$

这式子看着就不对劲, $h(x)$ 导数不超过 2 于是它可以被 $\pm 2x$ 控制住, 并且 $h(0) = +\infty$, 矛盾产生, 将上述想法严格化即可

例题 4.2.2 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 中二阶可导, 常数 $C > 0$ 使得 $|f''(x)| \leq C|f'(x)|$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^x} = 1$, 证明:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{e^x} = 1$.

证明. 首先确定导数正负问题, 显然存在 $A > 0$ 使得 $f'(A) > 0$, 考虑 A 右端导数恒正的最大区间 (取上确界即可), 如果不是正无穷, 那么存在 $B > A$ 使得 $f'(B) = 0$, 条件表明区间 (A, B) 内 $g(x) = \ln f'(x)$ 的导数是有界的, 而 $g(B^-) = -\infty$ 显然矛盾, 也就是说存在 M 使得任意 $x \geq M$ 都有 $f'(x) > 0$

以下设 $x \geq M$, 条件表明 $\frac{f'(x)}{e^{Cx}}$ 递减, $f'(x)e^{Cx}$ 递增, 要证明的是 $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{e^x} \leq 1$, $\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{e^x} \geq 1$, 下面证明第一个式子 (另一个同理)

采用反证法, 则存在 $\delta > 0$ 和一系列单调递增趋于正无穷的 $x_n > M$, 满足 $x_{n+1} - x_n > 1$ 且 $f'(x_n) \geq (1 + \delta)e^{x_n}$ 任意取定 $t_0 \in (0, 1)$, 因为 $f'(x)e^{Cx}$ 单调递增, 所以

$$f'(x_n + t)e^{C(x_n + t)} \geq f'(x_n)e^{Cx_n} \Rightarrow f'(x_n + t) \geq f'(x_n)e^{-Ct} \geq (1 + \delta)e^{x_n}e^{-Ct_0}, \forall t \in [0, t_0], \forall n \geq 1$$

两边积分得到

$$f(x_n + t_0) - f(x_n) \geq (1 + \delta)t_0 e^{x_n} e^{-Ct_0} \Rightarrow \frac{f(x_n + t_0)}{e^{x_n + t_0}} \geq \frac{\frac{f(x_n)}{e^{x_n}} + (1 + \delta)t_0 e^{-Ct_0}}{e^{t_0}}, \forall n \geq 1$$

注意条件 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^x} = 1$ 并且 x_n 趋于正无穷, 因此上面的不等式中令 $n \rightarrow \infty$ 便有

$$1 \geq \frac{1 + (1 + \delta)t_0 e^{-Ct_0}}{e^{t_0}} \Rightarrow 1 - e^{t_0} + (1 + \delta)t_0 e^{-Ct_0} \leq 0$$

考虑函数 $p(t) = 1 - e^t + (1 + \delta)te^{-Ct}$, 则前面的推导表明, 对任意 $t_0 \in (0, 1)$ 都有 $p(t_0) \leq 0$, 显然 $p(0) = 0$, 于是 $p(t) \leq 0$ 在 $[0, 1]$ 中恒成立, 所以 $p'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p(t)}{t} \leq 0$, 但是将 $p(t)$ 的表达式代入便有 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p(t)}{t} = \delta > 0$, 矛盾, 结论得证

□

注释 4.2.2: 本题其实很直观, 上极限大于 1 时候导数会在一些点过大, 那么根据函数的极限可知导数不能一直很大, 要赶紧减小, 可惜条件还给了一个控制二阶导的不等式, 限制了导数的变化速度 (也对应着我们说的 $f'(x)e^{Cx}$ 单调性), 这就会引发矛盾

本方法是通用方法, 基本无敌, 可以当做模板记住

例题 4.2.3 设 $f(x)$ 恒正且可导, $g(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) > -1$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x + xg(x))}{f(x)}$.

证明. 设 $h(x) = g(x) + 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = A > 0$, 因此存在 M_0 和 $A_0 \in (0, 1)$ 使得 $x > M_0$ 时恒有 $h(x) > A_0$

根据条件, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 M_1 使得 $x > M_1$ 时恒有 $\left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right| < \varepsilon$, 也即

$$-\varepsilon (\ln x)' < (\ln f(x))' < \varepsilon (\ln x)', \forall x > M_1$$

所以 $\left(\ln \frac{f(x)}{x^\varepsilon} \right)' < 0$, $(\ln f(x)x^\varepsilon)' > 0$, 因此 $x > M_1$ 时 $\frac{f(x)}{x^\varepsilon}$ 单调递减, $f(x)x^\varepsilon$ 单调递增

记 $M = \max\left(M_0, \frac{M_1}{A_0}\right)$, 则当 $x > M$ 时 $h(x) > A_0$, 进而 $xh(x) > A_0x > A_0M > M_1$, 根据单调性有

$$\begin{aligned} xh(x) > A_0x &\Rightarrow \frac{f(xh(x))}{(xh(x))^\varepsilon} < \frac{f(A_0x)}{(A_0x)^\varepsilon} \Rightarrow f(xh(x)) < f(A_0x) \left(\frac{h(x)}{A_0} \right)^\varepsilon \\ xh(x) > A_0x &\Rightarrow f(xh(x))(xh(x))^\varepsilon > f(A_0x)(A_0x)^\varepsilon \Rightarrow f(xh(x)) > f(A_0x) \left(\frac{A_0}{h(x)} \right)^\varepsilon \\ A_0x < x &\Rightarrow \frac{f(A_0x)}{(A_0x)^\varepsilon} > \frac{f(x)}{x^\varepsilon} \Rightarrow f(A_0x) > f(x) A_0^\varepsilon \\ A_0x < x &\Rightarrow f(A_0x)(A_0x)^\varepsilon < f(x)x^\varepsilon \Rightarrow f(A_0x) < \frac{f(x)}{A_0^\varepsilon} \end{aligned}$$

因此, 对任意 $x > M$ 都成立

$$f(x) \left(\frac{A_0^2}{h(x)} \right)^\varepsilon < f(A_0x) \left(\frac{A_0}{h(x)} \right)^\varepsilon < f(xh(x)) < f(A_0x) \left(\frac{h(x)}{A_0} \right)^\varepsilon < f(x) \left(\frac{h(x)}{A_0^2} \right)^\varepsilon$$

注意 $h(x) \rightarrow A$, 取上下极限得到

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(xh(x))}{f(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{h(x)}{A_0^2} \right)^\varepsilon = \left(\frac{A}{A_0^2} \right)^\varepsilon, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(xh(x))}{f(x)} \geq \underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{A_0^2}{h(x)} \right)^\varepsilon = \left(\frac{A_0^2}{A^2} \right)^\varepsilon$$

由 ε 的任意性, 令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 可知所求的极限是 1

□

4.3 各类导数问题

命题 4.3.1: Dini 导数

对函数 $f(x)$, 定义它的四个 Dini 导数如下:

$$\begin{aligned} D^+ f(x_0) &= \overline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, D_+ f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ D^- f(x_0) &= \overline{\lim}_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, D_- f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned}$$

它们依次称为右上导数, 右下导数, 左上导数, 左下导数, 则具备性质:

1. 设 $f(x) \in C[0, 1]$ 且任意 $x \in (0, 1)$ 有 $D^+ f(x) > 0$, 则 $f(x)$ 严格单调递增;
2. 设 $f(x) \in C[0, 1]$ 且任意 $x \in (0, 1)$ 有 $D^+ f(x) \geq 0$, 则 $f(x)$ 单调递增.

证明. 1. 方法一: 不妨设 $f(0) = 0$, 只需证明 $f(1) > 0$, 采用反证法, 设 $f(1) \leq 0$

如果 $f(1) < 0$, 则任取 $c \in (f(1), 0)$ 并设 $f(x_0) = c, x_0 \in (0, 1)$, 根据条件有

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0, f(x_0) > f(1)$$

所以 $f(x)$ 在区间 $[x_0, 1]$ 中的最大值一定在某个内点 x_1 处取到, 则 $D^+ f(x_1) \leq 0$ 矛盾

如果 $f(1) = 0$, 显然 $f(x)$ 不恒为零, 则要么 $f(x)$ 有正的最大值 $f(a) = M$, 要么有负的最小值 $f(b) = -M$, 对于前者, 考虑区间 $[a, 1]$, 对于后者则考虑区间 $[0, b]$, 在对应的区间内 $f(x)$ 均满足上一种情况的条件, 所以由前面的讨论可知矛盾, 因此严格递增得证

方法二: 对任意 $x, y \in (0, 1), x < y$, 如果 $f(x) \geq f(y)$, 则根据 $\overline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$ 可知函数 $f(t)$ 一定在区间 $[x, y]$ 的某个内点 x_0 处取到最大值, 那么最大值点必有 $D^+ f(x_0) \leq 0$, 矛盾

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内严格单调递增, 而 $f(x)$ 是连续函数, 故在 $[0, 1]$ 内严格单调递增

2. 只需证明 $f(0) \geq f(1)$, 反证法, 如果 $f(0) < f(1)$, 则考虑 $g(x) = f(x) + \varepsilon x$, 这里 $\varepsilon > 0$ 是充分小的正数, 使得 $g(0) > g(1)$, 则此时有 $D^+ g(x) > 0$ 恒成立, 由第一问可知 $g(x)$ 严格单调递增, 矛盾

□

注释 4.3.1: 由此可知将命题 1, 2 中的 $D^+ f(x)$ 换成 $D_+ f(x)$, 相应的结论也成立, 并且如果 $D^+ f(x), D_+ f(x)$ 中有一个恒为零, 则 $f(x)$ 是常值函数, 进一步能够立即得到 Dini 导数的罗尔中值定理、拉格朗日中值定理以及达布中值定理 (介值性), 同时还会发现 Dini 导数能用来判断凹凸性, 均为平凡推论, 因此本质结果只有以上两个 (注意, 连续性是必要的)。

容易看出, $D^+ f(x) > 0$ 恒成立, 意味着对任何闭区间 $[a, b] \subset [0, 1]$, $f(x)$ 都只能在端点取到最大值 (内点不能取最大值, 相当于强极值原理)

命题 4.3.2: 施瓦茨导数

对函数 $f(x)$, 定义其施瓦茨导数为 $f^s(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$, 则有

1. 设 $f(x) \in C[0,1]$ 且对任意 $x \in (0,1)$ 有 $f^s(x) > 0$, 则 $f(x)$ 严格单调递增;
2. 设 $f(x) \in C[0,1]$ 且对任意 $x \in (0,1)$ 有 $f^s(x) \geq 0$, 则 $f(x)$ 单调递增;
3. 前两个命题的条件都可以弱化, 相应的修改为 $\liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$.
4. 设 $f(x) \in C[0,1]$ 且 $f^s(x) \in C(0,1)$, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 中可导且 $f'(x) = f^s(x)$.

证明. 我们直接在 3 的假设之下解决前两问, 也就是说将极限条件弱化为下极限

1. 只需证明 $f(0) < f(1)$, 采用反证法

如果 $f(0) > f(1)$, 则任取 $c \in (f(1), f(0))$ 并考虑 $x_0 = \sup \{x \in [0,1] | f(x) > c\}$, 则由连续性可知 $x_0 \in (0,1)$ 不是端点, 根据上确界的定义知存在一列 $h_n > 0, h_n \rightarrow 0$ 使得 $f(x_0 - h_n) > c, f(x_0 + h_n) \leq c$, 所以

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0 - h_n)}{2h_n} \leq 0 \Rightarrow \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \leq 0$$

导致矛盾

如果 $f(0) = f(1)$, 则 $f(x)$ 不可能是常值函数, 分类讨论, 若存在 $x_0 \in (0,1)$ 使得 $f(x_0) > f(0)$, 则考虑区间 $[x_0, 1]$, 而若存在 $x_0 \in (0,1)$ 使得 $f(x_0) < f(0)$, 则考虑区间 $[0, x_0]$, 相应的都满足第一种情况的条件, 于是由前面的讨论可知矛盾, 因此结论得证

2. 只需证明 $f(1) \geq f(0)$, 反证法, 如果 $f(1) < f(0)$ 则考虑 $g(x) = f(x) + \varepsilon x$, 这里 $\varepsilon > 0$ 是充分小的正数, 使得 $g(0) > g(1)$, 则此时有 $g^s(x) > 0$ 恒成立, 由第一问可知 $g(x)$ 严格单调递增, 矛盾

4. 根据 1 可得施瓦茨导数的拉格朗日中值定理:

引理 4.3.1: 设 $f(x) \in C[a,b]$ 且对任意 $x_0 \in (a,b)$, 极限 $f^s(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ 都存在, 则存在 $u, v \in (a,b)$ 使得 $f^s(u) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq f^s(v)$

引理的证明很简单, 只需要减去线性函数, 不妨设 $f(a) = f(b) = 0$, 然后反证法, 假如 $f^s(x) > 0$ 恒成立, 由 1 的结论可知 $f(b) > f(a)$, 矛盾, 另一个同理

回到原问题, 因为 $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, 根据中值定理有

$$f^s(x_0 + u_h) \leq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq f^s(x_0 + v_h), u_h, v_h \text{ 介于 } 0 \text{ 和 } h \text{ 之间}$$

令 $h \rightarrow 0$ 根据 $f^s(x)$ 的连续性可知, 左右极限都存在且都等于 $f^s(x_0)$, 因此 $f(x)$ 可导且 $f'(x) = f^s(x)$

□

注释 4.3.2: 与 Dini 导数完全类似, 从前面的 1,2 结果可以立即建立施瓦茨导数的罗尔中值定理、拉格朗日中值定理以及达布中值定理, 并且施瓦茨导数恒为零能够推出常值函数, 不过前两条似乎只能弱化到下极限, 改成上极限未必正确。

例题 4.3.1 设 $f(x), \varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = \varphi(x)$, 证明: $f(x)$ 有二阶连续导数.

证明. 先考虑 $\varphi(x) = 0$ 的情况, 我们证明此时 $f(x)$ 是线性函数, 注意线性函数 $l(x)$ 显然满足对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{l(x+h) + l(x-h) - 2l(x)}{h^2} = 0$, 所以 (否则减去一个线性函数) 不妨设 $f(0) = f(1) = 0$, 只需证明 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 区间内恒为零

反证法, 不妨设 $f(x)$ 有正的最大值 $f(x_0) = M > 0, x_0 \in (0, 1)$, 则考虑 $g(x) = f(x) + \varepsilon x(x-1)$, 可以取 $\varepsilon > 0$ 为充分小的正数使得 $g(x_0) > 0$, 根据条件, 显然 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) + g(x-h) - 2g(x)}{h^2} = 2\varepsilon > 0$ 恒成立

注意 $g(0) = g(1) = 0$, 则 $g(x)$ 在 $x_1 \in (0, 1)$ 取到最大值, 那么 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_1+h) + g(x_1-h) - 2g(x_1)}{h^2} \leq 0$ 矛盾
对于一般情况, 取 $F(x)$ 使得 $F''(x) = \varphi(x)$, 考虑 $f(x) - F(x)$ 再用前面结论可知成立

□

注释 4.3.3: 本题那个极限是二阶施瓦茨导数, 具备判断凹凸性的功能, 其证明蕴含在上述过程中

结论 4.3.1: 二阶施瓦茨导数

对函数 $f(x)$, 定义其二阶施瓦茨导数为 $f^{[2]}(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$, 则有

1. 设 $f(x) \in C[0, 1]$ 且对任意 $x \in (0, 1)$ 有 $f^{[2]}(x) > 0$, 则 $f(x)$ 严格下凸;
2. 设 $f(x) \in C[0, 1]$ 且对任意 $x \in (0, 1)$ 有 $f^{[2]}(x) \geq 0$, 则 $f(x)$ 下凸;

例题 4.3.2 设 $f(x) \in C(\mathbb{R})$ 且对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \int_{-h}^h t f(x+t) dt = 0$, 证明: $f(x)$ 是常值函数.

证明. 分析一下, 将题干中的那个极限视为某种导数, 和前面几个题目一样, 我们尝试去论证, 如果这个极限恒正那么函数严格单调递增; 如果这个极限恒非负那么函数单调递增, 这样原题作为推论就自动成立了

接下来设 $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ 分部积分, 将被积函数的 t 干掉, 相应的函数单调性就等价于变限积分的凹凸性, 于是需要建立如下命题, 注意变限积分本来是 C^1 的, 而以下结论只要连续即可 (更强), 详细分析过程见上课视频

引理 4.3.2: 对函数 $f(x)$, 定义

$$F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \left(f(x+h) + f(x-h) - \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) + f(x-t) dt \right)$$

1. 设 $f(x) \in C[0, 1]$ 且对任意 $x \in (0, 1)$ 有 $F(x) > 0$, 则 $f(x)$ 严格下凸;
2. 设 $f(x) \in C[0, 1]$ 且对任意 $x \in (0, 1)$ 有 $F(x) \geq 0$, 则 $f(x)$ 下凸;

注意一次函数代入进去之后, 对应的 $F(x)$ 显然恒为零, 因此不妨设 $f(0) = f(1) = 0$, 只要证明 $f(x) < 0$ 对任意 $x \in (0, 1)$ 恒成立, 也就是论证最大值必定不在内点取到 (类似强极值原理)

反证法, 设 $f(x)$ 在 $x_0 \in (0, 1)$ 内点取最大值, 则考虑 $u(t) = f(x_0+t) + f(x_0-t)$, 那么 $u(t)$ 是定义在 $t=0$ 的小邻域 $[-\delta, \delta]$ 内函数, 并且在 $t=0$ 处取到最大值, 条件表明

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^2} \left(u(h) - \frac{1}{h} \int_0^h u(t) dt \right) > 0$$

注意括号里面的东西长得像导数, 因此考虑 $v(x) = \frac{1}{x} \int_0^x u(t) dt, v(0) = u(0)$

则 $v(0)$ 是 $v(x)$ 在 $[-\delta, \delta]$ 内的最大值, 并且是连续函数, 同时在 $x \neq 0$ 时 $v(x)$ 都是可导的, 那么取一系列 $h_n \rightarrow 0^+$, 在区间 $[0, h_n]$ 中使用拉格朗日中值定理便有 $v'(\xi_n) = \frac{v(h_n) - v(0)}{h_n} \leq 0, \xi_n \rightarrow 0$

而前面的条件表明

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{v'(h)}{h} > 0, v'(x) = \frac{xu(x) - \int_0^x u(t) dt}{x^2}$$

两个式子显然是矛盾的, 引理第一点得证, 至于第二点用二次函数扰动即可

推论 4.3.1: Lanczos 导数

对函数 $f(x)$, 定义其 Lanczos 导数为 $D_h(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \int_{-h}^h t f(x+t) dt$, 则有

1. 设 $f(x) \in C[0, 1]$ 且对任意 $x \in (0, 1)$ 都有 $D_h(x) > 0$, 则 $f(x)$ 严格单调递增;
2. 设 $f(x) \in C[0, 1]$ 且对任意 $x \in (0, 1)$ 都有 $D_h(x) \geq 0$, 则 $f(x)$ 单调递增;

考虑 $g(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则由连续性知 $g'(x) = f(x)$, 分部积分有

$$\int_{-h}^h t f(x+t) dt = \int_{-h}^h t dg(x+t) = h(g(x+h) + g(x-h)) - \int_0^h g(x+t) + g(x-t) dt$$

由此可见上述引理能立即得到本推论, 进而原题得证, 同时我们还给出了若干加强与推广

□

4.4 单调函数与凸函数

例题 4.4.1 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上递减, 记 $S(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ 若 $f(x) + f(1-x)$ 是上凸函数, 证明: $S(n)$ 关于 n 递增.

证明. 设 $g(x) = \frac{f(x) + f(1-x)}{2}$, 则 $g(x)$ 上凸

因为

$$0 \leq \frac{k-1}{n} < \frac{k}{n+1} < \frac{k}{n} \leq 1, k = 1, 2, \dots, n$$

所以

$$g\left(\frac{k}{n+1}\right) \geq \frac{k}{n+1}g\left(\frac{k-1}{n}\right) + \frac{n+1-k}{n+1}g\left(\frac{k}{n}\right), k = 1, 2, \dots, n$$

把上面这 n 个不等式加起来, 得到

$$\begin{aligned} (n+1) \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n+1}\right) &\geq \sum_{k=1}^n kg\left(\frac{k-1}{n}\right) + \sum_{k=1}^n (n+1-k)g\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)g\left(\frac{k}{n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} (n+1-k)g\left(\frac{k}{n}\right) + g(0) + g(1) \\ &= (n+2) \left(g\left(\frac{1}{n}\right) + g\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + g\left(\frac{n-1}{n}\right) \right) + 2g(0) \end{aligned}$$

利用这个结果, 则

$$\begin{aligned} S(n+1) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} f\left(\frac{k}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} f(1) \\ &\geq \frac{1}{(n+1)^2} \left((n+2) \sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) + 2g(0) \right) + \frac{1}{n+1} f(1) \\ &= \frac{n+2}{(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{2}{(n+1)^2} g(0) + \frac{1}{n+1} f(1) \\ &= \frac{n+2}{(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} (f(0) + f(1)) + \frac{1}{n+1} f(1) \\ &= \frac{n+2}{(n+1)^2} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} f(0) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} S(n+1) &\geq S(n) \\ &\Leftrightarrow \frac{n+2}{(n+1)^2} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} f(0) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{n} - \frac{n+2}{(n+1)^2} \right) \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{(n+1)^2} f(0) \\ &\Leftrightarrow nf(0) \geq f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f(1) \end{aligned}$$

最后这个式子显然成立 (因为 $f(x)$ 是递减的), 这就证明了 $S(n)$ 关于 n 递增

□

例题 4.4.2 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的凸函数, 且 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 成立 $f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) \leq y^2$. 证明: f 可导且 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 成立 $|f'(x) - f'(y)| \leq |x - y|$.

证明. 因为 $f(x)$ 是下凸函数, 所以单侧导数处处存在, 并且 $f'_+(x) \geq f'_-(x)$, 条件表明

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{y} \leq \frac{f(x) - f(x-y)}{y} + y, \forall y > 0$$

令 $y \rightarrow 0^+$ 可得反向的不等式, 于是 $f'_+(x) = f'_-(x)$ 恒成立, 故 $f(x)$ 可导

根据凸函数性质, $f'(x)$ 单调递增, 则对任意 $x < y$ 需要证明 $f'(y) - f'(x) \leq y - x$, 也就是证明 $f'(x) - x$ 单调递减

考虑函数 $F(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$, 则只要证明 $F(x)$ 上凸, 将 $f(x) = F(x) + \frac{x^2}{2}$ 代入条件, 可得

$$F(x+y) + F(x-y) - 2F(x) + \frac{1}{2} \left((x+y)^2 + (x-y)^2 - 2x^2 \right) \leq y^2$$

所以 $F(x) \geq \frac{F(x+y) + F(x-y)}{2}$ 恒成立, 也即 $F(x)$ 是中点上凸的, 显然 $F(x)$ 连续

下面证明中点凸能够推出来凸性, 这需要借助连续性 (或其他条件, 可以弱化, 但是不能没有)

证明凸性只需证明 $F(x)$ 恒在割线的上方, 任取三个点 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2)), C(x_3, f(x_3))$, 这里 $x_1 < x_2 < x_3$, 记 $l(x)$ 是直线 AC , 则需要证明 $f(x_2) \geq l(x_2)$

反证法, 考虑 $g(x) = F(x) - l(x)$, 则 $g(x_1) = g(x_3) = 0, g(x_2) < 0$ 并且 $g(x)$ 也是中点上凸的, 因为 $g(x)$ 连续, 所以存在 $a \in (x_1, x_3)$ 使得 $g(a)$ 是 $g(x)$ 在区间 $[x_1, x_3]$ 中的最小值, 显然 $g(a) < 0$, 不妨设 a 距离 x_1 较近, 也即 $|a - x_1| \leq |a - x_2|$, 根据条件有

$$g(a) \geq \frac{g(a+t) + g(a-t)}{2} \geq g(a), \forall t \in [0, |a - x_1|]$$

这意味着 $g(x)$ 在 $[x_1, 2a - x_1]$ 区间中恒为常数 $g(a)$, 与 $g(x_1) = 0$ 矛盾, 结论得证

□

注释 4.4.1: 可以发现, 凸性本质上就等价于极值性, 以后要证明凸性时候, 以下凸为例, 基本上都可以不妨设 $f(0) = f(1) = 0$, 在此基础上证明 $f(x) \leq 0$ 恒成立即可

4.5 综合问题

例 4.5.1 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 中二阶可导且恒有 $f^2(x) \leq a, f'^2(x) + f''^2(x) \leq b$, 证明: $f^2(x) + f'^2(x) \leq \max(a, b)$ 恒成立.

证明. 若 a, b 中有一个为零, 结论显然成立, 以下设 $a, b > 0$

反证法, 则存在 x 使得 $f^2(x) + f'^2(x) > \max(a, b)$, 不妨设 $f^2(0) + f'^2(0) > \max(a, b)$, 否则平移即可显然 $f(0), f'(0) \neq 0$, 否则与条件矛盾, 不妨设 $f(0) > 0, f'(0) > 0$, 否则考虑 $\pm f(\pm x)$ 这样的函数即可

根据条件 $|f'(x)| \leq \sqrt{b}$ 恒成立, 首先证明: $g(x) = \arcsin \frac{f'(x)}{\sqrt{b}} + x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增

这只需证明: 对任意 $t \in \mathbb{R}$, $g(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 中都是单调递增的

采用反证法, 则存在 $u < v, v - u \leq 1$ 使得 $g(u) > g(v)$, 因此可以取充分小的 $\varepsilon > 0$ 使得 $h(x) = g(x) + \varepsilon x$ 仍然满足 $h(u) > h(v)$, 因为 $h(x)$ 是连续函数, 故考虑

$$x_1 = \sup \{t \in [u, v] | h(t) \geq h(u)\} \in [u, v], x_2 = \inf \{t \in [x_1, v] | h(t) \leq h(v)\} \in (x_1, v]$$

则 $h(u) = h(x_1) > h(x_2) = h(v), x_1 < x_2, x_2 - x_1 \leq 1$ 并且 $h(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 内的最大值是 $h(x_1)$, 最小值是 $h(x_2)$, 根据 $h(x)$ 的定义以及 $x_1 < x_2$, 代入有

$$\arcsin \frac{f'(x_1)}{\sqrt{b}} + (1 + \varepsilon)x_1 > \arcsin \frac{f'(x_2)}{\sqrt{b}} + (1 + \varepsilon)x_2 \Rightarrow -\sqrt{b} \leq f'(x_2) < f'(x_1) \leq \sqrt{b}$$

根据条件可知 $-\sqrt{b - f'^2(x)} \leq f''(x) \leq \sqrt{b - f'^2(x)}$, 如果 $f'(x_1) \neq \sqrt{b}$, 则 $h(x)$ 在 $x = x_1$ 处可导且

$$h'(x_1) = \frac{f''(x_1)}{\sqrt{b - f'^2(x_1)}} + 1 + \varepsilon > 0$$

但是 $h(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 中的最大值是 $h(x_1)$, 故 $h'(x_1) \leq 0$ 导致矛盾, 这说明 $f'(x_1) = \sqrt{b}$, 同理可知 $f'(x_2) = -\sqrt{b}$ 条件 $f'^2(x) + f''^2(x) \leq b$ 表明 $|f''(x)| \leq \sqrt{b}$, 在区间 $[x_1, x_2]$ 中使用拉格朗日中值定理有

$$2\sqrt{b} = |f'(x_2) - f'(x_1)| = |x_2 - x_1| |f''(\xi)| \leq \sqrt{b}$$

导致矛盾, 所以我们证明了 $\arcsin \frac{f'(x)}{\sqrt{b}} + x$ 单调递增

回到原题, 记 $\lambda = \arcsin \frac{f'(0)}{\sqrt{b}} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 由此可知

$$\arcsin \frac{f'(x)}{\sqrt{b}} \geq \lambda - x \Rightarrow f'(x) \geq \sqrt{b} \sin(\lambda - x), x \in [0, \lambda]$$

两边积分并利用条件 $f(x) \leq \sqrt{a}$ 得到

$$\begin{aligned} \sqrt{a} &\geq f(\lambda) \geq \sqrt{b}(1 - \cos \lambda) + f(0) = \sqrt{b} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{f'^2(0)}{b}}\right) + f(0) \\ &\Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} \geq f(0) - \sqrt{b - f'^2(0)} = \frac{f^2(0) + f'^2(0) - b}{f(0) + \sqrt{b - f'^2(0)}} > \frac{\max(a, b) - b}{f(0) + \sqrt{b - f'^2(0)}} \end{aligned}$$

这说明 $a > b$ 并且

$$\frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} > \frac{a - b}{f(0) + \sqrt{b - f'^2(0)}} \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} < f(0) + \sqrt{b - f'^2(0)}$$

再利用反证法的假设以及条件 $f^2(0) + f'^2(0) > \max(a, b) = a$, $f(0) \leq \sqrt{a}$ 可知

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} < f(0) + \sqrt{b - f'^2(0)} \leq f(0) + \sqrt{b - a + f^2(0)} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b - a + a} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

由此导出矛盾，结论得证

□

注释 4.5.1: 形式计算有 $-\sqrt{b - f'^2(x)} \leq f''(x) \leq \sqrt{b - f'^2(x)}$ ，除过来积分便有 $g(x) = \arcsin \frac{f'(x)}{\sqrt{b}} + x$ 单调递增，但是问题在于二阶导不一定可积，并且分母有可能为零，前者可以通过直接对 $g(x)$ 求导的方式回避，但是后者无法回避，我们只能得到：当 $f'(x) \neq \pm\sqrt{b}$ 时 $g(x)$ 都是单调递增的，并不能由此直接说 $g(x)$ 单调递增，换句话说：一个连续函数在可导点导数都非负未必可以推递增，因此要特别处理，并不简单。上课时间原因省略了证明 $g(x)$ 单调递增的细节（千万不能直接说求导显然），实际上这一点虽然直观，可处理起来的难度却大于后半部分，感兴趣的同学可以研究下有没有什么方法快速说明 $g(x)$ 递增。

例题 4.5.2 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上单调、连续且满足 $f(x+1) = f(x) + 1$ 的实函数, $f^n = f \circ \cdots \circ f$ 是 f 的 n 次复合, 记 $\varphi_n(x) = f^n(x) - x$, 证明:

(1) 对任意的 $n \geq 1$, $\varphi_n(x)$ 是周期函数. (2) 对任意的 $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n(x)}{n}$ 存在且极限值与 x 无关.

证明. 第一问要证明的是 $f^n(x+1) = f^n(x) + 1$, 结合已知条件归纳可知显然成立

对于第二问, 显然 $f(x)$ 递增, 只要证: 对任意 x , $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x)}{n}$ 存在且相同, 下面分类讨论

如果 $f(x) = x$ 有解 x_0 , 则 $f(x_0 + k) = x_0 + k$ 对任意整数 k 均成立, 于是对任意初值 x , 可以设 x 介于两个不动点 $u, u+1$ 之间, 根据单调性便有 $f^n(x) \in [u, u+1]$ 对任意 n 恒成立, 故此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x)}{n} = 0$

否则, $f(x) > x$ 与 $f(x) < x$ 必有一个恒成立, 先考虑 $f(x) > x$ 恒成立的情形, 显然在 $[0, 1]$ 中 $f(x) - x$ 有正的上下界, 而 $f(x+1) = f(x) + 1$, 所以在 $\mathbb{R}$ 中 $f(x) - x$ 也有正的上下界, 故 $f(x) - x \geq \delta_0 > 0$ 恒成立

定义数列 $a_0 = 0, a_{n+1} = f(a_n)$, 则 $a_{n+1} - a_n \geq \delta_0, a_n \rightarrow +\infty$, 如果此时证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lambda$ 存在, 则对任意初值 x 和任意正整数 n 都有 $f^{n+1}(x) \geq f^n(x) + \delta_0$, 于是会有某个 k, N 使得 $f^k(x) \in [a_N, a_{N+1}]$, 注意 $f(x)$ 单调递增, 所以 $\frac{f^{k+n}(x)}{k+n} \in \left[\frac{a_{N+n}}{k+n}, \frac{a_{N+1+n}}{k+n} \right], \forall n$, 注意 N, k 是确定的, 令 $n \rightarrow \infty$ 便有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lambda$ 存在且相同, 因此, 我们只需要在本题条件下证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 存在

采用反证法, 因为 $f(x) - x$ 有正的上下界, 设 $A = \varlimsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}, B = \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$, 则 $A > B > 0$ 均为有限数

根据上极限定义, 记 $\delta = \frac{A-B}{3} > 0$, 则存在正整数 N 使得 $\frac{a_N}{N} \in [A-\delta, A+\delta]$, 也存在充分大的正整数 $k > \max\left(2N, \frac{1}{\delta}\right)$ 使得 $\frac{a_{N+k}}{N+k} \in [A-\delta, A+\delta]$, 这里 N, k 已经确定, 得到不等式:

$$\begin{aligned} (A-\delta)(N+k) &\leq a_{N+k} \leq (A+\delta)(N+k), (A-\delta)N \leq a_N \leq (A+\delta)N \\ \Rightarrow a_{N+k} - a_N &\geq (A-\delta)(N+k) - (A+\delta)N = (A-\delta)k - 2\delta N \\ &= (B+2\delta)k - 2\delta N = (B+\delta)k + \delta(k-2N) \geq (B+\delta)k \end{aligned}$$

设正整数 M 使得 $(B+\delta)k \in [M, M+1]$, 根据 $f(x+1) = f(x) + 1$ 和单调性可得 k 个子列的不等式

$$\begin{aligned} a_{N+k} - a_N \geq M &\Rightarrow \begin{cases} a_{N+k} \geq a_N + M \\ a_{N+k+1} \geq a_{N+1} + M \\ \dots \\ a_{N+2k-1} \geq a_{N+k-1} + M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{N+nk} \geq a_N + nM \\ a_{N+nk+1} \geq a_{N+1} + nM \\ \dots \\ a_{N+nk+k-1} \geq a_{N+k-1} + nM \end{cases}, \forall n \geq 1 \\ \Rightarrow \frac{a_{N+nk+r}}{N+nk+r} &\geq \frac{a_{N+r} + nM}{N+nk+r}, r=0, 1, \dots, k-1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{N+nk+r}}{N+nk+r} \geq \frac{M}{k} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \geq \frac{M}{k} \end{aligned}$$

所以 $B \geq \frac{M}{k}$, 结合 $(B+\delta)k \in [M, M+1]$ 有 $M+1 \geq (B+\delta)k \geq M+k\delta$, 这说明 $k \leq \frac{1}{\delta}$, 与 k 的定义矛盾

最后, 如果 $f(x) < x$ 恒成立, 则同理 $f(x) - x$ 有负的上下界, 同样只需证明数列 $a_0 = 0, a_{n+1} = f(a_n)$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 存在, 此时令 $b_n = -a_n$, 则 $b_{n+1} = -f(-b_n)$, 相应的考虑 $F(x) = -f(-x)$, 则 $F(x)$ 递增, 连续且 $F(x+1) = F(x) + 1$ 满足题目所有条件, 根据前面的证明可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n}$ 存在, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 存在, 结论得证 $\square$

注释 4.5.2: 证明过程中 δ, k 的取法可以在自己待定系数探究做题的过程中发现, 或见上课视频, 很自然, 这个上下极限属于原创解法, 不同于如今市面上流传的一切答案 (均抄自官方标答)

解题灵感来源于特例: 假如 $a_3 - a_0 \leq 1, a_4 - a_0 > 1$, 那么 $a_{3n} \leq a_0 + n, a_{4n} \geq a_0 + n$, 进而易得 $\varlimsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{3}, \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \geq \frac{1}{4}$, 可见这个数列只要知道某几项的增长速度, 就能直接决定上下极限! 所以我们取上极限子列去控制下极限大小, 找矛盾即可, 另外仔细观察可知连续性并不必要, 删去后稍加修改便可证明 (自行完成)

4.6 练习题

习题 4.6.1 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上有二阶导数, f, f', f'' 都大于零, 假设存在正数 a, b 使得 $f''(x) \leq af(x) + bf'(x)$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 成立, 求最小的常数 c 使得 $f'(x) \leq cf(x)$ 恒成立

习题 4.6.2 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 中连续, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\sqrt{n}) = 0$, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在当且仅当 $f(x)$ 一致连续.

习题 4.6.3 设 $f(x) \in C(0, 1)$ 且对任意 $x \in (0, 1)$ 都有 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h} = 0$, 证明: $f(x)$ 的可导点构成的集合是稠密的.

习题 4.6.4 设 $f(x) \in C^2[a, b]$, 满足 $|f(x)| \leq A, |f''(x)| \leq B, |f'(x_0)| \leq D, x_0 \in [a, b]$, 证明: $|f'(x)| \leq 2\sqrt{AB} + D$ 恒成立

习题 4.6.5 1. 设 $f(x) \in C[0, 1]$ 且对任意 $a \leq b$ 都有 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, 证明: $f(x)$ 下凸.

2. 设 $f(x) \in C[0, 1]$ 且对任意 $a \leq b$ 都有 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$, 证明: $f(x)$ 下凸.

3. 在前两问中, 如果某一个不等号始终取等, 则 $f(x)$ 是线性函数.

习题 4.6.6 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 的任意闭子区间上黎曼可积, 令 $F(x) = \int_0^x t^a f(t+x) dt, x \geq 0$

(1) 若 $a \in (-1, 0)$ 并且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 证明: $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 中一致连续.

(2) 若 $a \in (0, 1)$, $f(x)$ 以 $T > 0$ 为周期, $\int_0^3 f(x) dx = 2022$, 证明: $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 中非一致连续.

习题 4.6.7 设 $f''(x), f'''(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1]$, 记 $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)$, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 是递增的.

习题 4.6.8 求最小的正实数 r , 使得存在定义域为 $\mathbb{R}$ 的可导函数 $f(x), g(x)$ 满足:

$$f(0) > 0, g(0) = 0, f(r) = 0, |f'(x)| \leq |g(x)|, |g'(x)| \leq |f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}.$$

习题 4.6.9 连续函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上并且恒正, 给定 $a \in (0, 1)$, 如果对任意 x, y 都有 $f(x) + f(y) \geq \left| \int_x^y f(u) du \right|^a$, 证明: 存在 $c > 0$ 使得对任意 x 都有 $f(x) \geq c|x|^{\frac{a}{1-a}}$

第五章 语文类性态分析

本节是一元微积分中的语文风格的性态分析问题汇总与讲解，多元微积分中其实也会有一些这种问题，那些问题放在下期课程中多元函数部分合适的位置再讲。

语文类性态分析问题，大多都是反证法去做，而且问题大多围绕着函数的极限存在性或者连续性展开。比如我们要证明极限是 1，采用反证法就意味着存在一列 x_n 使得相应的 $f(x_n) > 1 + \delta$ ，然后自然是去关注这些 x_n 点究竟会和其他条件产生什么矛盾，通常来说这个矛盾就来源于“函数（或数列）的变化速度被限制了”，以至于函数没办法迅速从 $1 + \delta$ 递减回到 1，就会直接或者间接的与其他什么东西矛盾。

再比如我们要证明函数是连续的，那就是连续的定义，没什么要考虑的别的东西，你只需要把不连续这个命题用数学语言写出来，一般来说根据题目条件翻译一遍就做出来了，不需要动脑子。

还有一种是构造性问题，对于一个连续变化的东西，比如函数，如果说“不存在一列 $x_n \rightarrow \infty$ 使得怎么样”，那么这将会是一个非常强的命题，因为连续变化的东西其取值的自由度非常高，现在我说找一个离散的子列都找不到，那一定意味着会恒成立一些非常强的不等式（对比连续函数介值性，或者看后面的题），这就是突破口。简单题到这里差不多就做完了，难题就还要继续推一推。

下面是例题讲解，我们把同类型的问题放到了一起，上课讲一个，然后剩下的留作习题。

5.1 例题讲解与习题

例题 5.1.1 设 $m > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 中可导且 $xf'(x)$ 单调递增, 满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^m} = A$, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x^{m-1}} = mA$ (反向洛必达).

证明. 反证法, 不妨设存在一列 x_n 单调递增趋于正无穷, 满足 $\frac{f'(x_n)}{x_n^{m-1}} \geq mA + \delta, \delta > 0$

对任意 $t_0 > 0$ 和任意 $t \in [0, t_0]$, 利用 $xf'(x)$ 单调递增, 所以 $(x_n + t)f'(x_n + t) \geq x_nf'(x_n)$ 也即

$$\begin{aligned} f'(x_n + t) &\geq \frac{x_n}{x_n + t} f'(x_n) \geq \frac{x_n^m}{x_n + t_0} (mA + \delta), \forall t \in [0, t_0] \\ f(x_n + t_0) - f(x_n) &\geq \frac{t_0 x_n^m}{x_n + t_0} (mA + \delta) \\ \frac{f(x_n + t_0)}{(x_n + t_0)^m} &\geq \frac{f(x_n)}{x_n^m} \frac{x_n^m}{(x_n + t_0)^m} + \frac{t_0 x_n^m}{(x_n + t_0)^{m+1}} (mA + \delta) \end{aligned}$$

然后取 $t_0 = \varepsilon x_n$ (对不同的 n 当然区间也就不一样), 这里 $\varepsilon > 0$ 待定, 则有

$$\frac{f(x_n + \varepsilon x_n)}{(x_n + \varepsilon x_n)^m} (1 + \varepsilon)^m \geq \frac{f(x_n)}{x_n^m} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} (mA + \delta)$$

令 $n \rightarrow \infty$ 代入条件, 得到

$$(1 + \varepsilon)^m \geq 1 + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} (mA + \delta) \Leftrightarrow \frac{(1 + \varepsilon)^m - 1}{\varepsilon} \geq \frac{mA + \delta}{1 + \varepsilon}$$

显然上式不会对任意 $\varepsilon > 0$ 都成立, 因为令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 这个极限就不对, 所以可以取 $\varepsilon > 0$ 为充分小的正数, 此时导出矛盾, 结论得证

□

注释 5.1.1: 联想这下面这几个题目, 做法都差一模一样, 风格也是, 其中第一个是性态分析部分讲过的, 第二题和第三题一个是 CMC 题应该是普特南题, 最后一个来源不明, 不过都是一类问题

习题 5.1.1 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 中二阶可导, 常数 $C > 0$ 使得 $|f''(x)| \leq C|f'(x)|$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^x} = 1$, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{e^x} = 1$.

习题 5.1.2 设 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 中连续, 在 $(0, 1)$ 中二阶可导, 若 $r > 1$ 使得 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x^r} = 0$, 证明: 以下两个式子中必有一个成立

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = 0, \overline{\lim}_{x \rightarrow 0^+} x^r |g''(x)| = +\infty$$

习题 5.1.3 设 $\alpha > 0$, f 在 $[0, +\infty)$ 上二阶可导, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{x^\alpha} = 0$, $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha |f''(x)| < \infty$, 是否有 $f'(+\infty) = 0$.

习题 5.1.4 假设 f 在 $(0, 1)$ 上 2 次连续可微, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$, 并且存在 $C > 0$, 使得对任意 $x \in (0, 1)$, 都有不等式 $(1 - x)^2 |f''(x)| \leq C$. 证明, $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x)f'(x) = 0$.

例题 5.1.2 设数列 a_n 满足 $n(a_n - a_{n-1}) > -C, C > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

证明. 不妨设 $a = 0, C = 1$, 反证法, 分为两种情况, 要么存在一列 $a_{n_k} \geq \delta > 0$, 要么 $a_{n_k} \leq -\delta < 0$, 注意这里并不能“不妨设”, 因为条件只给了下界并没有给上界, 所以两种情况不能互相转化, 不过实际上证明方法是完全一样的, 无非一个是“向又看”一个是“向左看”, 这里仅证明前者, 另一种完全同理

设存在一列 $a_{n_k} \geq \delta > 0$, 条件表明 $a_n - a_{n-1} \geq -\frac{1}{n}$, 所以若某个充分大的正整数 N 使得 $a_N \geq \delta$, 则

$$a_{N+1} \geq \delta - \frac{1}{N+1}, a_{N+2} \geq \delta - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}, \dots, a_{N+m} \geq \delta - \left(\frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{N+m} \right)$$

让 $a_{N+m} \geq \frac{1}{2}\delta$, 放缩一下

$$\frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{N+m} \leq \ln \frac{N+m}{N} \leq \frac{m}{N} \leq \frac{1}{2}\delta \Leftrightarrow m \leq \left\lceil \frac{1}{2}N\delta \right\rceil$$

所以取 $m = \left\lceil \frac{1}{2}N\delta \right\rceil$ 就有 $a_N, a_{N+1}, \dots, a_{N+m} \geq \frac{1}{2}\delta$

另一方面, 记 $S_n = a_1 + \dots + a_n$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 当 n 充分大时, 对任意正整数 m 有

$$\left| \frac{S_n}{n} \right| < \varepsilon, \left| \frac{S_{n+m}}{n+m} \right| < \varepsilon \Rightarrow a_{n+1} + \dots + a_{n+m} < (n+m)\varepsilon + n\varepsilon = (2n+m)\varepsilon$$

把这个式子与前面的结果合在一起看, 则任意 $\varepsilon > 0$, 存在某个充分大的 $N = n_k > \frac{4}{\delta}$ 使得

$$\frac{m}{2}\delta \leq a_{N+1} + \dots + a_{N+m} < (2N+m)\varepsilon, m = \left\lceil \frac{N\delta}{2} \right\rceil \Rightarrow \frac{\delta}{2} < \left(1 + \frac{2N}{m}\right)\varepsilon < \left(1 + \frac{2}{\frac{\delta}{2} - \frac{1}{N}}\right)\varepsilon < \left(1 + \frac{8}{\delta}\right)\varepsilon$$

显然 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时上式不成立, 故矛盾, 结论得证

□

注释 5.1.2: 这是反向 stolz, 作为推论, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$, 以上结论显然成立, 这对应反向洛必达

例题 5.1.3 设 $f(x) \in C^2[0,1]$ 并且恒正, 满足 $f'(0) = 0, f''(0) > 0$, 证明: 存在正整数序列 $\{m_k\}, \{n_k\}$ 使得 $m_k < n_k, m_k, n_k$ 互素, 并且记 $\mu_k = n_k f\left(\frac{m_k}{n_k}\right)$, 还能满足: (1) μ_k 单调递增趋于正无穷, (2) 序列 μ_k 中任意不同的两项, 其比值都不是整数.

证明. 不妨设 $f(0) = 1$, 记 $f''(0) = A > 0$, 根据条件, 存在 $T \in (0,1)$ 使得任意 $x \in (0,T)$ 都有 $f''(x) > \frac{1}{2}A$, 于是这个区间内 $f(x), f'(x)$ 都是严格单调递增的

我们证明: 存在一系列严格单调递增的素数 $\{p_k\}$ 和正整数序列 $\{m_k\}$, 其中 $m_k < p_k$, 并且 $\mu_k = p_k f\left(\frac{m_k}{p_k}\right)$ 满足 $\mu_{k+1} > 3\mu_k, \forall k \geq 1$ 同时序列 μ_k 中任意不同的两项比值都不是整数

任取一个素数 $p_1 > \frac{1}{T}$, 记 $\mu_1 = p_1 f\left(\frac{1}{p_1}\right)$, 下面归纳构造, 假设已经找到了 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, 下面来构造 μ_{n+1}

对任意正整数 k , 在区间 $(k\mu_n, (k+1)\mu_n)$ 中, 注意区间总长度是确定的数字 μ_n , 所以不管 k 是多少, 这个区间内能放下的形如 $i\mu_1, (i+1)\mu_1, \dots, j\mu_2, (j+1)\mu_2, \dots$ 的点, 也就是那些 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ 的任意整数倍 (在这个区间当中的) 对应的点, 其总个数是有上限的且与 k 无关 (设想在一个长为 100 的区间中, 每间隔距离 1 放一个点, 每间隔距离 0.5 放一个点, 那不管什么情况, 总共点的个数不超过 202 个, 那么总归有两个点间隔至少 $\frac{1}{3}$, 这其中没有其他点), 所以总是存在长度不小于某个正数 δ 的子区间 (开区间) I_k , 使得区间 I_k 中的任何一个数字, 都不是 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ 中任何一个的整数倍

因为 $f'(0) = 0$ 且 $f'(x)$ 连续, 所以存在 $T_1 \in (0,T)$ 使得 $f'(x) \in (0, \frac{\delta}{2}), \forall x \in (0, T_1)$

现在我们取充分大的素数 p , 使得 $\frac{A}{4}\sqrt{p} - \frac{\delta}{2} > 3\mu_n, p^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{p} < T_1$, 然后逐一考察 $pf\left(\frac{i}{p}\right), i = 1, 2, \dots, \left[p^{\frac{3}{4}}\right] + 1$, 根据中值定理有

$$p\left(f\left(\frac{i+1}{p}\right) - f\left(\frac{i}{p}\right)\right) = f'(\xi), \xi \in \left(0, p^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{p}\right), 1 \leq i \leq \left[p^{\frac{3}{4}}\right]$$

所以 $pf\left(\frac{i+1}{p}\right) - pf\left(\frac{i}{p}\right) \in \left(0, \frac{\delta}{2}\right)$, 注意

$$pf\left(\frac{1}{p}\right) = p\left(1 + f'(\xi)\frac{1}{p}\right) \leq p + \frac{\delta}{2}, pf\left(\frac{\left[p^{\frac{3}{4}}\right] + 1}{p}\right) \geq pf\left(p^{-\frac{1}{4}}\right) = p\left(1 + \frac{1}{2}f''(\xi)p^{-\frac{1}{2}}\right) \geq p + \frac{A}{4}\sqrt{p}$$

所以

$$pf\left(\frac{\left[p^{\frac{3}{4}}\right] + 1}{p}\right) - pf\left(\frac{1}{p}\right) \geq \frac{A}{4}\sqrt{p} - \frac{\delta}{2} > 3\mu_n$$

这说明, 在开区间 $\left(pf\left(\frac{1}{p}\right), pf\left(\frac{\left[p^{\frac{3}{4}}\right] + 1}{p}\right)\right)$ 中, 至少包含了某一个完整的开区间 $(k\mu_n, (k+1)\mu_n)$, 进而包含了某一个长度不小于 δ 的开区间 I_k , 且 I_k 中任取一个数字, 都能够满足: 它不是 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ 中任何一个数字的整数倍

另一方面, 区间 $\left(pf\left(\frac{1}{p}\right), pf\left(\frac{\left[p^{\frac{3}{4}}\right] + 1}{p}\right)\right)$ 从左至右依次包含了 $pf\left(\frac{i}{p}\right), i = 2, 3, \dots, \left[p^{\frac{3}{4}}\right]$, 这些点, 并且任何相邻两点的距离不超过 $\frac{\delta}{2}$, 所以必定存在某一个点, 记为 $\mu_{n+1} = pf\left(\frac{i_0}{p}\right) \in I_k$, 这就是我们需要的, 归纳构造结束, 结论得证

□

例题 5.1.4 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 中可导, $f'(x) - 2f(x) \leq 4$ 且 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

证明. 反证法, 设一列 $x_n \rightarrow \infty$ 使得 $f(x_n) \geq \delta > 0$ (另一种情况同理, 但不要不妨设)

根据条件有 $(e^{-2x}(f(x) + 2))' = e^{-2x}(f'(x) - 2f(x) - 4) \leq 0$, 所以 $e^{-2x}(f(x) + 2)$ 单调递减

对任意 $t_0 > 0$ 以及任意 $t \in [0, t_0]$ 有

$$\begin{aligned} e^{-2(x_n-t)}(f(x_n-t) + 2) &\geq e^{-2x_n}(f(x_n) + 2) \geq e^{-2x_n}(\delta + 2) \\ f(x_n-t) &\geq e^{-2t}(\delta + 2) - 2 \geq e^{-2t_0}(\delta + 2) - 2 \\ \int_{x_n-t_0}^{x_n} f(x) dx &\geq t_0(e^{-2t_0}(\delta + 2) - 2), \forall t_0 > 0, \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

然后令 $n \rightarrow \infty$, 利用条件: 积分收敛可知 $t_0(e^{-2t_0}(\delta + 2) - 2) \leq 0$ 恒成立, 也即 $e^{-2t}(\delta + 2) - 2 \leq 0, \forall t > 0$, 但是显然这个不等式不会恒成立, 因为令 $t \rightarrow 0$ 取极限时候, 就有矛盾, 故结论得证

□

习题 5.1.5 设非负函数 $f(x)$ 定义在 $[0, +\infty)$ 上连续可导, $\int_0^{\infty} f(x) dx < \infty$, 且存在 $[0, +\infty)$ 上非负并在有限区间上可积的函数 $g(x)$ 使得 $f'(x) \leq g(x), x \geq 0$, 对于以下三种情况, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(1). $\int_0^{\infty} g(x) dx$ 收敛; (2). $g(x) = C > 0$; (3). $g(x) = C f^p(x), C > 0, p > 0$.

习题 5.1.6 设 $f(x) \in C^2(0, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 常数 λ 使得 $f''(x) + \lambda f'(x)$ 有上界, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

例题 5.1.5 设 $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 中单调递增, 若 $F(x) = f(x) - g(x)$ 在 $[0, 1]$ 中有介值性, 证明: $F(x)$ 连续.

证明. 因为 $f(x), g(x)$ 单调递增, 所以在任何一点 x_0 处, 两个单侧极限都是存在的, 如果某点 x_0 处两个单侧极限不等, 利用极限的局部保号性, 显然在该点附近区间内, $F(x)$ 没有介值性

同样, 如果是两个单侧极限相等但是与该点函数值不等, 也会矛盾

□

例题 5.1.6 1. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 中连续, 证明: $g(x) = \max_{0 \leq t \leq x} f(t)$ 是连续函数.

2. 设 $f(x)$ 在区间 I 上的间断点都是可去间断点, 令 $g(x) = \lim_{t \rightarrow x} f(t), x \in I$, 证明 $g(x)$ 在区间 I 中连续.

证明. 1. 显然 $g(x)$ 单调递增, 若 $g(x)$ 在 x_0 处不连续, 则 x_0 为跳跃间断点, 设 $g(x_0^-) = A, g(x_0^+) = B, A < B$, 因为 $g(x_0^+) = B$, 所以 $f(x)$ 在任何一个区间 $[0, x_0 + \frac{1}{n}]$ 中的最大值都 $\geq B$, 因为 $g(x_0^-) = A$, 所以 $g(x)$ 在任何一个区间 $[0, x_0 - \frac{1}{n}]$ 中的最大值都 $\leq A$, 现在看 x_0 附近, 这说明对任意 $\delta > 0$, 都存在 x_0 附近两个相距小于 δ 的点, 其函数值之差至少为 $B - A$, 与函数的连续性 (或者一致连续性) 矛盾

2. 对任意一点 x_0 , 要证明 $g(x)$ 在 x_0 处连续, 也即说明: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得任意 $|x - x_0| < \delta$ 都有 $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$

记 $A = g(x_0) = \lim_{t \rightarrow x_0} f(t)$, 证 $|g(x) - A| < \varepsilon$

根据极限定义, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得任意 $t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 都有 $|f(t) - A| < \varepsilon$, 现在对任意 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 在 x 附近考虑 (当然就不会超出前面这个区间), 然后令 $t \rightarrow x$ 取极限, 利用极限保号性得到 $|f(u) - A| < \varepsilon \Rightarrow \left| \lim_{u \rightarrow x} f(u) - A \right| \leq \varepsilon$, 这就是要证明的

□

习题 5.1.7 1. 设 $f(x)$ 定义在 $[0, 1]$ 中且对任意子区间 $[a, b] \subset [0, 1]$ 都有 $f([a, b])$ 是单点集或闭区间, 证明: $g(x) = \max_{0 \leq t \leq x} f(t)$ 在 $(0, 1]$ 中左连续, 但是不一定右连续.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 中有界, 记 $h(x) = \sup_{t \in [0, x]} f(t)$, 证明: $h(x)$ 左连续.

例题 5.1.7 设 $f(x)$ 定义在 $[0, 1]$ 中, 其图像集为 $G = \{(x, f(x)) | x \in [0, 1]\}$, 证明: $f(x)$ 连续等价于 G 是紧集, 但是若 G 只是闭集, 则 $f(x)$ 不一定连续.

证明. 若 $f(x)$ 连续, 则显然有界, 于是图像集 G 是有界的, 再证明闭集:

对一系列 $(x_n, f(x_n)) \in G, (x_n, f(x_n)) \rightarrow (a, b)$, 则 $x_n \rightarrow a$, 利用连续性知 $f(x_n) \rightarrow f(a) = b$, 所以极限 $(a, f(a)) \in G$, 得到闭集

另一方面, 反证法, 若 $f(x)$ 不连续并且 G 是紧集, 则存在一系列 $x_n \in [0, 1]$ 满足 $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$ 恒成立, 因为一系列点 $(x_n, f(x_n)) \in G$ 并且 G 是紧集, 所以有收敛子列, 设为 $(x_{n_k}, f(x_{n_k})) \rightarrow (x_0, f(x_0))$ (收敛, 因为 $x_{n_k} \rightarrow x_0$ 已经确定, 所以极限只能是这个点), 于是 $|f(x_{n_k}) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$, 导致矛盾

紧集改成闭集后会有反例, 比如考虑 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

□

习题 5.1.8 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 满足 $f(x), f(x^2)$ 都是周期函数, 证明: $f(x)$ 是常值函数

习题 5.1.9 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 中连续且有界, 证明: 对任意实数 a , 都存在单调递增趋于正无穷的数列 x_n 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n + a) - f(x_n)) = 0$

第六章 决赛常微分方程

常微分方程部分很多时候就是普通的数学分析习题，唯一区别就是需要借助解的存在唯一性相关的定理，而这些定理来自于常微分方程教材。这部分的题目并不是背下来定理就可以解决问题，核心是自己分析积分曲线的走势（函数的变化规律），以及灵活的对方程变形，凑微分（构造函数求导），解方程。

核心的定理最主要的是高阶线性微分方程解的存在唯一性定理，Picard 存在唯一性定理（一阶任意方程），解的延拓定理，其次是皮亚诺存在性定理还有比较定理，以及连续依赖性。

常微分方程题目很多时候要考虑“函数恒为零或者函数恒正的最大区间”，然后在相应的区间内进行讨论，或者去研究这样的区间的端点，并不能直接形式上的分离变量解方程，无脑变形！这个技巧在平时数学分析习题里面或许用的不多，但是在常微分方程味道的数分题里面很常用，思想非常重要。

对于积分曲线及其几何性质的分析也很重要，因为方程 $y' = f(x, y)$ 给定后，当 y 在某个范围内变化时， $f(x, y)$ 也会有一个范围，相应的就给出了导数的取值，于是积分曲线的走向就确定了！运用这种思想，在具体问题中，通常我们可以快速发现很多重要的性质，比如函数的单调性，有界性，能否与某条直线或者曲线相交，能否穿过某条线，零点的分布情况等等

几何上观察到的这些东西都是不难严格证明的，并且几何能为你带来思路，所以非常有用

下面我们列出三个比较定理，其中做题时候好用的是 Strum 比较定理（证明与结论均应掌握），此外剩下的常微分方程中的结论，如存在唯一性，连续依赖性，延拓等等，各个学校课内应该都会讲到，不再单独列出

定理 6.0.1: 第一比较定理

设 $f(x, y), F(x, y)$ 连续且 $f(x, y) < F(x, y)$ ， $y_1(x), y_2(x)$ 分别是 $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ 和 $y' = F(x, y), y(x_0) = y_0$ 的解，则 $x > x_0$ 时成立 $y_1(x) < y_2(x)$ ， $x < x_0$ 时成立 $y_1(x) > y_2(x)$ 。

注释 6.0.1: 没什么用的定理，本身也就是一道普通且符合几何直观的数学分析习题。

定理 6.0.2: 第二比较定理

设 $f(x, y), F(x, y)$ 连续且 $f(x, y) \leq F(x, y)$ ， $y_1(x), y_2(x)$ 分别是 $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ 和 $y' = F(x, y), y(x_0) = y_0$ 的解，并且 $y_1(x)$ 是右侧的最小解，也是左侧的最大解，则 $x \geq x_0$ 时成立 $y_1(x) \leq y_2(x)$ ， $x \leq x_0$ 时成立 $y_1(x) \geq y_2(x)$ 。

注释 6.0.2: 出现“最大解，最小解”这样的概念，是因为解的唯一性没有保证，所谓最大最小就是字面意思：任何一个解都全部位于最大解下方，最小解上方（可以重合），这里最大解最小解的唯一性是显然的，而存在性则需要证明

运用存在性以及第一比较定理，可以快速导出第二比较定理，存在性的证明见知乎或者常微分方程教材，有些麻烦。这两个定理在考试中似乎从未用到过，也没法拿来做题，不重要

定理 6.0.3: Strum 比较定理

设 $p(x), q(x), r(x)$ 都是连续函数, 函数 $f(x), g(x) \in C^2(\mathbb{R})$ 分别是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, y'' + p(x)y' + r(x)y = 0$ 的非零解, 若 $r(x) \geq q(x)$, 并且 $a < b$ 是 $f(x)$ 的相邻零点, 则 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内有零点.

如果条件加强为 $r(x) > q(x)$, 则结论可加强为 $g(x)$ 在 (a, b) 内有零点.

证明. 首先说明零点一定是孤立的, 若不然, 有一列 $x_n \rightarrow x_0$ 使得 $y(x_n) = 0$, 则 $y(x_0) = 0$, 根据导数定义可知 $y'(x_0) = 0$, 于是 $y(x)$ 是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, y(0) = y'(0) = 0$ 的解, 根据解的存在唯一性知 y 恒为零, 从而每一个非零解的零点都是孤立的

反证法, 不妨设 $f(x)$ 在 (a, b) 内恒正, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 内恒正, 根据导数定义可知 $f'(a) \geq 0, f'(b) \leq 0$

因为

$$(fg' - f'g)' = fg'' - f''g = -p(fg' - f'g) + fg(q - r) \leq -p(fg' - f'g)$$

设 $u = fg' - f'g$, 则 $u' + pu \leq 0$ 得到

$$\left(e^{\int_0^x p(t)dt} u(x) \right)' = e^{\int_0^x p(t)dt} (u'(x) + p(x)u(x)) \leq 0$$

所以

$$0 \leq -e^{\int_a^b p(t)dt} f'(b)g(b) = e^{\int_a^b p(t)dt} u(b) \leq u(a) = -f'(a)g(a) \leq 0$$

这说明 $f'(a) = f'(b) = 0$, 根据存在唯一性定理知, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中恒为零, 矛盾

□

注释 6.0.3: 区间 $\mathbb{R}$ 可以换成任何的区间, 利用这个定理可以快速解决许多常微分方程题目

习题 6.0.1 设 $p(x), q(x)$ 都是连续函数, 设 $f(x), g(x)$ 是微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个线性无关的解, 若 $a < b$ 满足 $f(a) = f(b) = 0$, 则存在 $c \in (a, b)$ 使得 $g(c) = 0$.

习题 6.0.2 设 $p(x), q(x)$ 为连续函数, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足 $f'' + pf' + qf = 0$, 如果 $q(x) \leq 0$ 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: $f(x)$ 恒为零.

习题 6.0.3 设 $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$ 满足 $f''(x) + p(x)f'(x) + q(x)f(x) = 0$, 这里 $p(x), q(x)$ 均为连续函数且 $q(x) \leq 0$, 证明: 要么 $f(x)$ 恒为零, 要么 $f(x)$ 至多有一个零点.

习题 6.0.4 设 $f(x) \in C^2[0, +\infty), Q(x) \in C[0, +\infty)$, 常数 $M > m > 0$ 使得 $m \leq Q(x) \leq M$ 恒成立, 如果 $f''(x) + Q(x)f(x) = 0$ 且 $f(x)$ 不恒为零, 证明: $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 中有无穷个零点, 且任何两个相邻零点 $x_1 < x_2$ 均满足 $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq x_2 - x_1 \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$.

习题 6.0.5 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中连续, 在 (a, b) 中二阶可导且 $f(a) = f(b) = 0$, 若对任意 $x \in (a, b)$ 都有 $f(x) + f''(x) \geq 0$ 且 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中的最大值为正数, 证明: $b - a \geq \pi$.

注释 6.0.4: 这几个题目都可以用 Strum 比较定理简单快速的推出来, 当然不借助这个定理也能做并且不算困难, 自行完成 (1、2 题在上一届讲过, 3、4 题见柳斌的常微分方程教材第七章, 第五题大差不差, 但是直接套定理会有点小问题, 需要自行调整一下)

6.1 解的连续依赖性

这部分的理论较难并且叙述与证明都很长,可能许多学校不讲,不过在历年的 CMC 常微分方程部分中只考到过一次,并且那道题需要的“连续依赖性”可以自行当做数分题简单的推出来,所以这部分理论不必专门去学或者背诵,掌握大致方法,并且知道“都是连续变化的”即可(若想系统了解,去看柳斌或者张伟年常微分对应章节)

例题 6.1.1 设 μ 是参数,函数 $y = y(x, \mu)$ 是初值问题 $\frac{dy}{dx} = y + \mu(x + y^2), y(0) = 1$ 的解,计算 $\frac{\partial y}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0}$

证明. 根据条件,两边积分得到

$$y(x, \mu) = 1 + \int_0^x [y(s, \mu) + \mu(s + y^2(s, \mu))] ds$$

由此得到

$$\frac{\partial y}{\partial \mu} = \int_0^x \left(\frac{\partial y}{\partial \mu} + s + y^2(s, \mu) + 2\mu y(s, \mu) \frac{\partial y}{\partial \mu} \right) ds$$

因此函数 $\frac{\partial y}{\partial \mu}$ 满足微分方程 $u' = x + y^2(x, \mu) + (1 + 2\mu y(x, \mu))u$ 及初始条件 $u(0) = 0$.

这是一阶线性微分方程,解这个方程可以得到

$$e^{-\int_0^x (1+2\mu y(s, \mu)) ds} \frac{\partial y}{\partial \mu} = \int_0^x e^{-\int_0^t (1+2\mu y(s, \mu)) ds} (t + y^2(t, \mu)) dt$$

当 $\mu = 0$ 时,对应的是 $y' = y, y(0) = 1$, 自然解出 $y(x, 0) = e^x$, 因此

$$e^{-x} \frac{\partial y}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0} = \int_0^x e^{-t} (t + e^{2t}) dt$$

所以 $\frac{\partial y}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0} = e^{2x} - x - 1$

□

注释 6.1.1: 这个例题告诉你:实际上解可以看做是初值或参数的函数,并且能够关于它们求导,由此,一些形如“方程与初值二者之一确定,另一个是参数,现在问你方程的解关于这个参数的变化规律(例如解在某点的取值与参数的关联)”这样的问题,便可以如此解决,通常的存在唯一性定理并不能实现此效果!

例题 6.1.2 设 $f(x, y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ 有正的上下界, $g(x)$ 是连续函数, λ 是任意实数, 考虑微分方程 $y' = \lambda f(x, y) + g(x)$, $y(0) = 0$, 证明: 该方程的解的存在区间为 $\mathbb{R}$, 并且对任意 $b \in \mathbb{R}$, 都存在唯一的 λ 使得 $y(1) = b$

证明. 根据 picard 存在唯一性定理, 该微分方程的解局部存在唯一, 设解的最大存在区间为 (a, b) , 这里 $a < 0 < b$, 允许为无穷

假设 $b < +\infty$, 则方程的解在 $x = b$ 左侧应无界, 但是对任意 $x \in [0, b]$ 和任意确定的常数 λ , 由 $y' = \lambda f(x, y) + g(x)$ 以及 $g(x)$ 连续可知 $y'(x)$ 有界, 从而 $y(x)$ 有界, 矛盾

因此 $b = +\infty$, 同理 $a = -\infty$, 故解的存在区间为 $\mathbb{R}$

对任意 λ , 方程的解记为 $y = y(x, \lambda)$, 两边积分有

$$y(1, \lambda) = \lambda \int_0^1 f(x, y(x, \lambda)) dx + \int_0^1 g(x) dx$$

由于 $f(x, y)$ 有正的上下界, 所以 $y(1, +\infty) = +\infty, y(1, -\infty) = -\infty$, 根据解的连续依赖性知, $y(1, \lambda)$ 是关于 λ 的连续函数, 从而对任意 b , 都存在 λ 使得 $y(1) = b$

下面证明唯一性, 只需说明 $y(1, \lambda)$ 关于 λ 是严格单调递增的, 根据条件有

$$\begin{aligned} y(x, \lambda) &= \lambda \int_0^x f(t, y(t, \lambda)) dt + \int_0^x g(t) dt \\ \frac{\partial y(x, \lambda)}{\partial \lambda} &= \int_0^x f(t, y(t, \lambda)) dt + \lambda \int_0^x f_y(t, y(t, \lambda)) \frac{\partial y(t, \lambda)}{\partial \lambda} dt \end{aligned}$$

记 $u(x, \lambda) = \frac{\partial y(x, \lambda)}{\partial \lambda}$, 求导可知

$$\begin{aligned} u_x(x, \lambda) &= f(x, y(x, \lambda)) + \lambda f_y(x, y(x, \lambda)) u(x, \lambda) > \lambda f_y(x, y(x, \lambda)) u(x, \lambda) \\ \left(e^{-\int_0^x \lambda f_y(t, y(t, \lambda)) dt} u(x, \lambda) \right)' &> 0 \Rightarrow e^{-\int_0^x \lambda f_y(t, y(t, \lambda)) dt} u(x, \lambda) > u(0, \lambda) = \frac{\partial y(0, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{aligned}$$

因此 $u(x, \lambda) = \frac{\partial y(x, \lambda)}{\partial \lambda} > 0 \Rightarrow \frac{\partial y(1, \lambda)}{\partial \lambda} > 0$, 唯一性得证

□

注释 6.1.2: 具体例子比如 $y' = \lambda(1 + \sin^2 x + \sin^2 y) + x, y(0) = 0$, 可见函数形式怎样并不重要

例 6.1.3 证明：微分方程 $y' = -y^3 + \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 存在唯一的满足 $y(0) = y(2\pi)$ 的解.

证明. 设 $y(0) = a$, 先证明: 对任意 $a \in [-1, 1]$, 该方程的解存在区间均为 $\mathbb{R}$ 且恒有 $|y| \leq 1$

根据 picard 存在唯一性定理知, 该微分方程的解局部存在唯一, 若能证明 $|y| \leq 1$ 恒成立, 则解的存在区间必定为 $\mathbb{R}$ (这是因为如果最大存在区间的左侧或者右侧是有限数, 则解在区间端点附近必须是无界的)

反证法, 如果存在 $y(x_1) > 1, x_1 > 0$, 考虑 x_1 左侧使得 $y(x) > 1$ 恒成立的最大区间, 也即设

$$x_0 = \inf \{a \in (0, x_1) \mid y(x) > 1, \forall x \in [a, x_1]\}$$

则有 $y(x_0) \leq 1, x_0 \in [0, x_1)$, 考虑区间 $[x_0, x_1]$, 区间内恒有 $y(x) \geq 1$, 于是 $y'(x) \leq 0$, 故 $y(x_1) \leq y(x_0) = 1$ 导致矛盾, 于是 $y(x) \leq 1, \forall x \geq 0$

同理可证 $y(x) \geq -1, \forall x \geq 0$ 于是 $|y| \leq 1, \forall x \geq 0$, 进而同理有 $|y| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, 结论得证

对任意 $a \in [-1, 1]$, 微分方程 $y' = -y^3 + \sin x, y(0) = a$ 的解 $y(x, a)$, 在 $x = 2\pi$ 处的取值 $y(2\pi, a)$ 可以看做是关于 a 的一元函数 $f(a)$, 根据前面的证明知, 对任意 $a \in [-1, 1]$ 都有 $f(a) \in [-1, 1]$

根据解的连续依赖性知 $f(a)$ 是连续函数, 故存在 $a \in [-1, 1]$ 使得 $f(a) = a$, 也即存在满足 $y(0) = y(2\pi)$ 的解
下面证明唯一性: 若不然, 存在两个解 y_1, y_2 满足

$$\begin{cases} y_1' = -y_1^3 + \sin x, y_1(0) = y_1(2\pi) = a \\ y_2' = -y_2^3 + \sin x, y_2(0) = y_2(2\pi) = b \end{cases}, a > b$$

于是

$$(y_1 - y_2)' = -(y_1^3 - y_2^3) = -(y_1 - y_2)(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)$$

记 $u = y_1 - y_2$, 注意 $y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2$ 非负, 所以

$$u' = -u(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2), (u^2)' = 2uu' = -2u^2(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2) \leq 0$$

注意 $u(0) = u(2\pi) \neq 0$, 所以 $u^2(x)$ 是非零的常值函数, 且连续, 进而 $u(x) = u(0)$ 是常值函数, 所以 $u' = 0$ 也即 $y_1^3 = y_2^3$, 得到 $y_1 = y_2$, 矛盾

□

注释 6.1.3: 根据函数与导数的关系, 画图分析可知: 函数的变化具有“负反馈”的规律, 并且如果初值在 $[-1, 1]$ 之间, 则函数始终都在这个范围内变化, 由此明确思路

本题的连续依赖性也可以自己自然的证明出来, 也即说明 $f(a)$ 连续, 只需要在上面 y_1, y_2, u 那里稍加变形:

$$\begin{aligned} u' &= -u(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2), |u'| = |u|(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2) \leq 3|u| \\ \Rightarrow (e^{-6x}u^2(x))' &= e^{-6x}(2uu' - 6u^2) \leq 0, e^{-12\pi}u^2(\pi) \leq u^2(0) \\ \Rightarrow |u(\pi)| &= |f(b) - f(a)| \leq e^{6\pi}|u(0)| = e^{6\pi}|b - a| \end{aligned}$$

甚至还是 Lipschitz 连续的! 其实连续依赖性定理里面保证了: 作为二元函数是 C^1 的

6.2 单调性与周期性

例题 6.2.1 设 $f(x, y)$ 是连续函数且关于 y 递减, 证明: 微分方程 $y' = f(x, y), y(0) = 0$ 的解在 $x \geq 0$ 时候是唯一的.

证明. 假设有两个解 y_1, y_2 , 则存在 $a > 0$ 使得 $y_1(a) > y_2(a)$, 考虑 a 左侧使得 $y_1 > y_2$ 恒成立的最大区间, 记为 $(x_0, a]$, 则 $x_0 \geq 0$ 并且 $y_1(x_0) = y_2(x_0)$, 同时任意 $x \in (x_0, a)$ 都有 $y_1 > y_2$

进而对任意 $x \in (x_0, a)$ 都有

$$y_1' = f(x, y_1) \leq f(x, y_2) = y_2' \Rightarrow (y_1 - y_2)' \leq 0$$

故 $y_1(a) - y_2(a) \leq y_1(x_0) - y_2(x_0) = 0$, 与 $y_1(a) > y_2(a)$ 矛盾

□

注释 6.2.1: 开头考虑最大区间的那一部分, 其实就相当于不妨设 $y_1(0) = y_2(0) = 0$ 并且对任意 $x \in (0, a)$ 都有 $y_1 > y_2$, 换句话说就是不妨设 $x_0 = 0$

例题 6.2.2 设 $a \in (0, 1)$, $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上二阶连续可导的周期函数, 且 $|f(x)| \leq f(0) = a$, 满足方程 $f''(x) = -f(x) + f^3(x)$, 记 $f(x)$ 的最小正周期为 $T(a)$, 证明 $2\pi < T(a) < \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$ 并求极限 $T(0^+), T(1^-)$.

证明. 根据条件有

$$f''(x)f'(x) = -f(x)f'(x) + f^3(x)f'(x) \Rightarrow f'^2(x) = -f^2(x) + \frac{1}{2}f^4(x) + C$$

条件表明 $f(0) = a, f'(0) = 0, f''(0) = -a(1-a^2) < 0$, 上式中代入 $x = 0$ 可知

$$f'^2(x) = -f^2(x) + \frac{1}{2}f^4(x) + a^2 - \frac{1}{2}a^4 = \left(1 - \frac{f^2(x) + a^2}{2}\right)(a^2 - f^2(x))$$

根据 $f''(x)$ 的连续性可知, $f''(x)$ 在 $x = 0$ 的一个邻域内恒负, 因此 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 的一个邻域内严格单调递减, 向右端考虑最大的递减区间, 设

$$x_0 = \sup \{x > 0 | \forall t \in (0, x), f'(t) < 0\}$$

这里 x_0 一定为正数, 允许为无穷, 则在区间 $(0, x_0)$ 中成立

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sqrt{\left(1 - \frac{f^2(x) + a^2}{2}\right)(a^2 - f^2(x))}, \forall x \in [0, x_0) \\ \int_0^x \frac{f'(t)}{\sqrt{\left(1 - \frac{f^2(t) + a^2}{2}\right)(a^2 - f^2(t))}} dt &= \int_a^{f(x)} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{u^2 + a^2}{2}\right)(a^2 - u^2)}} du = -x \end{aligned}$$

条件 $a \in (0, 1)$ 以及 $|f(x)| \leq a$ 保证了上述积分一定是收敛的, 由此可知 x_0 一定是有限数, 否则从

$$x = \int_{f(x)}^a \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{u^2 + a^2}{2}\right)(a^2 - u^2)}} du \leq \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{u^2 + a^2}{2}\right)(a^2 - u^2)}} du$$

令 $x \rightarrow \infty$ 可知矛盾, 因为 x_0 是有限数, 根据确界定义 $f'(x_0) = 0$, 结合 $f(x)$ 单调性知 $f(x_0) = -a$, 所以

$$x_0 = \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{u^2 + a^2}{2}\right)(a^2 - u^2)}} du = 2 \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{u^2 + a^2}{2}\right)(a^2 - u^2)}} du$$

因为 $f(x_0) = -a, f'(x_0) = 0, f''(x_0) = a(1-a^2) > 0$, 所以 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 邻域内严格递增, 同上考虑 $x = x_0$ 右端 $f'(x) < 0$ 恒成立的最大区间, 记为 (x_0, x_1) , 同理 x_1 是有限数, 且在区间 $[x_0, x_1]$ 内成立

$$f'(x) = \sqrt{\left(1 - \frac{f^2(x) + a^2}{2}\right)(a^2 - f^2(x))}$$

积分得到

$$x_1 - x_0 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{f'(t)}{\sqrt{\left(1 - \frac{f^2(t) + a^2}{2}\right)(a^2 - f^2(t))}} dt = \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{u^2 + a^2}{2}\right)(a^2 - u^2)}} du = x_0$$

于是 $x_1 = 2x_0$, 并且在 $x = x_1$ 和 $x = 0$ 处满足相同的初值条件 $f(x_1) = f(0) = a, f'(x_1) = f'(0) = 0$ 和相同的方程 $f''(x) = -f(x) + f^3(x)$, 根据存在唯一性定理可知 $f(x)$ 是周期为 $2x_0$ 的函数, 显然

$$T(a) = 2x_0 = 4 \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{u^2 + a^2}{2}\right)(a^2 - u^2)}} du$$

就是 $f(x)$ 的最小正周期

下面来证明不等式和计算极限, 三角换元得到 $T(a) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - a^2 \frac{\sin^2 x + 1}{2}}} dx$

因此要证明的不等式

$$2\pi < T(a) < \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - a^2 \frac{\sin^2 x + 1}{2}}} dx < \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$$

左不等式利用 $\frac{1}{\sqrt{1 - a^2 \frac{\sin^2 x + 1}{2}}} > 1$ 积分即可得到, 右边不等式等价于

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1 - a^2 \frac{\sin^2 x + 1}{2}}} dx < \frac{\pi}{2}$$

利用

$$\frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1 - a^2 \frac{\sin^2 x + 1}{2}}} < 1 \Leftrightarrow 1 - a^2 < 1 - a^2 \frac{\sin^2 x + 1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x + 1}{2} < 1$$

知显然成立, 最后来求极限

因为被积函数作为二元函数, 在区域 $x \in [0, \frac{\pi}{2}], a \in [0, \frac{1}{2}]$ 中是连续的, 所以取极限换序有

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} T(a) = 4 \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - a^2 \frac{\sin^2 x + 1}{2}}} dx = 2\pi$$

对于 $a \rightarrow 1^-$ 的情况, 因为边界有奇点, 所以不能直接换序, 我们需要放缩:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - a^2 \frac{\sin^2 x + 1}{2}}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - a^2 (\cos^2 x + 1)}} dx \geq \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - a^2 \left(\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2 + 1 \right)}} dx \\ &\geq \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - a^2 (2 - x^2)}} dx = \frac{\sqrt{2}}{a} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{2-2a^2}{a^2} + x^2}} dx \geq \frac{\sqrt{2}}{a} \int_0^1 \frac{1}{x + \sqrt{\frac{2-2a^2}{a^2}}} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{a} \left(\ln \left(1 + \sqrt{\frac{2-2a^2}{a^2}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2-2a^2}{a^2} \right) \right) \rightarrow +\infty, a \rightarrow 1^- \end{aligned}$$

由此可知 $\lim_{a \rightarrow 1^-} T(a) = +\infty$

□

注释 6.2.2: 从证明过程来看, 本题似乎不需要事先知道 $f(x)$ 是周期函数, 我们可以用满足相同的初值条件和方程, 以及存在唯一性定理来证明 $f(x)$ 是周期函数, 并且求出来这个周期

过程中用的存在唯一性定理是高维 Picard 存在唯一性定理, 所谓高维是指一阶多元或者高阶一元的情况 (本题是高一元, 可以转化为一阶多元的情形套用定理, 所需条件是满足高维 Lipschitz 条件, 这里函数都是初等函数, 显然没有问题), 这个定理在柳斌常微分方程或者王高雄书上都有 (张伟年书没有)

过程中细节有一定的省略, 因为全写实在太多了

6.3 积分曲线与几何法

研究微分方程解的性质，我们可以画图分析，有些特殊的解或者曲线能够作为非常好用的“参考线”，因为解往往不可以触碰到这样的曲线，这样就限定了图像所在的区域，利用导数与函数的等式（微分方程），通常能够得到函数的单调性与值域等等，如此便可完成定性分析，解决问题，解的延拓问题一般也可以这样做

例题 6.3.1 证明：微分方程 $y' = (x^2 + y^2 + 1) \sin \pi y$ 的每一个解都是单调的，并且存在区间为 $\mathbb{R}$

证明. 对任意整数 n ，显然 $y = n$ 是解

设 $y(0) = a$ ，根据 Picard 存在唯一性定理知，如果 a 是整数，则 $y \equiv a$ ，自然是单调的且区间为 $\mathbb{R}$

如果 $n < a < n + 1$ ，则 $n < y(x) < n + 1$ 恒成立，因此 $y'(x)$ 定号，也即 $y(x)$ 严格单调且有界，故存在区间一定是 $\mathbb{R}$

□

例题 6.3.2 对任意 $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ ，证明：微分方程 $y' = (y^2 - 2y - 3)e^{(x+y)^2}$, $y(x_0) = y_0$ 的解的最大存在区间都一定是无穷区间.

证明. 作图分析，显然 $y = -1, y = 3$ 是两个解

设 $y(0) = a$ ，根据 Picard 存在唯一性定理知，对任意 a ，该微分方程的解都是局部存在唯一的，并且如果 $a = -1, 3$ ，则 y 恒为 -1 或者恒为 3

如果 $a > 3$ ，则 $y(x)$ 严格单调递增且 $y > 3$ 恒成立，故向左一定可以延拓到负无穷

如果 $-1 < a < 3$ ，则 $y(x)$ 严格单调递减且 $-1 < y < 3$ 恒成立，故存在区间是 $\mathbb{R}$

如果 $a < -1$ ，则 $y(x)$ 严格单调递增且 $y < -1$ 恒成立，故向右一定可以延拓到正无穷

□

6.4 解微分方程

这种问题通常是可以解微分方程“直接解出来”的，但是又不同于计算题，因为要考虑定义域，函数是否为零等等问题，并非形式求解，分离变量，直接积分结束

例题 6.4.1 设 $g(x) \in C(\mathbb{R})$ 恒正， n 为正整数，考虑微分方程 $y'(x) = y(x)^{\frac{1}{2n+1}} g(x)$, $y(x_0) = y_0$ ，证明：

1. 该方程有定义域为 $\mathbb{R}$ 的解（称为全局解）
2. 若 $y_0 = 0$ ，则该方程有无穷个全局解
3. 该方程的任何一个解 $y = y(x)$ ，在 $\mathbb{R}$ 上要么非负，要么非正。

证明. 除过来 $\frac{y'(x)}{y^{\frac{1}{2n+1}}(x)} = g(x)$ ，形式求解有

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{y'(t)}{y^{\frac{1}{2n+1}}(t)} dt &= \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{u^{\frac{1}{2n+1}}} du = \frac{2n+1}{2n} \left(y(x)^{\frac{2n}{2n+1}} - y_0^{\frac{2n}{2n+1}} \right) = \int_{x_0}^x g(t) dt \\ \Rightarrow y(x) &= \left(\frac{2n}{2n+1} \int_{x_0}^x g(t) dt + y_0^{\frac{2n}{2n+1}} \right)^{1+\frac{1}{2n}} \end{aligned}$$

问题在于分母是否为零，开方时候里面正负也不确定，下面是严格证明

1. 注意 $y(x)$ 是解等价于 $-y(x)$ 是解，因此不妨 $y_0 \geq 0$

记 $p(x) = \frac{2n}{2n+1} \int_{x_0}^x g(t) dt + y_0^{\frac{2n}{2n+1}}$ ，则 $p(x)$ 严格单调递增且 $p(x_0) \geq 0$ ，

如果 $p(-\infty) \geq 0$ ，则 $y(x) = p(x)^{1+\frac{1}{2n}}$ 是满足条件的全局解

如果 $p(-\infty) < 0$ ，则 $p(+\infty) > 0$ ，于是存在唯一的 a 使得 $p(a) = 0$ ，取 $y = \begin{cases} p(x)^{1+\frac{1}{2n}}, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases}$ 即可

2. 显然，对任意 $a \geq x_0$ ，取 $y = \begin{cases} p(x)^{1+\frac{1}{2n}}, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases}$ 即可

3. 若不然，不妨设 $a < b$ 使得 $y(a) < 0, y(b) > 0$ ，则存在 $c \in (a, b)$ 使得 $y(c) = 0$ ，根据条件有

$$(y^2(x))' = 2y(x)y'(x) = 2y^{\frac{2n+2}{2n+1}}(x)g(x) \geq 0$$

于是 $y^2(x)$ 单调递增，得到 $y(x)$ 在 (a, c) 中恒为零，矛盾

□

例 6.4.2 设 $p(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数且有唯一零点 $p(0) = 0$, 考虑微分方程 $y' = p(y), y(0) = 0$, 证明: 该方程在 $x = 0$ 附近只有零解等价于对充分小的 $\varepsilon > 0$, 两个反常积分 $\int_0^{\pm\varepsilon} \frac{1}{p(t)} dt$ 都发散

证明. 假设两个反常积分都发散, 但是该微分方程有非零解, 不妨设有 $x_0 > 0$ 使得 $y(x_0) > 0$, 然后考虑 $y(x)$ 在 $x = x_0$ 左端最大的恒正的区间, 注意 $y(0) = 0$, 所以区间左端点记为 $x_1 \geq 0$, 于是 $y(x)$ 在 $(x_1, x_0]$ 内恒正且 $y(x_1) = 0$, 除过来积分得到

$$\frac{y'(x)}{p(y(x))} = 1, \int_{x_1+\varepsilon}^{x_0} \frac{y'(t)}{p(y(t))} dt = \int_{y(x_1+\varepsilon)}^{y(x_0)} \frac{1}{p(u)} du = x_0 - x_1 - \varepsilon$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 利用条件可知矛盾

如果两个反常积分中有一个收敛, 不妨设 $p(x)$ 在 $x > 0$ 时恒正, 并且 $A = \int_0^\delta \frac{1}{p(t)} dt > 0$ 是有限数, 对任意 $x \in (0, A)$, 考虑函数 $f(u) = \int_0^u \frac{1}{p(t)} dt - x$, 则 $f(0) < 0, f(\delta) > 0$ 且 $f(x)$ 严格单调递增, 故存在唯一的 $y = y(x)$

使得 $\int_0^{y(x)} \frac{1}{p(t)} dt = x$, 显然 $y(x) > 0, \forall x \in (0, A)$

当 $x \leq 0$ 时定义 $y(x) = 0$, 下面证明由此定义的 $y(x)$ 是可导函数, 并且 $y' = p(y)$

对任意 $x_0 \in (0, A)$, 根据定义和积分中值定理得到

$$\int_0^{y(x)} \frac{1}{p(t)} dt = x, \int_0^{y(x_0)} \frac{1}{p(t)} dt = x_0 \Rightarrow \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{p(t)} dt = x - x_0 = \frac{1}{p(\xi)} (y(x) - y(x_0))$$

显然连续函数 $p(x)$ 在 $x = 0$ 附近是有界的, 因此上式表明 $y(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 而中值点 $\xi = \xi(x)$ 介于 $y(x), y(x_0)$ 之间, 因此令 $x \rightarrow x_0$ 就有

$$y'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} p(\xi(x)) = p(y(x_0))$$

同理可证 $y'(0) = p(y(0)) = 0$, 显然 $x < 0$ 时 $y'(x) = p(y(x)) = 0$, 这就证明了 $y(x)$ 满足条件, 并且是非零解

□

注释 6.4.1: 本题不能除过来积分这样子形式求解, 但是这个操作过程告诉了我们应该构造的函数, 也指引了证明的方向

6.5 杂题

例题 6.5.1 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数, $p(x) \in C^1(0,1)$, 证明:

- (1) 若 $p'(x) = f(p(x))$, 则 $p(x)$ 在 $(0,1)$ 中单调;
- (2) 若 $p(x) = f(p'(x))$, 则 $p(x)$ 在 $(0,1)$ 中上凸或者下凸.

证明. 1. 条件表明对任何 x, y , 只要 $p(x) = p(y)$, 就有 $p'(x) = p'(y)$

如果存在 $a < b$ 使得 $p(a) = p(b) = y_0$, 假如此时 $p'(a) > 0$, 则 $p'(b) = p'(a) > 0$, 于是函数 $p(x)$ 在区间 $[a, b]$ 的内点处取到最大值 M 和最小值 m , 满足 $m < y_0 < M$

用 $y = y_0$ 去截 $p(x)$, 考虑在区间 (a, b) 内截到的横坐标最大的交点, 记为 $(x_0, p(x_0))$, 则必有 $x_0 \in (a, b)$ 并且 $p(x_0) = p(a) = p(b)$, 根据确界定义知在区间 (x_0, b) 内恒有 $p(x) < p(x_0)$, 故 $p'(x_0) \leq 0$

但是根据题目条件有 $p'(x_0) = p'(a) > 0$, 导致矛盾, 同理可知 $p'(a) < 0$ 的情况也不能出现

这说明, 只要 $a, b \in (0, 1)$ 使得 $p(a) = p(b)$, 就必须有 $p'(a) = p'(b) = 0$

反证法, 若不单调, 则不妨设存在 $a < b$ 使得 $p'(a) > 0, p'(b) < 0$, 则 $p(x)$ 一定在某个内点 $c \in (a, b)$ 处取最大值 $p(c)$, 满足 $p(c) > p(a), p(b)$

显然 $p(a) \neq p(b)$, 否则 $p'(a) = p'(b) = 0$ 矛盾, 则不妨 $p(a) > p(b)$, 根据连续函数性质, 存在 $x_0 \in (c, b)$ 使得 $p(a) = p(x_0)$, 于是 $p'(a) = p'(x_0) = 0$, 矛盾

2. 条件表明只要 $p'(x) = p'(y)$, 就有 $p(x) = p(y)$, 希望证明 $p'(x)$ 是单调的

如果 $p(x)$ 有两个不同的极值 $y_1 = p(x_1), y_2 = p(x_2), y_1 \neq y_2$, 则 $p'(x_1) = p'(x_2) = 0$, 所以 $p(x_1) = p(x_2)$ 导致矛盾, 这说明 $p(x)$ 至多有一个极值

进一步的, 如果存在 $a < b$ 使得 $p'(a) = p'(b)$ 非零, 则不妨设 $p'(a) = p'(b) > 0$, 故 $p(x)$ 可以在 $[a, b]$ 的内点处取到最大值和最小值, 且都不同于端点值, 这会导致 $p(x)$ 至少有两个极值, 矛盾, 因此只要 $p'(a) = p'(b)$, 就必须有 $p(a) = p(b)$ 且 $p'(a) = p'(b) = 0$

如果 $p'(x)$ 不单调, 则不妨设 $a < b < c$ 使得 $p'(a) > p'(b) < p'(c)$, 进一步不妨 $p'(a) \leq p'(c)$, 在区间 $(p'(b), p'(a))$ 中任取一个非零数字 y_0 , 用 $y = y_0$ 去截 $p'(x)$, 根据 $p'(x)$ 连续性知存在 $u \in (a, b), v \in (b, c)$ 使得 $p'(u) = p'(v) = y_0 \neq 0$, 与前面推出的结论矛盾, 故得证

□

例题 6.5.2 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 中恒正且单调递增, $g(x) \in C^2[0, +\infty)$ 满足 $g''(x) + f(x)g(x) = 0$ 恒成立, 证明: 函数 $g(x), \frac{g'^2(x)}{f(x)}$ 都是有界函数.

证明. 形式推导 (假定 $f(x)$ 是连续可导的) 有

$$\begin{aligned} g''(x) + g(x)f(x) &= 0, \frac{g''(x)g'(x)}{f(x)} + g(x)g'(x) = 0 \\ \int_0^x \frac{2g''(t)g'(t)}{f(t)} dt + \int_0^x 2g(t)g'(t) dt &= \int_0^x \frac{1}{f(t)} dg'^2(t) + g^2(x) - g^2(0) \\ &= \frac{g'^2(x)}{f(x)} - \frac{g'^2(0)}{f(0)} - \int_0^x g'^2(t) \left(\frac{1}{f(t)} \right)' dt + g^2(x) - g^2(0) = 0 \\ \Rightarrow \frac{g'^2(x)}{f(x)} + g^2(x) &= \frac{g'^2(0)}{f(0)} + g^2(0) + \int_0^x g'^2(t) \left(\frac{1}{f(t)} \right)' dt \leq \frac{g'^2(0)}{f(0)} + g^2(0) \end{aligned}$$

由此可知两个函数都是有界的, 但是问题在于 $f(x)$ 缺少光滑性, 需要回避

根据积分第二中值定理有

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{2g''(t)g'(t)}{f(t)} dt &= \frac{1}{f(0)} \int_0^\xi 2g''(t)g'(t) dt + \frac{1}{f(x)} \int_\xi^x 2g''(t)g'(t) dt \\ &= \frac{1}{f(0)} (g'^2(\xi) - g'^2(0)) + \frac{1}{f(x)} (g'^2(x) - g'^2(\xi)) \\ &= \frac{g'^2(x)}{f(x)} - \frac{g'^2(0)}{f(0)} + g'^2(\xi) \left(\frac{1}{f(0)} - \frac{1}{f(x)} \right) \geq \frac{g'^2(x)}{f(x)} - \frac{g'^2(0)}{f(0)} \end{aligned}$$

由此可知结论得证

□

注释 6.5.1: 必须要把 $f(x)$ 除过来然后再积分, 直接积分做的话会做不出来, 不等号方向不对

例题 6.5.3 考虑微分方程 $x''(t) + P(t)x(t) = 0$, 这里 $P(t)$ 是连续函数, 且有自然数 n 使得 $n^2 < P(t) < (n+1)^2$, 证明: 该微分方程的任何一个非零解 $x(t)$ 都不是以 2π 为周期的函数.

证明. 反证法, 假设存在一个周期为 2π 的解 $x(t)$

先证明 $x(t)$ 一定有零点, 若不然, 不妨设 $x(t)$ 恒正, 则根据条件知 $x''(t)$ 恒负, 故 $x(t)$ 严格上凸, 但是 $x(0) = x(2\pi) = x(4\pi)$, 这与严格上凸的性质矛盾

因此 $x(t)$ 有零点, 进而有无穷个零点, 并且这些零点一定都是孤立的

根据周期性有

$$x''(t) + P(t)x(t) = 0, x''(t+2\pi) + P(t+2\pi)x(t+2\pi) = x''(t) + P(t+2\pi)x(t) = 0$$

所以 $x(t)(P(t+2\pi) - P(t)) = 0, \forall t$, 利用连续性和零点孤立性知 $P(t)$ 也是周期为 2π 的函数, 而 $P(t)$ 连续, 结合条件可知, 存在 $\delta > 0$ 使得 $(n+\delta)^2 < P(t) < (n+1-\delta)^2, \forall t$

考虑微分方程 $y'' + Py$ 和微分方程 $y'' + (n+1-\delta)^2 y = 0$, 根据 Sturm 比较定理, 对于 $x(t)$ 的任何两个相邻零点 a, b 和任意常数 C , 函数 $\sin((n+1-\delta)x + C)$ 都会有一个零点在区间 $[a, b]$ 中, 结合 C 的任意性可知, 必有 $b-a \geq \frac{\pi}{n+1-\delta}$, 也即任何两个相邻零点的距离都至少是 $\frac{\pi}{n+1-\delta}$

考虑微分方程 $y'' + (n+\delta)^2 y = 0$ 和微分方程 $y'' + Py$, 根据 Sturm 比较定理, 对于任意常数 C 和 $\sin((n+\delta)x + C)$ 的任何两个相邻零点 a, b , 函数 $x(t)$ 都会有一个零点在区间 $[a, b]$ 中, 结合 C 的任意性可知, 在任何长为 $\frac{\pi}{n+\delta}$ 的区间中, 都一定有一个 $x(t)$ 的零点, 因此 $x(t)$ 任何两个相邻零点的距离不超过 $\frac{\pi}{n+\delta}$

因此, 对任何 $x(t)$ 的两个相邻零点 $a < b$, 都有 $\frac{\pi}{n+1-\delta} \leq b-a \leq \frac{\pi}{n+\delta}$, 显然 $x'(a), x'(b)$ 均非零 (否则根据存在唯一性定理可知 $x(t)$ 恒为零), 根据相邻零点得到 $x'(a), x'(b)$ 一正一负

设 $x(t_0) = x(t_0 + 2\pi) = 0$, 将区间 $[t_0, t_0 + 2\pi]$ 中的零点从小到大依次记为 $t_0, t_1, \dots, t_N, (t_N = t_0 + 2\pi)$, 根据周期性知 $x'(t_0) = x'(t_N)$, 所以 $N = 2m$ 一定是偶数, 进而

$$\frac{\pi}{n+1-\delta} \leq t_{k+1} - t_k \leq \frac{\pi}{n+\delta}, k = 0, 1, \dots, 2m-1$$

不等式相加得到

$$2m \frac{\pi}{n+1-\delta} \leq 2\pi \leq 2m \frac{\pi}{n+\delta} \Rightarrow n+\delta \leq m \leq n+1-\delta$$

与 m 是正整数矛盾, 结论得证 $\square$

注释 6.5.2: 如果 $n \geq 1$, 则实际上不需要引入 $\delta > 0$, 直接做即可

6.6 练习题

习题 6.6.1 设初值问题 $\frac{dx}{dt} = \cos(\mu tx)$, $x(t_0) = x_0$ 的解是 $x = f(t; t_0, x_0, \mu)$, 求 $\frac{\partial f}{\partial t_0} \big|_{\mu=0}$, $\frac{\partial f}{\partial x_0} \big|_{\mu=0}$, $\frac{\partial f}{\partial \mu} \big|_{\mu=0}$

习题 6.6.2 给定方程 $\frac{dx}{dt} = \sin(tx)$, 求 $\frac{\partial x}{\partial t_0}(t; t_0, x_0)$ 和 $\frac{\partial x}{\partial x_0}(t; t_0, x_0)$ 在 $t_0 = 0, x_0 = 0$ 处的表达式, 并证明若 $\varphi(t, \eta)$ 是方程满足初值条件 $x(0) = \eta$ 的解, 则恒有 $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(t, \eta) > 0$.

习题 6.6.3 设 $y(x)$ 可导且满足 $y'^2(x) = 4 - y^2(x)$, 求所有的 $y(x)$.

习题 6.6.4 设 $f(x, y)$ 定义在 $\mathbb{R}^2$ 上且关于 y 递减, $y = y(x), z = z(x)$ 满足 $y' = f(x, y), z' = f(x, z), \forall x \in [a, b]$, 若 $z(a) \leq y(a)$, 证明: $z(x) \leq y(x)$ 恒成立.

习题 6.6.5 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导且非负, 满足条件 $f'(x) = f(f(x))$, 证明: $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

习题 6.6.6 设连续函数 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 中递减且恒正, 定义数列 $x_0 > 0, x_{n+1} = x_n + g(x_n)$, 函数 $p(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 中满足方程 $p'(x) = g(p(x)), p(0) = x_0$, 证明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $x_n \rightarrow +\infty$, 且 $x_n = p(n) + O(1)$.

习题 6.6.7 设两个线性无关的函数 $f(x), g(x) \in C^1[0, 1]$ 且 $f(x)g'(x) = f'(x)g(x)$ 恒成立, 证明: 存在 $a \in [0, 1]$ 使得 $f(a) = f'(a) = g(a) = g'(a) = 0$.

习题 6.6.8 考虑微分方程 $y' = f(x, y)$, 其中函数 $f(x, y)$ 在条形区域 $D: a < x < b, -\infty < y < +\infty$ 内连续, 并且满足 $|f(x, y)| \leq A(x)|y| + B(x)$, 这里 $A(x) \geq 0$ 和 $B(x) \geq 0$ 在区间 (a, b) 上连续. 证明: 方程每个解的存在区间均为 (a, b) .

第七章 多项式

多项式部分基本都是高考问题，常用的性质主要是：多项式的带余除法、整除与互素、标准分解式、韦达定理（这些应该在高中熟知）、艾森斯坦判别法，高斯引理，此外还有一个高中不学并且大学许多教材也不讲的精彩结论：分圆多项式，需要掌握

结式，判别式，多元多项式有关的问题考察很少，知道课本基本结果即可，核心要点是：多元多项式环是唯一分解整环、对称多项式可以写成初等对称多项式的多项式、结式是系数构成的行列式，可以作为充要条件判定多项式是否存在公共根，判别式是根两两作差乘积的平方，可以反映多项式是否有重根，因此它与 $f(x), f'(x)$ 的结式基本相同，只差一个系数

这里只列出分圆多项式相关的结论（证明较难，略，可自行知乎搜索），其他基础知识课本均有

定理 7.0.1: 分圆多项式

对正整数 n ，记 $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 为 n 次单位根，定义 $\Phi_n(x) = \prod_{(k,n)=1} (x - w^k)$ 为 n 阶分圆多项式，则有

1. $\Phi_n(x)$ 是首一整系数多项式；2. $\Phi_n(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 中不可约；3. $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$

注意，只有当 $n = p$ 是素数时候，才可以简单的用艾森斯坦判别法证明不可约，其余是深刻的结果

注意，证明多项式不可约的方法一定不只是艾森斯坦判别法，还有很多其他手段，主要包括：直接设分解式对比系数、考虑分解出来的多项式具备的性质、考察方程的根，只有简单题才是可以无脑艾森斯坦判别法做出来的

7.1 基本问题

例题 7.1.1 设 $f(x) = 3x^5 + 2x + 4$ ，证明：

- (1) 对任意整数 b , $f(x+b)$ 都无法用 Eisenstein 判别法证明其在有理数域上不可约；
- (2) $f(x)$ 在有理数域上不可约。

证明. (1) 对任意整数 b ，代入展开有

$$f(x+b) = 3(x+b)^5 + 2(x+b) + 4 = 3x^5 + 15bx^4 + 30b^2x^3 + 30b^3x^2 + (15b^4 + 2)x + 3b^5 + 2b + 4$$

如果可以用艾森斯坦判别法，则存在素数 p 使得

$$\begin{aligned} p|3b^5 + 2b + 4, p|15b^4 + 2, p|15b, p \nmid 3, p^2 \nmid 3b^5 + 2b + 4 \\ p|15b^4 + 2, p|15b \Rightarrow p = 2, 2|15b \Rightarrow 2|b \Rightarrow 4|3b^5 + 2b + 4 \end{aligned}$$

导致矛盾

- (2) 显然没有有理根，因为有理根 $x = \frac{q}{p}$ 必须满足 $p|3, q|4$ 并且 $x < 0$ ，枚举易知不行（反证法）所有可能的分解就两种，可以设为

$$\begin{aligned} (1) : 3x^5 + 2x^4 + 4 &= (x^3 + ax^2 + bx + c)(3x^2 + mx + n) \\ (2) : 3x^5 + 2x^4 + 4 &= (3x^3 + ax^2 + bx + c)(x^2 + mx + n) \end{aligned}$$

第一个去看 x^4, x^3 项的系数为零就能立刻算出来 m, n ，如下

$$(1) : 3x^5 + 2x^4 + 4 = (x^3 + ax^2 + bx + c)(3x^2 - 3ax + 3a^2 - 3b)$$

直接矛盾了，因为常数项对不上

第二个去看 x^4, x^3, x^2 项的系数均为零就能算出来 a, b, c ，如下

$$\begin{aligned} a &= -3m \\ b &= -am - 3n = 3m^2 - 3n \\ c &= -bm - an = -m(3m^2 - 3n) + 3mn \end{aligned}$$

发现 c 是 3 的倍数，于是常数项又对不上了，矛盾

□

例题 7.1.2 设 a_1, a_2, a_3 是多项式 $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ 的三个根, $g(x) = x^2 + x + 1$, 求以 $g(a_1), g(a_2), g(a_3)$ 为根有理系数多项式

证明. 方法一: 要计算的东西可以看成行列式

$$(x - g(a_1))(x - g(a_2))(x - g(a_3)) = \left| xI - g \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix} \right|$$

显然 $f(x)$ 不可约, 考虑有理标准形可知 $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, 于是

$$\left| xI - g \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix} \right| = \left| xI - g \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right| = \left| xI - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = x^3 - x^2 - x - 1$$

这就是要计算的多项式

方法二: 记 $b = a^2 + a + 1$, 根据条件写成矩阵乘法有 $b(1, a, a^2) = (1, a, a^2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

所以对任意多项式 $m(x)$ 有 $m(b)(1, a, a^2) = (1, a, a^2) m \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

因此计算右边矩阵的极小多项式或者特征多项式即可, 结果同上

□

注释 7.1.1: 两个方法没有本质区别, 无非是方法二好算一些

例题 7.1.3 设 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ 互不相同, 证明: $f(x) = (x - a_1)^2(x - a_2)^2 \dots (x - a_n)^2 + 1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证明. 反证法, 如果可约, 则存在整系数多项式 $g(x), h(x)$ 使得

$$(x - a_1)^2(x - a_2)^2 \dots (x - a_n)^2 + 1 = g(x)h(x)$$

由此可见 $g(x), h(x)$ 都没有零点, 并且 $g(a_i)h(a_i) = 1$, 所以只能 $g(a_i) = h(a_i) = 1, \forall 1 \leq i \leq n$ 或者 $g(a_i) = h(a_i) = -1, \forall 1 \leq i \leq n$, 不妨设为前者成立

如果 $g(x), h(x)$ 里面有一个次数不超过 $n - 1$, 则根据上式只能这个多项式恒等于 1, 矛盾, 所以 $g(x), h(x)$ 均为 n 次多项式

注意能 $g(a_i) = h(a_i) = 1, \forall 1 \leq i \leq n$ 并且 $g(x)h(x)$ 是首一整系数多项式, 且恒正, 所以只能 $g(x) = h(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) + 1$, 将其代入验证显然矛盾

故不可约

□

例题 7.1.4 设 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ 是整系数多项式且 $|a_0| > \sum_{i=1}^n |a_i|$. 如果 a_0 为素数或 $\sqrt{|a_0|} - \sqrt{|a_n|} < 1$, 证明 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

证明. 对 $f(x) = 0$ 的任何复数根 x , 如果 $|x| < 1$ 则有

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \Rightarrow |a_0| \leq |a_n| |x|^n + \dots + |a_1| |x| \leq |a_n| + \dots + |a_1|$$

与条件矛盾, 所以 $f(x) = 0$ 的所有根都在单位圆之外

假设 $f(x) = g(x)h(x)$ 分解为了两个整系数多项式乘积, 若 a_0 是素数, 则可以设

$$f(x) = (b_m x^m + \dots + b_1 x + 1)(c_k x^k + \dots + c_1 x + p)$$

考虑第一个因子的所有根, 由韦达定理可知 $|x_1 \dots x_m| = \frac{1}{|b_m|} \leq 1$ 与所有根模长大于 1 矛盾

如果 $\sqrt{|a_0|} - \sqrt{|a_n|} < 1$, 则同样设

$$f(x) = (b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0)(c_k x^k + \dots + c_1 x + c_0)$$

设分解出来第一个多项式的根为 $x_1, \dots, x_m$, 第二个多项式的根为 $y_1, \dots, y_k$, 则有

$$|x_1 \dots x_m| = \left| \frac{b_0}{b_m} \right| > 1, |y_1 \dots y_k| = \left| \frac{c_0}{c_k} \right| > 1 \Rightarrow |b_0| \geq |b_m| + 1, |c_0| \geq |c_k| + 1$$

根据条件有

$$1 + \sqrt{|a_n|} > \sqrt{|a_0|} = \sqrt{|b_0 c_0|} \geq \sqrt{(1 + |b_m|)(1 + |c_k|)} \geq 1 + \sqrt{|b_m c_k|} = 1 + \sqrt{|a_n|}$$

导致矛盾, 所以不可约

□

例题 7.1.5 1. 设 n 为正整数, $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)$ 都是数域 P 上的多项式, 并且 $x^n - 1 \mid f_0(x^n) + xf_1(x^n) + \dots + x^{n-1}f_{n-1}(x^n)$, 证明 $x - 1 \mid f_i(x), i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

2. 设 $n \geq 2$ 是正整数, 多项式 $f_1(x), \dots, f_n(x)$ 满足

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1 \mid f_1(x^n) + xf_2(x^n) + \dots + x^{n-1}f_n(x^n)$$

证明: 存在常数 c 使得 $(x-1)^n \mid \prod_{i=1}^n (f_i(x) - c)$

证明. 1. 设 $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 是 n 次单位根, 对任意 $1 \leq k \leq n$ 代入有 $f_0(1) + \varepsilon^k f_1(1) + \dots + \varepsilon^{k(n-1)} f_{n-1}(1) = 0$, 也即

$$\begin{cases} f_0(1) + f_1(1) + \dots + f_{n-1}(1) = 0 \\ f_0(1) + \varepsilon f_1(1) + \dots + \varepsilon^{n-1} f_{n-1}(1) = 0 \\ \dots \\ f_0(1) + \varepsilon^{n-1} f_1(1) + \dots + \varepsilon^{(n-1)^2} f_{n-1}(1) = 0 \end{cases}$$

系数矩阵对应范德蒙德行列式, 所以只有零解, 故 $x-1 \mid f_i(x)$ 对 $0 \leq i \leq n-1$ 都成立

2. 记 $c = \frac{f_1(1) + \dots + f_n(1)}{n}$, $g_i(x) = f_i(x) - c$, 则根据定义有 $g_1(1) + \dots + g_n(1) = 0$

结合条件可知, 代入 $x = \varepsilon^k, k = 1, 2, \dots, n-1$ 可以得到与前面一样的 $n-1$ 个方程, 于是总共有 n 个方程, 同样由范德蒙德行列式知只有零解, 这就说明了 $g_1(1) = \dots = g_n(1) = 0$, 也即 $f_i(1) = c, \forall 1 \leq i \leq n$, 结论得证 $\square$

注释 7.1.2: 如果第二问和前面一样做, 会发现少一个方程, 因此需要待定系数自己引入常数 c 补上最后一个方程

7.2 综合问题

例 7.2.1 设 $n = 2024$, V 是全体次数不超过 $n-1$ 的多项式构成的线性空间, 设 $f(x), g(x)$ 是 n 次首一多项式, 定义 V 上的线性变换 T_1, T_2 为 $T_1(h) = fh$ 除以 g 的余式, $T_2(h) = gh$ 除以 f 的余式, $\forall h \in V$, 证明: $\det T_1 = \det T_2$

证明. 方法一: 取一组基 $1, x, \dots, x^{n-1}$, 先关注 T_1 , 则带余除法有 $x^k f(x) = q_k(x)g(x) + r_k(x)$, 说明各个 $r_k(x)$ 即为 x^k 在 T_1 作用之下的像, 移项得到 $q_k(x)g(x) = x^k f(x) - r_k(x)$, 观察这个等式可知, 各个 $-r_k(x)$ 就是 $q_k(x)$ 在 T_2 作用下的像, 我们来看 $q_k(x)$ 和 x^k 之间的关系

显然 $q_k(x)$ 是首一的 k 次多项式, 因此

$$(q_0(x), q_1(x), \dots, q_{n-1}(x)) = (1, x, \dots, x^{n-1}) \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = (1, x, \dots, x^{n-1}) C$$

这里 C 是对角线全是 1 的上三角矩阵, 进而各个 $q_k(x)$ 也是一组基, 所以

$$\begin{aligned} T_1(1, x, \dots, x^{n-1}) &= (r_0(x), r_1(x), \dots, r_{n-1}(x)) = (1, x, \dots, x^{n-1}) M \\ T_2(q_0(x), q_1(x), \dots, q_{n-1}(x)) &= -(r_0(x), r_1(x), \dots, r_{n-1}(x)) = (1, x, \dots, x^{n-1}) (-M) \\ \Rightarrow T_2(1, x, \dots, x^{n-1}) &= (1, x, \dots, x^{n-1}) (-MC^{-1}) \end{aligned}$$

这样就得到了表示矩阵, 因此 $\det T_1 = |M|$, $\det T_2 = |-MC^{-1}| = (-1)^n |M|$, 结论得证

方法二: 对一般的正整数 n , 实际上可以准确算出来这两个线性变换的行列式

设

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - a_1)^{p_1} (x - a_2)^{p_2} \dots (x - a_m)^{p_m} \\ g(x) &= (x - b_1)^{q_1} (x - b_2)^{q_2} \dots (x - b_k)^{q_k} \end{aligned}$$

这里 $a_1, \dots, a_m$ 两两不同, $b_1, \dots, b_k$ 两两不同, 各个 p_i, q_i 是正整数, 并且 $f(x), g(x)$ 均为首一 n 次多项式

先来计算 T_1 的表示矩阵, 考虑 Hermite 插值, 因为 T_1 是要计算除以 $g(x)$ 的余式, 所以取一组关于 $g(x)$ 的基函数为

$$\begin{aligned} &l_{1,0}(x), l_{1,1}(x), \dots, l_{1,q_1-1}(x) \\ &l_{2,0}(x), l_{2,1}(x), \dots, l_{2,q_2-1}(x) \\ &\dots \\ &l_{k,0}(x), l_{k,1}(x), \dots, l_{k,q_k-1}(x) \end{aligned}$$

这里各个 $l_{i,j}(x)$ 都是次数不超过 $n-1$ 的多项式, 满足: $l_{i,j}(x)$ 在 b_i 处的 $j-1$ 阶导数为 1, 在 b_i 处的其余各阶导数以及在其余 b_t 处的各阶导数均为零

显然这些 $l_{i,j}(x)$ 线性无关, 因此它们构成了 $n-1$ 次多项式空间的一组基, 下面求 T_1 在这组基下的表示矩阵我们以各个 $l_{1,i}(x)$ 为例, 考虑带余除法, 并注意 b_1 是 $g(x)$ 的 q_1 重根, 结合乘积的求导法则可以得到

$$\begin{aligned} l_{1,0}(x) f(x) &= u(x) g(x) + r(x) \\ r(b_1) &= l_{1,0}(b_1) f(b_1) = f(b_1) \\ r'(b_1) &= l_{1,0}'(b_1) f(b_1) + l_{1,0}(b_1) f'(b_1) = f'(b_1) \\ r''(b_1) &= l_{1,0}(b_1) f''(b_1) = f''(b_1) \\ &\dots \\ r^{(q_1-1)}(b_1) &= l_{1,0}(b_1) f^{(q_1-1)}(b_1) = f^{(q_1-1)}(b_1) \end{aligned}$$

同时 $r(x)$ 在其余各个 b_i 的 j 阶导数均为零, 注意各个 $l_{i,j}(x)$ 是一组基同时 $\deg r(x) \leq n-1$, 所以

$$r(x) = f(b_1)l_{1,0}(x) + f'(b_1)l_{1,1}(x) + \dots + f^{(q_1-1)}(b_1)l_{1,q_1-1}(x)$$

这就是线性变换 T_1 在 $l_{1,0}(x)$ 上的作用结果, 类似的往下算, 容易得到

$$\begin{aligned} l_{1,1}(x)f(x) &= u(x)g(x) + r(x) \\ r(b_1) &= 0, r'(b_1) = l_{1,1}'(b_1)f(b_1) = f(b_1) \\ r''(b_1) &= 2l_{1,1}'(b_1)f'(b_1) = 2f'(b_1), \dots \\ r^{(q_1-1)}(b_1) &= (q_1-1)l_{1,1}'(b_1)f^{(q_1-2)}(b_1) = (q_1-1)f^{(q_1-2)}(b_1) \end{aligned}$$

同样这个 $r(x)$ 在其余各个 b_i 的 j 阶导数均为零, 所以

$$r(x) = f(b_1)l_{1,1}(x) + 2f'(b_1)l_{1,2}(x) + \dots + (q_1-1)f^{(q_1-2)}(b_1)l_{1,q_1-1}(x)$$

这就是线性变换 T_1 在 $l_{1,1}(x)$ 上的作用结果

以此类推, 有

$$r_i(x) = f(b_1)l_{1,i}(x) + (i+1)f'(b_1)l_{1,i+1}(x) + \dots + C_{q_1-1}^i f^{(q_1-1-i)}(b_1)l_{1,q_1-1}(x)$$

这就是线性变换 T_1 在 $l_{1,i}(x)$ 上的作用结果

由此可见, 线性变换 T_1 , 单看上面这些 $l_{1,i}(x)$, 对应的矩阵会是一个下三角矩阵, 并且对角线上元素全为 $f(b_1)$, 是一个 q_1 阶方阵, 对角线下方由各阶导数构成, 具体系数不重要

因此, 线性变换 T_1 在

$$(l_{1,0}(x), l_{1,1}(x), \dots, l_{1,q_1-1}(x), l_{2,0}(x), l_{2,1}(x), \dots, l_{2,q_2-1}(x), \dots, l_{k,0}(x), l_{k,1}(x), \dots, l_{k,q_k-1}(x))$$

这组基下, 相应的表示矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_k \end{pmatrix}, M_i = \begin{pmatrix} f(b_i) & & \\ & \ddots & \\ * & & f(b_i) \end{pmatrix}$$

所以行列式 $\det T_1 = \prod_{i=1}^k f(b_i)^{q_i}$, 也就是说, 线性变换 T_1 的行列式就是将多项式 $f(x)$ 代入 $g(x)$ 的根, 并计算

乘积, 同理可知 $\det T_2 = \prod_{j=1}^m g(a_j)^{p_j}$, 由此可见, 一般的, 我们如果设

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-u_1)(x-u_2)\dots(x-u_n) \\ g(x) &= (x-v_1)(x-v_2)\dots(x-v_n) \end{aligned}$$

这里允许各个 u_i, v_j 相同, 则有

$$\begin{aligned} \det T_1 &= \prod_{i=1}^n f(v_i) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (v_i - u_j) = \prod_{i,j=1}^n (v_i - u_j) \\ \det T_2 &= \prod_{i=1}^n g(u_i) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (u_i - v_j) = (-1)^{n^2} \prod_{i,j=1}^n (v_i - u_j) \\ \Rightarrow \det T_1 &= (-1)^n \det T_2 \end{aligned}$$

可以看到, 恰好两个线性变换的行列式就是多项式 $f(x), g(x)$ 的结式 $\text{Res}(f, g)$, 并且差一个负号

□

例题 7.2.2 对任意正整数 $n \geq 2$, 判断多项式 $x^n + x - 1, x^n - x - 1$ 这两个多项式的可约性.

证明. 这类问题需要考虑“互易多项式”来解决, 也就是系数反序排列对应的多项式

对于 n 次多项式 $f(x)$, 称 $f^*(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$ 为 $f(x)$ 的互易多项式, 则有以下关键引理

引理 7.2.1: 设 $f(x)$ 是 n 次整系数多项式且 $f(0) \neq 0$, $f(x)$ 与 $f^*(x)$ 无公共根, 如果存在整系数多项式 $g(x), h(x)$ 使得 $f(x) = g(x)h(x)$, 则存在不等于 $\pm f(x), \pm f^*(x)$ 的 n 次整系数多项式 $k(x)$ 使得 $f(x)f^*(x) = k(x)k^*(x)$, 进一步, 如果 $f(x)$ 首一并且 $f(0) = \pm 1$, 则可以取上述 $k(x)$ 为首一多项式.

因为

$$f(x)f^*(x) = g(x)h(x)g^*(x)h^*(x) = (g(x)h^*(x))(g(x)h^*(x))^*$$

所以取 $k(x) = g(x)h^*(x)$ 就有 $f(x)f^*(x) = k(x)k^*(x)$, 从 $f(0) \neq 0$ 可知 $\deg h(x) = \deg h^*(x)$, 于是 $k(x)$ 是 n 次整系数多项式, 如果 $k(x) = \pm f(x), \pm f^*(x)$, 则

$$g(x)h^*(x) = \pm g(x)h(x), \pm g^*(x)h^*(x) \Rightarrow g(x) = \pm g^*(x), h(x) = \pm h^*(x)$$

不论哪种情况, 都会导致 $f(x), f^*(x)$ 有公共根, 矛盾

显然当 $f(x)$ 首一并且 $f(0) = \pm 1$ 时, 如上定义的 $k(x)$ 首项系数为 ± 1 , 因此可以取为首一的

注意: 互易多项式相乘之后有一项的系数非常特殊, 刚刚好是各项系数的平方和:

$$(a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0)(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n) = (a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2)x^n + \dots$$

回到原题, 对于 $f(x) = x^n - x - 1$, 则 $f^*(x) = -x^n - x^{n-1} + 1$, 如果它们有公共根, 则

$$\begin{cases} x^n - x - 1 = 0 \\ -x^n - x^{n-1} + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^n = x + 1 \\ x^n + x^{n-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow x^{n-2} = -1, x^n = -x^2 = x + 1, x^3 = 1$$

容易知道是矛盾的, 进而它们无公共根, 假如 $f(x)$ 可约, 则根据引理知道存在 $k(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ 使得 $k(x)k^*(x) = f(x)f^*(x)$, 展开有

$$k(x)k^*(x) = (x^n - x - 1)(-x^n - x^{n-1} + 1) = -x^{2n} - x^{2n-1} + x^{n+1} + 3x^n + x^{n-1} - x - 1$$

对比 x^n 项系数可知 $k(x)$ 只含有三项, 进而形如 $x^n + a_k x^k - 1$, 同时这个多项式不等于 $\pm f(x), \pm f^*(x)$, 代入验证易知矛盾

对于多项式 $f(x) = x^n + x - 1$, 检查 $f^*(x) = -x^n + x^{n-1} + 1$ 与 $f(x)$ 的公共根情况, 可知当且仅当 $n = 5$ 时它们有公共根, 于是 $n \neq 5$ 时, 同上操作可知, 一旦可约, 就会存在 $k(x) = x^n + a_k x^k - 1$ 这样的多项式使得 $k(x)k^*(x) = f(x)f^*(x)$, 同时这个多项式不等于 $\pm f(x), \pm f^*(x)$, 展开易知矛盾

而 $n = 5$ 时恰好可以因式分解: $x^5 + x - 1 = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1)$

□

7.3 练习题

习题 7.3.1 设 $f(x_1, \dots, x_n)$ 是 n 元反对称多项式, 也即交换任意两个变量位置, 多项式都会改变正负号, 证明: 存在对称多项式 $g(x_1, \dots, x_n)$ 使得

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

习题 7.3.2 对任意正整数 $n \geq 2$, 判断多项式 $x^n + x + 1, x^n - x + 1$ 这两个多项式的可约性.

习题 7.3.3 设 $f(x)$ 是 m 次多项式, 证明: 存在次数不超过 $m+1$ 的多项式 $F(x)$, 使得 $F(n) = f(0) + f(1) + \dots + f(n-1)$ 对任意正整数 n 恒成立

习题 7.3.4 设 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ 互不相同, 判断 $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) + 1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的可约性.

习题 7.3.5 设 $f(x)$ 为次数不小于 1 的实系数多项式, k 为实数, 并且 $f(x)$ 的每个复根的实部都小于 $k - \frac{1}{2}$. 证明: $|f(k-1)| < |f(k)|$.

习题 7.3.6 求大于 2020 的最小正整数 n 使得 $(x^6 + x^4)^n - x^{4n} - x^6 = (x^4 + x^2 + 1)g(x)$, 其中 $g(x)$ 为整系数多项式.

习题 7.3.7 设 $p = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + a_0, a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ 为素数, 证明: 多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ 在 $\mathbb{Q}$ 中不可约.

第八章 矩阵

本期矩阵专题主要围绕高代 1 展开，因此不涉及 Jordan 标准型，二次型和内积空间（谢起鸿第 7,8,9 章），特征值部分也只是稍有涉及。高代 2 的标准型理论对于研究矩阵有着非常重要的作用，而高代 1 中学习的标准型就只有相抵标准型，所以这一节将回避掉与相似或者合同标准型有关的题目，留到下一期讲。注意：考研与竞赛当中高代 1 和高代 2 同等重要，并非大多数问题都依赖于标准型理论，所以都需要重视。

本专题将用四次课讲完，其中行列式部分除去掌握基本方法外，还应熟悉著名矩阵的行列式结果（因为很常用），主要是范德蒙德矩阵，柯西矩阵还有循环矩阵，课本上通常只有这些矩阵的行列式结果，并没有其逆矩阵相关的内容，实际上它们的逆矩阵都是可以求出来的，只不过比较复杂（也不需要记住，背下来行列式的结论，知道逆矩阵的推导方法就可以了），下面是相应的基础知识补充：

命题 8.0.1: 范德蒙德矩阵

$$\text{方阵 } V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \text{ 称为范德蒙德矩阵, 其行列式为 } |V| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

注释 8.0.1: 逆矩阵可以用插值的方法算出来，其 (i, j) 元是多项式 $g_j(t) = \prod_{k \neq j} \frac{t - x_k}{x_j - x_k}$ 中 t^{i-1} 项的系数。

命题 8.0.2: 柯西矩阵

方阵 $C = \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{n \times n}$ 称为柯西矩阵，其逆矩阵的 (i, j) 元记为 $C^{-1}(i, j)$ ，则有

$$|C| = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i, j=1}^n (a_i + b_j)}, C^{-1}(i, j) = \frac{\prod_{p=1}^n (a_j + b_p)(b_i + a_p)}{(a_j + b_i) \prod_{p \neq j} (a_j - a_p) \prod_{p \neq i} (b_i - b_p)}$$

并且矩阵 C^{-1} 的各个全体元素之和为 $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$ 。

注释 8.0.2: 柯西矩阵与范德蒙德矩阵是有关联的，计算逆矩阵时候要用到范德蒙德矩阵的结果

命题 8.0.3: 循环矩阵

方阵 $C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_1 \\ c_1 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{pmatrix}$ 称为循环矩阵, $J = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 称为基础循环矩阵, 记 $f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}$, $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 为 n 次单位根, $V = \left(w^{(i-1)(j-1)}\right)_{n \times n}$ 是范德蒙德矩阵, 则有

$$C = f(J), V^{-1}CV = \text{diag}(f(1), f(w), \dots, f(w^{n-1})), |C| = \prod_{k=0}^{n-1} f(w^k), C^{-1}(s, t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{w^{(s-t)k}}{f(w^k)}$$

注释 8.0.3: 概括下来核心就是两件事情: 循环矩阵是基础循环矩阵的多项式; 循环矩阵可以用范德蒙德矩阵来对角化, 最后的逆矩阵计算同样需要用到范德蒙德矩阵求逆的结果

课上会证明柯西矩阵相关的结果 (顺带包括范德蒙德矩阵), 循环矩阵相应的推导时间原因留给大家自行完成, 这几个命题的证明也可以去看王新茂的线性代数教材行列式部分, 基本上全都有。

解决行列式问题要特别注意矩阵分解配合降阶公式的手法 (本质是分块矩阵行列式), 许多其余方法难以操作的题目 (例如 15 届 CMC 高代) 用这个方法做会有奇效, 往往是分解成秩为 1 或者 2 的几个矩阵相加的形式。

平时做题应当先思考题目在考什么, 用标准型或者一些不妨设能否简化问题, 如果不能那就说明考点不是这个 (大部分题目都能简化), 此时没有通法, 只能临场发挥。对于数论与组合类型的题目, 基本上考察内容与大学数学没有关系, 完全是高中竞赛的思想, 此时你的关注点一定不要是想能用哪个高代定理解决, 而是应该将其当成高中数学问题来思考和找规律。

最后复习一下很多人总是记不住的比内柯西公式和拉普拉斯定理, 它们形式相近但是功能不同:

定理 8.0.1: 比内-柯西公式

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 这里 $m < n$, 则

$$|AB| = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_m \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}$$

定理 8.0.2: 拉普拉斯定理

设 A 是 n 阶方阵, 取定并按照 $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ 这 k 行展开, 记 $\tilde{A}$ 是 A 删去某些行列之后, 对应的 $n-k$ 阶代数余子式 (相应行列式添加符号 $(-1)^{p+q}$, p, q 分别是行指标之和与列指标之和), 则有

$$|A| = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \tilde{A} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

8.1 行列式计算方法

例题 8.1.1 计算 n 阶缺项范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

证明. 添加一行一列将其变成通常的范德蒙德行列式即可, 考虑

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x_{n+1}^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

根据范德蒙德行列式, 上式为 $\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)$

将其按照最后一列展开, x_{n+1}^{n-1} 项的系数, 就是题中行列式再添一个负号, 因此将以上乘积展开, 并按照 x_{n+1} 项来整理, 可知本题答案是

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

□

命题 8.1.1: 柯西矩阵

方阵 $C = \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{n \times n}$ 称为柯西矩阵, 其逆矩阵的 (i, j) 元记为 $C^{-1}(i, j)$, 则有

$$|C| = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i,j=1}^n (a_i + b_j)}, C^{-1}(i, j) = \frac{\prod_{p=1}^n (a_j + b_p)(b_i + a_p)}{(a_j + b_i) \prod_{p \neq j} (a_j - a_p) \prod_{p \neq i} (b_i - b_p)}$$

并且矩阵 C^{-1} 的各个全体元素之和为 $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$.

证明. 我们只需计算柯西矩阵的行列式和逆矩阵的元素和, 至于逆矩阵的 (i, j) 元, 注意柯西矩阵的每一个代数余子式都是柯西行列式, 所以可以直接套用柯西行列式的结果, 进行整理便能算出 (化简过程略)

设

$$p(x) = (x + a_1)(x + a_2) \cdots (x + a_n), p_k(x) = \frac{p(x)}{x + a_k}$$

则有 $\frac{1}{a_i + b_j} = \frac{p_i(b_j)}{p(b_j)}$, 进一步设 $p_i(x) = u_{i1} + u_{i2}x + \cdots + u_{in}x^{n-1}$, $1 \leq i \leq n$, 矩阵分解有

$$C = \begin{pmatrix} \frac{p_1(b_1)}{p(b_1)} & \cdots & \frac{p_1(b_n)}{p(b_n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{p_n(b_1)}{p(b_1)} & \cdots & \frac{p_n(b_n)}{p(b_n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(b_1) & \cdots & p_1(b_n) \\ \vdots & & \vdots \\ p_n(b_1) & \cdots & p_n(b_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{p(b_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{p(b_n)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_1(b_1) & \cdots & p_1(b_n) \\ \vdots & & \vdots \\ p_n(b_1) & \cdots & p_n(b_n) \end{pmatrix} = (u_{i1} + u_{i2}b_j + \cdots + u_{in}b_j^{n-1})_{n \times n} = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

题干里面只有各个 a_i, b_j , 所以希望让所有 u_{ij} 消失, 根据 $p_i(x)$ 的定义可知

$$p_i(x) = \prod_{k \neq i} (x + a_k), p_i(-a_j) = \delta_{ij} \prod_{k \neq i} (-a_j + a_k) = u_{i1} + u_{i2}(-a_j) + \cdots + u_{in}(-a_j)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} p_1(-a_1) & \cdots & p_1(-a_n) \\ \vdots & & \vdots \\ p_n(-a_1) & \cdots & p_n(-a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-a_1)^{n-1} & (-a_2)^{n-1} & \cdots & (-a_n)^{n-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(-a_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p_n(-a_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-a_1)^{n-1} & (-a_2)^{n-1} & \cdots & (-a_n)^{n-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

把这个结果带进去, 让 u_{ij} 全消失, 可得 C 的分解式

$$C = \begin{pmatrix} p_1(-a_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p_n(-a_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & \cdots & -a_n \\ \vdots & & \vdots \\ (-a_1)^{n-1} & \cdots & (-a_n)^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{p(b_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{p(b_n)} \end{pmatrix}$$

利用已知的范德蒙德行列式结果, 在上式两端取行列式可知

$$|C| = \frac{\prod_{i=1}^n p_i(-a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)}{\prod_{i=1}^n p(b_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i,j=1}^n (a_i + b_j)}$$

下面计算 C^{-1} 的元素和, 设为 S , 则有 $S = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} C^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, 利用前面的分解结果有

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} p(b_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(b_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & \cdots & -a_n \\ \vdots & & \vdots \\ (-a_1)^{n-1} & \cdots & (-a_n)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1(-a_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{p_n(-a_n)} \end{pmatrix}$$

为了计算 S , 设

$$U^T = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(b_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(b_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & \cdots & -a_n \\ \vdots & & \vdots \\ (-a_1)^{n-1} & \cdots & (-a_n)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1(-a_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{p_n(-a_n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

则 U, V 都是 n 维列向量, 要计算 $U^T V$, 首先化简 V

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & \cdots & -a_n \\ \vdots & & \vdots \\ (-a_1)^{n-1} & \cdots & (-a_n)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1(-a_1)} \\ \vdots \\ \frac{1}{p_n(-a_n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k(-a_k)} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \frac{(-a_k)^{n-1}}{p_k(-a_k)} \end{pmatrix}$$

运用拉格朗日插值可以证明以下经典问题

$$q(x) = (x - t_1)(x - t_2) \cdots (x - t_n), q_k(x) = \frac{q(x)}{x - t_k} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{t_k^i}{q_k(t_k)} = \begin{cases} 0, 0 \leq i \leq n-2 \\ 1, i = n-1 \\ t_1 + t_2 + \cdots + t_n, i = n \end{cases}$$

这里 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 两两不同, n 是任意正整数, $0 \leq i \leq n$

注意 $\sum_{k=1}^n \frac{t_k^i}{q_k(t_k)}$ 是 $n-1$ 次多项式 $f(x) = \sum_{k=1}^n t_k^i \prod_{j \neq k} \frac{x-t_j}{t_k-t_j}$ 的 x^{n-1} 项系数, 并且 $f(t_k) = t_k^i, 1 \leq k \leq n$, 所以若 $0 \leq i \leq n-1$, 则 $f(x) - x^i$ 这个次数不超过 $n-1$ 的多项式在 n 个点 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 处均为零, 故 $f(x) = x^i$ 恒成立, 对比两边 x^{n-1} 项系数可知 $\sum_{k=1}^n \frac{t_k^i}{q_k(t_k)} = \begin{cases} 0, 0 \leq i \leq n-2 \\ 1, i = n-1 \end{cases}$

对于 $i = n$ 的情况, 则 n 次多项式 $f(x) - x^n$ 在 $x = t_1, t_2, \dots, t_n$ 处均为零, 所以 $q(x)|f(x) - x^n$ 且

$$f(x) = x^n + \lambda(x-t_1)(x-t_2)\dots(x-t_n)$$

注意 $f(x)$ 的次数不超过 $n-1$, 所以必须 $\lambda = -1$ 也即 $f(x) = x^n - (x-t_1)(x-t_2)\dots(x-t_n)$, 现在对比两边 x^{n-1} 项系数可知 $\sum_{k=1}^n \frac{t_k^n}{q_k(t_k)} = t_1 + t_2 + \dots + t_n$, 本结论得证

$$\text{回到原题, 便有 } V = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k(-a_k)} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \frac{(-a_k)^{n-1}}{p_k(-a_k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 于是逆矩阵元素和 } U^T V \text{ 就是 } U \text{ 的最后一个分量}$$

根据 U 的定义有

$$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & \cdots & b_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b_n & \cdots & b_n^{n-1} \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} p(b_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(b_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(b_1) \\ \vdots \\ p(b_n) \end{pmatrix}$$

下面来计算范德蒙德矩阵的逆, 设

$$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & \cdots & b_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b_n & \cdots & b_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{nn} \end{pmatrix} = I \Rightarrow w_{1j} + w_{2j}b_i + \dots + w_{nj}b_i^{n-1} = \delta_{ij}$$

考虑 $g_j(x) = w_{1j} + w_{2j}x + \dots + w_{nj}x^{n-1}, 1 \leq j \leq n$ 便有 $g_j(x_i) = \delta_{ij}$ 并且 $g_j(x)$ 是次数不超过 $n-1$ 的多项式, 所以 $g_j(x) = \prod_{k \neq j} \frac{x-b_k}{b_j-b_k}$, 因此逆矩阵的 (i, j) 元就是 $\prod_{k \neq j} \frac{x-b_k}{b_j-b_k}$ 的展开式中 x^{i-1} 项系数

由此可见

$$U = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & \cdots & b_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b_n & \cdots & b_n^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p(b_1) \\ \vdots \\ p(b_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ * & \cdots & * \\ \prod_{k \neq 1} \frac{1}{b_1-b_k} & \prod_{k \neq 2} \frac{1}{b_2-b_k} & \cdots & \prod_{k \neq n} \frac{1}{b_1-b_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(b_1) \\ \vdots \\ p(b_n) \end{pmatrix}$$

因此逆矩阵元素和也即 U 的最后一个分量, 为 $S = \sum_{j=1}^n p(b_j) \prod_{k \neq j} \frac{1}{b_j-b_k}$, 也是 $F(x) = \sum_{j=1}^n p(b_j) \prod_{k \neq j} \frac{x-b_k}{b_j-b_k}$ 展开式中 x^{n-1} 项系数, 注意 $F(b_k) = p(b_k)$ 对 $1 \leq k \leq n$ 成立, 结合多项式的次数可知

$$F(x) = (x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n) - (x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_n)$$

对比 x^{n-1} 项系数, 因此逆矩阵元素和为 $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$, 结论得证

□

例题 8.1.2 证明:

$$\begin{vmatrix} C_{r+1}^r & C_{r+1}^{r+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C_{r+2}^r & C_{r+2}^{r+1} & C_{r+2}^{r+2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_{n-2}^r & C_{n-2}^{r+1} & C_{n-2}^{r+2} & \cdots & C_{n-2}^{n-2} & 0 \\ C_{n-1}^r & C_{n-1}^{r+1} & C_{n-1}^{r+2} & \cdots & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-1} \\ C_n^r & C_n^{r+1} & C_n^{r+2} & \cdots & C_n^{n-2} & C_n^{n-1} \end{vmatrix} = C_n^r$$

证明. 先举个简单例子运算一下:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 1 \\ a_{32} & a_{33} & 1 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{21} & 1 \\ a_{31} & a_{33} & 1 \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 1 \\ a_{32} & a_{33} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{33} & 1 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{31} & 1 \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} \\ = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 1 \\ a_{32} & a_{33} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{33} & 1 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31} |a_{44}| - a_{41} \end{vmatrix}$$

由此可见规律, 这样子的行列式如果一直展开, 则可以写成每一个第一列元素, 乘以右下方对应的子式, 然后求和, 一加一减的形式

对应到本题中, 我们记题干左边的行列式为 $f(n, r)$, 则根据上述规律有

$$f(n, r) = C_{r+1}^r f(n, r+1) - C_{r+2}^r f(n, r+2) + C_{r+3}^r f(n, r+3) + \cdots + (-1)^{n-r+1} C_n^r f(n, n)$$

因此采用数学归纳法, 就只需要验证一个高考恒等式:

$$C_n^r = C_{r+1}^r C_n^{r+1} - C_{r+2}^r C_n^{r+2} + C_{r+3}^r C_n^{r+3} + \cdots + (-1)^{n-r+1} C_n^r C_n^n$$

因为

$$C_n^{r+k} C_{r+k}^r = \frac{n!}{(r+k)!(n-r-k)!} \frac{(r+k)!}{r!k!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \frac{(n-r)!}{k!(n-r-k)!} = C_n^r C_{n-r}^k$$

代入知只要证明

$$1 = C_{n-r}^1 - C_{n-r}^2 + C_{n-r}^3 - \cdots + (-1)^{n-r+1} C_{n-r}^{n-r}$$

利用二项式定理, 这个是显然成立的

□

例题 8.1.3 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a+3 & \cdots & a+n \\ a+2 & a+3 & a+4 & \cdots & a+1 \\ a+3 & a+4 & a+5 & \cdots & a+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+n & a+1 & a+2 & \cdots & a+n-1 \end{vmatrix}$$

证明. 记所求行列式为 D , 从最后一行开始, 每一行减去前面一行, 然后再把第 2 列到第 n 列, 每一列都加到第一列上去 (注意这个时候, 加之前, $2-n$ 行矩阵每一行的元素之和均为零), 可得

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a+3 & \cdots & a+n \\ a+2 & a+3 & a+4 & \cdots & a+1 \\ a+3 & a+4 & a+5 & \cdots & a+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+n & a+1 & a+2 & \cdots & a+n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a+3 & \cdots & a+n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\ & = \begin{vmatrix} na + \frac{n(n+1)}{2} & a+2 & a+3 & \cdots & a+n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \left(na + \frac{n(n+1)}{2} \right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

最后的行列式是 $n-1$ 阶的, 下面来计算它

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - n \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \right| = |\alpha\alpha^T - nP|$$

记 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$, 则有 $P^2 = I$, 根据降阶公式可知

$$\begin{aligned} |\alpha\alpha^T - nP| &= |P| |\alpha\alpha^T P - nI| = |P| (-1)^{n-1} n^{n-1} \left| I - \frac{1}{n} \alpha\alpha^T \right| = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (-1)^{n-1} n^{n-1} \left| 1 - \frac{1}{n} \alpha^T \alpha \right| \\ &= (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} n^{n-1} \left(1 - \frac{n-1}{n} \right) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^{n-2} \Rightarrow D = \left(a + \frac{n+1}{2} \right) (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^{n-1} \end{aligned}$$

□

例 8.1.4 设 $n \geq 3$, 记 $\theta = \frac{2\pi}{n}$, 设 n 阶方阵 A 的 (i, j) 为 $a_{ij} = \sin(i+j)\theta$, 求 $|E + A^{2023}|$.

证明. 利用三角函数的和角公式 $\sin(i+j)\theta = \sin i\theta \cos j\theta + \cos i\theta \sin j\theta$, 矩阵分解并利用降阶公式有

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} \sin 2\theta & \sin 3\theta & \cdots & \sin(n+1)\theta \\ \sin 3\theta & \sin 4\theta & \cdots & \sin(n+2)\theta \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin(n+1)\theta & \sin(n+2)\theta & \cdots & \sin 2n\theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \\ \vdots & \vdots \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos 2\theta & \cdots & \cos n\theta \\ \sin \theta & \sin 2\theta & \cdots & \sin n\theta \end{pmatrix} = MN \\
 |\lambda I - A| &= |\lambda I - MN| = \lambda^n \left| I_2 - \frac{1}{\lambda} NM \right| \\
 &= \lambda^{n-2} \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \sin k\theta \cos k\theta & \sum_{k=1}^n \cos^2 k\theta \\ \sum_{k=1}^n \sin^2 k\theta & \sum_{k=1}^n \sin k\theta \cos k\theta \end{pmatrix} \right| \\
 \sum_{k=1}^n \sin k\theta \cos k\theta &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sin 2k\theta = \frac{\cos \theta - \cos(2n+1)\theta}{4 \sin \theta} = 0 \\
 \sum_{k=1}^n \cos^2 k\theta &= \sum_{k=1}^n \frac{1 + \cos 2k\theta}{2} = \frac{n}{2}, \quad \sum_{k=1}^n \sin^2 k\theta = \sum_{k=1}^n \frac{1 - \cos 2k\theta}{2} = \frac{n}{2} \\
 \Rightarrow |\lambda I - A| &= \lambda^{n-2} \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{n}{2} \\ -\frac{n}{2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^{n-2} \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{4} \right)
 \end{aligned}$$

所以 $|E + A^{2023}| = 1 - \left(\frac{n}{2}\right)^{4046}$

□

例题 8.1.5 设 A 是 $2n+1$ 阶方阵, $a_{i,i+1} = \frac{i(2n+1-i)}{2}, a_{i+1,i} = \frac{1}{2}, 1 \leq i \leq 2n$, 其余元素均为零, 证明: A 的全部特征值为 $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$.

证明. 为解决本题, 首先需要有一个经典习题作为引理 (一般的三对角矩阵并不能算出特征值通项)

引理 8.1.1: $n+1$ 阶三对角行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} x & 1 & & & \\ n & x & 2 & & \\ & n-1 & x & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ & & & 1 & x \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^n (x+n-2k)$$

将行列式 D_{n+1} 记为 $D_{n+1}(x)$. 先将各行都加上后面所有的行 (即先将第 2, 第 3, $\dots$, 第 $n+1$ 行都加到第 1 行; 然后将第 3, $\dots$, 第 $n+1$ 行都加到第 2 行; 如此下去, 直至把第 $n+1$ 行加到第 n 行), 再提取第一行的公因子, 得到

$$D_{n+1}(x) = (x+n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n & x+n-1 & x+n & \cdots & x+n & x+n \\ 0 & n-1 & x+n-2 & \cdots & x+n & x+n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+1 & x+n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}.$$

对上式右边的行列式, 从最后一列开始直至第 2 列, 把每一列都减去前面的一列, 然后按第一行展开, 则 $D_{n+1}(x) = (x+n)D_n(x-1)$. 再利用此式, 得 $D_n(x-1) = (x+n-2)D_{n-1}(x-2)$, 代入, 得 $D_{n+1}(x) = (x+n)(x+n-2)D_{n-1}(x-2)$. 继续递推下去, 并注意到 $D_1(x-n) = x-n$, 于是有

$$D_{n+1}(x) = (x+n)(x+n-2)(x+n-2 \cdot 2) \cdots (x+n-2(n-1))D_1(x-n) = \prod_{k=0}^n (x+n-2k).$$

回到原题, 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \cdot 2n & & \\ 1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2n \cdot 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

待定系数, 将第一行乘以 a_1 同时将第一列除以 a_1 , 然后将第二行乘以 a_2 同时第二列除以 a_2 , 一直下去到第 $2n+1$ 行和列, 这是一个相似变换, 特征值不改变, 然后对比上对角线的元素 (和引理里面的矩阵), 以及下对角线的元素, 可以解出来 (不唯一) $a_k = \frac{1}{(2n+1-k)!}, k=1, 2, \dots, 2n+1$, 这个过程本质上就是将题中矩阵的上下两条线的“次数”从“2 次和 0 次”, 调整成为两个 1 次, 也就是引理的三对角矩阵

所以 A 相似于 $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 2n & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2n \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 利用引理可知结论成立 □

例题 8.1.6 证明:

$$\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2-c^2 & 2(ab+c) & 2(ca-b) \\ 2(ab-c) & 1+b^2-c^2-a^2 & 2(bc+a) \\ 2(ca+b) & 2(bc-a) & 1+c^2-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2+c^2)^3$$

证明. 先假定 $a^2+b^2+c^2 \neq 1$, 做矩阵分解有

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1+a^2-b^2-c^2 & 2(ab+c) & 2(ca-b) \\ 2(ab-c) & 1+b^2-c^2-a^2 & 2(bc+a) \\ 2(ca+b) & 2(bc-a) & 1+c^2-a^2-b^2 \end{pmatrix} \\ &= (1-(a^2+b^2+c^2))I + 2 \begin{pmatrix} a^2 & ab+c & ca-b \\ ab-c & b^2 & bc+a \\ ca+b & bc-a & c^2 \end{pmatrix} \\ &= (1-(a^2+b^2+c^2))I + 2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)I + 2\alpha\alpha^T + 2M, \alpha = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}, \lambda = a^2+b^2+c^2 \end{aligned}$$

注意 $M\alpha = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 因此

$$(1-\lambda)I + 2\alpha\alpha^T + 2M = ((1-\lambda)I + 2M) \left(I + \frac{2}{1-\lambda}\alpha\alpha^T \right)$$

所以

$$\begin{aligned} |(1-\lambda)I + 2\alpha\alpha^T + 2M| &= |(1-\lambda)I + 2M| \left| I + \frac{2}{1-\lambda}\alpha\alpha^T \right| \\ \left| I + \frac{2}{1-\lambda}\alpha\alpha^T \right| &= \left| 1 + \frac{2}{1-\lambda}\alpha^T\alpha \right| = 1 + \frac{2}{1-\lambda}\lambda = \frac{\lambda+1}{1-\lambda} \\ |(1-\lambda)I + 2M| &= \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2c & -2b \\ -2c & 1-\lambda & 2a \\ 2b & -2a & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)^3 + 4(a^2+b^2+c^2)(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)^3 + 4\lambda(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2+2\lambda+1) = (1-\lambda)(1+\lambda)^2 \\ \Rightarrow |(1-\lambda)I + 2\alpha\alpha^T + 2M| &= (1+\lambda)^3 = (1+a^2+b^2+c^2)^3 \end{aligned}$$

注意题目中左右两边均为关于 a, b, c 的三元多项式, 且除去单位球面, 这两个多项式均是相等的, 因此对一切 a, b, c , 这两个多项式都相等 (如果 n 元多项式在某个开集中恒为零, 那么这个多项式恒为零, 可以用求偏导配合归纳的方法快速说明), 结论得证

□

注释 8.1.1: $a^2+b^2+c^2=1$ 时候, 式子变成 $|(1-\lambda)I + 2\alpha\alpha^T + 2M| = |2\alpha\alpha^T + 2M| = 8|\alpha\alpha^T + M|$, 也可以直接去验证 $|\alpha\alpha^T + M| = 1$ 由此完成证明, 不过可能不好算

8.2 线性方程组想法

例题 8.2.1 设线性方程组 $\mathbf{AX} = \beta$ 有解, 其中 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ 是数域 F 上的矩阵, $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$. 对于某个 $k (1 \leq k \leq n)$, 证明: 该方程组的任意解的第 k 个分量都为 0 的充分必要条件是, 划去增广矩阵 $(\mathbf{A}, \beta)$ 的第 k 列后秩要减少 1.

证明. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则已知条件为 β 可以写成 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的线性组合

只需对 $k = 1$ 证明 (其余 k 同理), 翻译一下可知, 要证明的是 “存在 $\lambda \neq 0$ 使得 $\beta - \lambda\alpha_1$ 可用 $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出” 等价于 “ $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta) = r(\alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta)$ ” (因为秩要么少 1 要么不变)

而 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta) = r(\alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta)$ 等价于后者的极大无关组是前者的极大无关组, 也等价于 α_1 可以用 $\alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 线性表出

故只要证: “存在 $\lambda \neq 0$ 使得 $\beta - \lambda\alpha_1$ 可用 $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出” 等价于 “ α_1 可以用 $\alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 线性表出”

假如 α_1 可以用 $\alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 线性表出, 设 $\alpha_1 = c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n + t\beta$, 如果 $t \neq 0$, 则 $\beta - \frac{1}{t}\alpha_1$ 可以用 $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出, 结论成立

如果 $t = 0$, 则 $\alpha_1 = c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n$, 又因为 β 可以用 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出, 则对任意 λ , 显然 $\beta - \lambda\alpha_1$ 可用 $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出, 结论成立

假如存在 $\lambda \neq 0$ 使得 $\beta - \lambda\alpha_1$ 可用 $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出, 除以 $-\lambda$ 再移项可知 α_1 可以用 $\alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 线性表出, 结论得证

□

例题 8.2.2 设一列矩阵 A_i, B_i 均为 $k \times n$ 的, 这里 $k \leq n$, 并且对每个 i 都有 $A_i x = 0$ 与 $B_i x = 0$ 同解, 如果矩阵序列 $A_i \rightarrow A, B_i \rightarrow B$ 并且 A, B 还是行满秩矩阵, 证明: $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解.

证明. 如果 $k = n$, 则 A, B 都是可逆矩阵, 自然 $Ax = 0, Bx = 0$ 都只有零解, 显然成立, 以下设 $k < n$

注意对所有矩阵同时相抵变换

$$A_i \rightarrow PA_i Q, B_i \rightarrow PB_i Q, A \rightarrow PAQ, B \rightarrow PBQ$$

不改变条件和结论, 因此不妨是 B 为它的相抵标准型 $B = (I_k, 0)$, 则只需要证明 $A = (M, 0)$, 也即 A 除去前 k 列外均为零, 则结合满秩便可得证

反证法: 设 A 的后 $n - k$ 列中某个元素非零, 记为 $A(s, t) = \delta \neq 0$, 其中 $t \geq k + 1$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 根据条件可知, 存在矩阵 A_N, B_N 使得

$$A_N = (a_{ij})_{k \times n}, B_N = (b_{ij})_{k \times n} \\ |b_{ii} - 1| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, k, |b_{ij}| < \varepsilon, \forall i \neq j$$

因为 $A_N x = 0, B_N x = 0$ 同解, 所以它们的行向量组等价, 于是有实数 $p_1, p_2, \dots, p_k$ 使得

$$p_1(b_{11}, \dots, b_{1n}) + p_2(b_{21}, \dots, b_{2n}) + \dots + p_k(b_{k1}, \dots, b_{kn}) = (a_{s1}, \dots, a_{st}, \dots, a_{sn})$$

考虑 a_{st} , 对应方程

$$p_1 b_{1t} + p_2 b_{2t} + \dots + p_k b_{kt} = a_{st} = \delta$$

$p_1, \dots, p_k$ 中有一个绝对值最大的, 设为 p_i (自然 $i \leq k < t$), 则一方面有

$$|\delta| = |p_1 b_{1t} + p_2 b_{2t} + \dots + p_k b_{kt}| \leq k\varepsilon |p_i| \Rightarrow |p_i| \geq \frac{|\delta|}{k\varepsilon}$$

另一方面, 我们关注第 i 个分量, 有

$$\begin{aligned} |a_{si}| &= |p_1 b_{1i} + p_2 b_{2i} + \dots + p_k b_{ki}| \\ &\geq 2|p_i b_{ii}| - |p_1 b_{1i}| - |p_2 b_{2i}| - \dots - |p_k b_{ki}| \\ &\geq |p_i| (2|b_{ii}| - |b_{1i}| - |b_{2i}| - \dots - |b_{ki}|) \\ &\geq \frac{|\delta|}{k\varepsilon} (1 - k\varepsilon) \end{aligned}$$

换句话说, 对任意 $\varepsilon > 0$, 矩阵序列 $A_1, A_2, \dots$ 中, 都存在某个矩阵 A_N 使得其 $(s, 1), (s, 2), \dots, (s, k)$ 元中, 某一个元素的绝对值大于等于 $\frac{|\delta|}{k\varepsilon} (1 - k\varepsilon)$

注意 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时上式趋于正无穷, 结合 ε 的任意性可知, 矩阵序列中 $(s, 1), (s, 2), \dots, (s, k)$ 这 k 个位置的元素对应的 k 个数列中, 至少有一个是无界的

而 $A_i \rightarrow A$, 因此矩阵各个位置的元素分别都是收敛数列, 这与无界矛盾, 结论得证 $\square$

注释 8.2.1: 本题的想法很简单, 比如说 $A(1, k+1)$, 那么当 N 很大时候, 矩阵 A_N 的 $(k+1, 1)$ 元就会接近 1, 比较大, 而条件线性方程组同解告诉我们 A_N 的第一行可以写成 B_N 的行向量的线性组合, 可是根据 $B = (I_k, 0)$ 知道 B_N 的第 $k+1$ 列, 每一个元素都很小, 于是线性组合要想凑出 1, 就必须有某个系数很大, 假设就是对应于 B_N 第一行的系数, 也是各个系数里面最大的

现在关注 $(1, 1)$ 元, 这个很大的系数配上 B_N 的 $(1, 1)$ 元, 一个接近 1 的较大数字, 乘起来就会非常非常大, 而剩下 $k-1$ 个系数对应相乘的数字都趋于零, 所以整体较小, 这样就“拉不回来, 无法弥补”了, 导致 A_N 的 $(1, 1)$ 元特别大, 很明显矩阵收敛应当得到 $(1, 1)$ 是有界数列, 如此引发矛盾

以上写法和上课的解法本质相同, 表述形式略有区别, 自行选择

例题 8.2.3 设 $\{A_i\}_{i \in I}, \{B_i\}_{i \in I}$ 是数域 F 上两个矩阵集合, 称他们在 F 上相似, 如果存在 F 上与 $i \in I$ 无关的可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}A_iP = B_i, \forall i \in I$. 证明: 有理数域 Q 上两个矩阵集合 $\{A_i\}_{i \in I}, \{B_i\}_{i \in I}$, 如果它们在实数域 R 上相似, 则它们在有理数域 Q 上也相似.

证明. 我们希望把一族矩阵 (可能无限甚至不可数个) 转化为有限个矩阵的问题, 先证明一个引理

引理 8.2.1: 设 V 是 n 维线性空间, $\{V_i\}_{i \in I}$ 是一族子空间, 则存在有限个指标 $j_1, j_2, \dots, j_k$ 使得 $\bigcap_{i \in I} V_i = V_{j_1} \cap V_{j_2} \cap \dots \cap V_{j_k}$

反证法, 则 I 是无限集, 任取一个 $j_1 \in I$, 则 $\bigcap_{i \in I} V_i \neq V_{j_1} \Rightarrow \bigcap_{i \in I} V_i \subsetneq V_{j_1}$

所以存在 $\alpha_1 \in V_{j_1}, \alpha_1 \notin \bigcap_{i \in I} V_i$ 也即存在 $j_2 \neq j_1$ 使得 $\alpha_1 \notin V_{j_2}$, 因此

$$V_{j_1} \cap V_{j_2} \subsetneq V_{j_1} \Rightarrow \dim(V_{j_1} \cap V_{j_2}) \leq \dim V_{j_1} - 1 \leq n - 1$$

根据反证法, $\bigcap_{i \in I} V_i \neq V_{j_1} \cap V_{j_2} \Rightarrow \bigcap_{i \in I} V_i \subsetneq V_{j_1} \cap V_{j_2}$, 同理可知存在 $j_3 \neq j_1, j_2$ 使得

$$V_{j_1} \cap V_{j_2} \cap V_{j_3} \subsetneq V_{j_1} \cap V_{j_2} \Rightarrow \dim(V_{j_1} \cap V_{j_2} \cap V_{j_3}) \leq \dim(V_{j_1} \cap V_{j_2}) - 1 \leq n - 2$$

以此类推, 对任意 k 都存在 $j_1, j_2, \dots, j_k$ 使得 $\dim(V_{j_1} \cap V_{j_2} \cap \dots \cap V_{j_k}) \leq n - k$, 当 $k \geq n + 1$ 便导致矛盾回到原题, 设

$$U_i = \{X \in M_n(R) | AX = XB\}, V_i = \{X \in M_n(Q) | AX = XB\}$$

则 U_i, V_i 分别是 $M_n(R), M_n(Q)$ 的子空间, 根据引理可知存在有限个下标使得

$$\bigcap_{i \in I} U_i = U_{j_1} \cap U_{j_2} \cap \dots \cap U_{j_s}, \bigcap_{i \in I} V_i = V_{k_1} \cap V_{k_2} \cap \dots \cap V_{k_t}$$

不妨记 $\{j_1, j_2, \dots, j_s\} \cup \{k_1, k_2, \dots, k_t\} = \{1, 2, \dots, m\}$, 则 $\bigcap_{i \in I} U_i = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_m, \bigcap_{i \in I} V_i = V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_m$

至此问题转化为有限个矩阵, 已知条件是存在可逆实矩阵 P 使得 $P \in \bigcap_{i=1}^m U_i$, 要证明存在可逆有理数方阵 Q

使得 $Q \in \bigcap_{i=1}^m V_i$, 换句话说就是从 $A_iP = PB_i, i = 1, 2, \dots, m, P \in M_n(R)$ 可逆出发, 去找 $Q \in M_n(Q)$ 可逆使得 $A_iQ = QB_i, i = 1, 2, \dots, m$, 进一步可以转化为一个矩阵:

记 $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix}$ 均为有理数矩阵, 则已知为 $AX = XB$ 有可逆实矩阵解 P , 要找有理数上的可逆阵解

考虑有理数域上的线性方程组 $AX = XB$ (n^2 个变量, mn^2 个方程), 设其基础解系为 $X_1, X_2, \dots, X_N$, 则实数域上的线性方程组 $AX = XB$ 的全部解为 $c_1X_1 + \dots + c_NX_N$, 这里 c_i 为实数 (因为这两个方程组的解空间维数是一样的, 理由就是秩不随数域扩大而改变, 且显然 $X_1, \dots, X_N$ 在第二个方程组的解空间里面, 线性无关性质依旧保持, 所以第二个方程组的基础解系就是 $X_1, \dots, X_N$)

根据条件 P 是实数域上线性方程组 $AX = XB$ 的一个解, 所以存在一组实数 $c_1, \dots, c_N$ 使得 $P = c_1X_1 + \dots + c_NX_N$, 考虑 N 元多项式

$$f(t_1, t_2, \dots, t_N) = |t_1X_1 + t_2X_2 + \dots + t_NX_N|$$

则 $f(c_1, c_2, \dots, c_n) \neq 0$, 即 $f(t_1, \dots, t_n)$ 不是零多项式, 所以存在一组有理数 $q_1, q_2, \dots, q_N$ 使得 $f(q_1, q_2, \dots, q_N) \neq 0$, 故 $Q = q_1 X_1 + q_2 X_2 + \dots + q_N X_N$ 是可逆的有理数方阵

根据 X_i 的定义有 $AX_i = X_i B$ 对每个 i 均成立, 所以 $AQ = QB$, Q 即为所求

□

注释 8.2.2: 通常的“相似不随数域扩大而改变”指的都是两个矩阵的相似, 本题是一族矩阵, 甚至可能是不可数个, 便无法直接用一样的办法解决, 至少应先转化为有限个矩阵, 好在是有限维线性空间, 能够实现这是第三届 CMC 数学类决赛题, 有一定难度, 尤其是要说清楚有点麻烦

8.3 摄动法

例题 8.3.1 设 A 是 n 阶可逆方阵, 证明: 可以只改变 A 某一个位置的元素使得 A 不可逆.

证明. 考虑多项式

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} a_{11} + x_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} + x_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, f(0, 0, \dots, 0) = |A| \neq 0$$

按照第一列展开有

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_{11} + x_1) A_{11} + \dots + (a_{n1} + x_n) A_{n1}$$

显然 $A_{11}, \dots, A_{n1}$ 不全为零, 不妨设 $A_{11} \neq 0$, 则可以取 $x_2, \dots, x_n$ 均为零, 剩下的是关于 x_1 的一次函数 (非常值), 所以变化 x_1 即可实现让矩阵 A 不可逆

□

例题 8.3.2 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 是 n 阶方阵, A_{ij} 表示元素 a_{ij} 对应的代数余子式. 设 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n, 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n$ 为两组给定的指标集, 证明:

$$\mathbf{A}^* \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A_{i_1 j_1} & A_{i_2 j_1} & \cdots & A_{i_r j_1} \\ A_{i_1 j_2} & A_{i_2 j_2} & \cdots & A_{i_r j_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{i_1 j_r} & A_{i_2 j_r} & \cdots & A_{i_r j_r} \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} |\mathbf{A}|^{r-1}.$$

证明. 首先证明, 当 $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_r$ 均为 $1, 2, \dots, r$ 时候结论成立, 先假定矩阵可逆, 要证明

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,r+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} |\mathbf{A}|^{r-1}$$

考虑伴随矩阵的性质 $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{I}$, 根据目标式子设出分块矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$ 有

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11}Y_{11} + X_{12}Y_{21} & X_{11}Y_{12} + X_{12}Y_{22} \\ X_{21}Y_{11} + X_{22}Y_{21} & X_{21}Y_{12} + X_{22}Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\mathbf{A}|I_r & 0 \\ 0 & |\mathbf{A}|I_{n-r} \end{pmatrix}$$

要证明的是 $|Y_{11}| = |X_{22}| |\mathbf{A}|^{r-1}$, 由此凑一个分块矩阵乘法:

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{11} & 0 \\ Y_{21} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11}Y_{11} + X_{12}Y_{21} & X_{12} \\ X_{21}Y_{11} + X_{22}Y_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\mathbf{A}|I_r & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix}$$

两边取行列式, 然后利用可逆约掉 $|\mathbf{A}|$ 即可得到结论

对于不可逆的情况, 存在 $\delta > 0$ 使得任意 $t \in (0, \delta)$ 都有 $\mathbf{A} + t\mathbf{I}$ 可逆, 对矩阵 $\mathbf{A} + t\mathbf{I}$ 代入上面的结论, 注意等式两端均为关于 t 的多项式, 并且对任意 $t \in (0, \delta)$ 两个多项式均相等, 所以这两个多项式恒等, 因此当 $t = 0$ 时等式成立, 即为所求

对一般情形, 令 $p = i_1 + i_2 + \cdots + i_r, q = j_1 + j_2 + \cdots + j_r$, 将矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 $i_1, i_2, \dots, i_r$ 行经过 $(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \cdots + (i_r - r) = p - \frac{1}{2}r(r+1)$ 次相邻对换移至第 $1, 2, \dots, r$ 行; 再将第 $j_1, j_2, \dots, j_r$ 列经过 $(j_1 - 1) + (j_2 - 2) + \cdots + (j_r - r) = q - \frac{1}{2}r(r+1)$ 次相邻对换移至第 $1, 2, \dots, r$ 列, 得到的矩阵记为 $\mathbf{D}$.

显然 $|\mathbf{A}| = (-1)^{p+q} |\mathbf{D}|$, $\hat{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = (-1)^{p+q} \hat{\mathbf{D}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix}$, 因此要证不等式的右边一般情形 (关于 $\mathbf{A}$) 与特殊情形 (关于 $\mathbf{D}$) 相差符号 $(-1)^{r(p+q)}$.

容易验证 $\mathbf{A}, \mathbf{D}$ 的代数余子式之间满足关系: $A_{i_k j_l} = (-1)^{p+q} D_{kl} (1 \leq k, l \leq r)$, 于是 $\mathbf{A}^*$ 的 r 阶子式每行都可以提出公因子 $(-1)^{p+q}$, 从而要证不等式的左边一般情形 (关于 $\mathbf{A}$) 与特殊情形 (关于 $\mathbf{D}$) 也相差符号 $(-1)^{r(p+q)}$. 因此, 一般情形的证明可以化为特殊情形的证明.

□

注释 8.3.1: 最后换行换列这里可能有点抽象, 可以自己画一个矩阵感受下, 行列交点处的元素, 其“相对位置”是不会变的, 因此行列式不动, 会变的只有行列式前面的符号 (代数余子式), 详细的见上课视频

例题 8.3.3 1. 设 A, B, C, D 是 n 阶方阵且 $AB^T = BA^T$, 证明: $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD^T - BC^T|$.

2. 设 $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$, $2n$ 阶方阵 A 满足 $A^T M A = M$, 证明: $|A| = 1$.

证明. 1. 如果 A 可逆, 则直接计算就有

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| |D - CA^{-1}B| = |D - CA^{-1}B| |A^T| = |DA^T - CA^{-1}BA^T| = |AD^T - BC^T|$$

如果 A 不可逆, 则需要引入一个矩阵来摄动 (注意不能用单位阵摄动! 因为需要保持关系 $AB^T = BA^T$ 不变, 而“单位阵摄动”代入则要求 B 是对称阵, 实际上并没有这个条件), 并且这个矩阵必须是可逆的 (否则可能即便让系数随便取, 相应的 $A + tX$ 也都是不可逆矩阵)

因此, 用来摄动的矩阵 X 应该满足 $XB^T = BX^T$ 并且 X 可逆, 现在有三种方案

方法一: 利用矩阵的对称分解, 设 $B = S_1 S_2$, 其中 S_1, S_2 均为对称阵并且 S_1 可逆, 则现在需要 $X S_2 S_1 = S_1 S_2 X^T$, 直接就能看出, 取 $X = S_1$ 即可满足条件 (这也侧面反映了: 矩阵和它的转置不仅相似, 而且可以用对称阵来实现这个相似)

方法二: 利用矩阵的极分解, 设 $B = SO$, O 是正交阵, S 是半正定实对称矩阵, 则现在需要 $X O^T S = S O X^T$, 容易看出取 $X = O$ 即可 (这也侧面反映了: 矩阵和它的转置不仅相似, 而且可以用正交阵来实现这个相似)

方法三: 利用矩阵的相抵标准型, 设 $B = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$, 则需要

$$X Q^T \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^T = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q X^T \Leftrightarrow P^{-1} X Q^T \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q X^T P^{-T}$$

注意 $P^{-1} X Q^T, Q X^T P^{-T}$ 刚好是转置关系, 自然的令它们都是单位阵即可, 所以取 $X = P Q^{-T}$ 满足条件

任选一种方案, 其中的矩阵记为 X , 则可以取一系列 $t_k \rightarrow 0, t_k > 0$ 使得 $A + t_k X$ 可逆, 于是 $\begin{vmatrix} A + t_k X & B \\ C & D \end{vmatrix} = |(A + t_k X) D^T - BC^T|$, 注意左右两边都是关于 t 的多项式, 因此令 $t \rightarrow 0$ 即可得证

2. 设 $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$ 代入计算, 利用第一问结论立即可得答案 □

8.4 分块矩阵应用

例题 8.4.1 对于 n 阶复方阵 A , 证明: $AA^H = A^H A$ 当且仅当 $r(A) = r(A^2)$, $A^2 A^H = A^H A^2$, $A^3 A^H = A^H A^3$, 其中 A^H 表示共轭转置.

证明. 如果 $AA^H = A^H A$ 也即 A 正规, 则不妨 A 为对角阵, 此时结论显然成立

如果 $r(A) = r(A^2)$, $A^2 A^H = A^H A^2$, $A^3 A^H = A^H A^3$, 假如 A 可逆, 则

$$A^2 A^H = A^H A^2 \Rightarrow A^3 A^H = AA^H A^2 = A^H A^3 \Rightarrow AA^H = A^H A$$

结论成立, 而如果 A 不可逆, 注意本题的条件和结论在酉相似之下是不变的, 则根据舒尔上三角化定理, 不妨设 A 为上三角阵, 具体的 $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^H \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$, 则计算有

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha^H A_1 \\ 0 & A_1^2 \end{pmatrix}, A^H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & A_1^H \end{pmatrix} \\ A^2 A^H &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha^H A_1 \\ 0 & A_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & A_1^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^H A_1 \alpha & \alpha^H A_1 A_1^H \\ A_1^2 \alpha & A_1^2 A_1^H \end{pmatrix} \\ A^H A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & A_1^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha^H A_1 \\ 0 & A_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \alpha^H A_1 + A_1^H A_1^2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \alpha^H A_1 \alpha = \alpha^H A_1 A_1^H = A_1^2 \alpha = 0, \alpha \alpha^H A_1 + A_1^H A_1^2 = A_1^2 A_1^H \\ \alpha^H A_1 A_1^H &= 0 \Rightarrow \alpha^H A_1 A_1^H \alpha = 0 \Rightarrow A_1^H \alpha = \alpha^H A_1 = 0 \\ &\Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1^2 \end{pmatrix}, A_1^2 \alpha = \alpha^H A_1 \alpha = 0, A_1^H A_1^2 = A_1^2 A_1^H \\ A^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha^H \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1^3 \end{pmatrix} \\ A^3 A^H &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & A_1^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_1^3 \alpha & A_1^3 A_1^H \end{pmatrix} \\ A^H A^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & A_1^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1^H A_1^3 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow A_1^3 \alpha = 0, A_1^3 A_1^H = A_1^H A_1^3 \end{aligned}$$

汇总一下条件, 删掉重复的, 现在有

$$A_1^3 A_1^H = A_1^H A_1^3, A_1^H A_1^2 = A_1^2 A_1^H, A_1^2 \alpha = \alpha^H A_1 \alpha = 0, r(A) = r(A^2)$$

我们希望通过归纳完成证明, 则只需要验证 $r(A_1) = r(A_1^2)$

注意条件表明 $Ax = 0, A^2 x = 0$ 是同解的, 并且 $A_1^2 \alpha = 0 \Rightarrow A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = 0$

所以

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^H \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^H \alpha \\ A_1 \alpha \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

注意 $r(A) = r(A^2)$ 并且此时 A, A^2 都只有右下角 $n-1$ 阶的 A_1 非零, 所以 $r(A_1) = r(A_1^2)$

结合 $A_1^3 A_1^H = A_1^H A_1^3, A_1^H A_1^2 = A_1^2 A_1^H$ 以及归纳法可知 A_1 是正规矩阵, 进而结论得证

□

例题 8.4.2 设 V 是 n 维欧氏空间, V_1, V_2 是 V 的非平凡子空间并且 $V = V_1 \oplus V_2$, 设 p_1, p_2 分别是 V 到 V_1, V_2 的正交投影, $\varphi = p_1 + p_2$, 证明: $0 < \det \varphi \leq 1$ 且 $\det \varphi = 1$ 当且仅当 V_1 与 V_2 正交.

证明. 因为 V_1, V_2 非平凡且 $V = V_1 \oplus V_2$, 所以可以取 V_1 的一组标准正交基 $e_1, \dots, e_r$, 扩充为全空间的标准正交基 $e_1, \dots, e_r, \dots, e_n$, 然后取 V_2 的一组标准正交基 $f_{r+1}, \dots, f_n$, 扩充为全空间的标准正交基 $f_1, \dots, f_r, \dots, f_n$

根据条件, $e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_n$ 是全空间的一组基 (不一定是标准正交基), 设

$$\begin{aligned}(e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_n) &= (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n) \begin{pmatrix} I_r & A \\ 0 & B \end{pmatrix} \\ (e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_n) &= (f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_n) \begin{pmatrix} C & 0 \\ D & I_{n-r} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

这里 B, C 是可逆方阵, 根据投影定义, 计算 p_1, p_2 的表示矩阵有

$$\begin{aligned}p_1(e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_n) &= p_1(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n) \begin{pmatrix} I_r & A \\ 0 & B \end{pmatrix} \\ &= (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n) \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & A \\ 0 & B \end{pmatrix} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n) \begin{pmatrix} I_r & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_n) \begin{pmatrix} I_r & A \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_r & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \left(\begin{pmatrix} I_r & A \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_r & -AB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \right) \\ &= (e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_n) \begin{pmatrix} I_r & -AB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_n) \begin{pmatrix} I_r & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

同理有

$$p_2(e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_n) = (e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_n) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

所以 φ 在这组基下的表示矩阵就是 $\begin{pmatrix} I_r & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D & I_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & A \\ D & I_{n-r} \end{pmatrix}$, 根据行列式降阶公式有

$$\begin{vmatrix} I_r & A \\ D & I_{n-r} \end{vmatrix} = |I - DA|, \text{ 则要证明 } |I - DA| \in (0, 1] \text{ 且 } |I - DA| = 1 \text{ 当且仅当 } V_1, V_2 \text{ 正交}$$

如果这时没有任何其他条件, 那么 A, D 就是两个任意的矩阵, 题目结论必然证不出来, 也没道理成立, 所以我们需要进一步挖掘隐含的条件, 或者说基之间的制约关系

根据定义有

$$(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n) \begin{pmatrix} I_r & A \\ 0 & B \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_n) \begin{pmatrix} C & 0 \\ D & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

注意左右都是标准正交基 (换句话说基都是正交阵, 乘法和逆也都是正交阵), 所以

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ D & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & A \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ D & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & -AB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & -CAB^{-1} \\ D & -DAB^{-1} + B^{-1} \end{pmatrix}$$

是正交阵, 也就是说

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} C & 0 \\ D & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & A \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ D & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & -AB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & -CAB^{-1} \\ D & -DAB^{-1} + B^{-1} \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} C & -CAB^{-1} \\ D & -DAB^{-1} + B^{-1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C & -CAB^{-1} \\ D & -DAB^{-1} + B^{-1} \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} C^T & D^T \\ -B^{-T}A^TC^T & -B^{-T}A^TD^T + B^{-T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & -CAB^{-1} \\ D & -DAB^{-1} + B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \\
 & \Rightarrow C^TC + D^TD = I_r, C^TCAB^{-1} + D^T(DAB^{-1} - B^{-1}) = 0 \\
 & \Rightarrow C^TC + D^TD = I_r, A = D^T
 \end{aligned}$$

这就是之前没发现的隐含条件, 代入有 (注意 C^TC 正定, D^TD 半正定, 利用特征值关系和范围)

$$|I - DA| = |I - DD^T| = |I - D^TD| = |CC^T| > 0, |I - DD^T| \leq 1$$

如果 $\det \varphi = 1$, 则 $D^TD = 0$ 进而 $D = 0, A = 0$, 也就是说

$$(e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_n) = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n) \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

所以 $f_{r+1}, \dots, f_n$ 都是 $e_{r+1}, \dots, e_n$ 的线性组合, 自然与 $e_1, \dots, e_r$ 全部是垂直的, 这就证明了取等时候一定有 V_1, V_2 正交, 结论得证

□

注释 8.4.1: 选取一组基, 将本题转化为矩阵和行列式运算问题即可, 但是最自然的基并不好用, 注意本题涉及到投影还有正交等等概念, 所以基应该都取为标准正交基, 这样方便运算, 矩阵也会简单. 注意条件有个直和, 所以直接想法是取 V_1 的一组标准正交基 $e_1, \dots, e_r$, 扩充为全空间的标准正交基 $e_1, \dots, e_r, \dots, e_n$, 然后取 V_2 的一组标准正交基 $f_{r+1}, \dots, f_n$, 扩充为全空间的标准正交基 $f_1, \dots, f_r, \dots, f_n$. 注意子空间内的向量往这个空间中投影保持不变, 此时相应的矩阵是

$$\begin{aligned}
 p_1(e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_n) &= (e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_n) \begin{pmatrix} I_r & A \\ 0 & B \end{pmatrix} \\
 p_2(e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_n) &= (e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_n) \begin{pmatrix} C & 0 \\ D & I_{n-r} \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow \varphi = p_1 + p_2 &= \begin{pmatrix} I_r + C & A \\ D & B + I_{n-r} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

四个随意的矩阵, 这根本就没法算, 也不可能证明出来任何结论, 所以需要挖掘隐含条件

最后正交阵分块运算的时候, 虽然正交阵和 $UU^T = I$ 以及 $U^TU = I$ 都是等价的, 但是假如“乘反了”也即选择了另外一个式子, 则可能会算不出来, 复杂且无用, 只能选择我这个

8.5 数论组合类问题

例 8.5.1 设 $A = (a_{k,t})_{k=1,1,2,\dots,n}$ 是 n 级复矩阵, 满足任意主子式均为 0. 证明: $A^n = 0$ 且存在置换 $\sigma \in S_n$ 使得矩阵 $(a_{\sigma(k),\sigma(t)})_{k,j=1,2,\dots,n}$ 主对角线及下方元素均为 0.

证明. 根据条件可知, 特征多项式为 λ^n (因为系数是主子式之和), 所以 $A^n = 0$

要证明的结论是: 可以对 A 做若干次同时的交换行列, 使得 A 变成上三角矩阵

如果矩阵 A 某一列全为零, 则同时交换行列可以把这一列换到第一列去, 也就是说不妨设 A 的第一列全为零, 然后关注右下角的那个 $n-1$ 阶方阵, 利用归纳法就可以说明, 能够对第 $2, 3, \dots, n$ 这些行列做同时的行列交换, 使得右下角方阵变成上三角, 这时整个矩阵也是上三角的, 结论得证

因此问题的关键在于说明: 从任意主子式均为零出发, 能证明某一列全为零

采用归纳法, $n=1, 2$ 的情况是显然成立的, 如果 $n-1$ 时成立, 对于 n 的情形

反证法: 如果 A 的每一列都不全为零

我们用 $A(i, i)$ 表示矩阵 A 删去第 i 行第 i 列之后剩下的 $n-1$ 阶子矩阵, 根据条件可知每个 $A(i, i)$ 的每个主子式都为零, 因此 (根据归纳假设) 每个 $A(i, i)$ 都一定有一列全为零

对于 $A(1, 1)$, 他有某一列全为零, 这一列在矩阵 A 中看, 对应的为第 i_1 列, 则 $i_1 \neq 1$, 根据反证的假设, 因此 $a_{1,i_1} \neq 0$ 并且 A 的第 i_1 列除此之外所有元素均为零

对于 $A(2, 2)$, 他有某一列全为零, 这一列在矩阵 A 中看, 对应的为第 i_2 列, 则一定有 $i_2 \neq 2, i_1$ (因为 $a_{1,i_1} \neq 0$ 且只要 $i_1 \neq 2$, 那么 $A(2, 2)$ 这个矩阵包含了 a_{1,i_1} 项, 而 $i_1 = 2$ 的情况下, $i_2 \neq 2$ 是自动成立的, 因为 $A(2, 2)$ 根本就不含第二列), 根据反证的假设, 因此 $a_{2,i_2} \neq 0$ 并且 A 的第 i_2 列除此之外所有元素均为零

同理一直操作下去, 一共 n 次, 就得到了一组下标 $i_1, i_2, \dots, i_n$, 它们互不相同, 所以是 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列, 并且 A 的第 i_k 列恰有一个非零元素 a_{k,i_k} , 其余元素均为零

所以, 矩阵 A 的每行每列都恰有一个非零元素, 其余元素均为零, 则根据行列式的定义有

$$|A| = \pm a_{1,i_1} a_{2,i_2} \dots a_{n,i_n} \neq 0$$

这与条件: A 的主子式均为零矛盾

□

注释 8.5.1: 任意主子式均为零这个条件明显强于幂零, 证明“存在一列全为零”的灵感来源于 n 较小的情况, 容易枚举发现 $n=2, 3, 4$ 时候都是对的, 并且一旦这个得证就可以快速解决本题, 所以考虑去证明它

例题 8.5.2 设元素全为 0,1 的 n 阶方阵 A 满足 $AA^T = E + 2J$, 这里 J 是元素全为 1 的矩阵, 证明: $n = 4$ 且 $A^T A = E + 2J$.

证明. 方法一: 条件的等式表明 A 的每一行元素平方和是 3, 不同行之间对应的乘积是 2, 结合矩阵元素只有 0,1 可知 A 的每一行都有 3 个 1, 剩下的均为零, 由此可知 $AJ = 3J$, 这是因为 AJ 的 (i, j) 元就是 A 的第 i 行元素之和, 自然是 3

记 α 是元素全为 1 的列向量, 根据行列式的降阶公式有

$$|AA^T| = |E + 2J| = |E + 2\alpha\alpha^T| = |1 + 2\alpha^T\alpha| = 2n + 1$$

所以 A 是可逆矩阵, 并且 $A^T = A^{-1} + 2A^{-1}J$, 由 $AJ = 3J$ 知 $A^{-1}J = \frac{1}{3}J$, 所以

$$A^T = A^{-1} + 2A^{-1}J = \frac{2}{3}J + A^{-1} \Rightarrow A^T J = \frac{2}{3}J^2 + A^{-1}J = \frac{2n}{3}J + \frac{1}{3}J = \frac{2n+1}{3}J$$

这个等式说明 A^T 的每一行元素之和, 也就是 A 的每一列元素之和, 均为 $\frac{2n+1}{3}$, 而 A 的每一行元素之后均为 3, 求和即可得到 $\frac{n(2n+1)}{3} = 3n \Rightarrow n = 4$

此时, 显然 A 的每一行都是 3 个 1 和 1 个 0, 并且每行每列都恰有 1 个 0, 因此 A 的每一列都是 3 个 1 和 1 个 0, 并且不同列之间的乘积一定是 2, 这就等价于要证明的式子 $A^T A = E + 2J$, 结论得证

方法二: 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则 $AA^T = (a_{i1}a_{ji} + a_{i2}a_{j2} + \dots + a_{in}a_{jn})_{n \times n}$

条件等价于

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2 = 3, 1 \leq i \leq n, a_{i1}a_{ji} + a_{i2}a_{j2} + \dots + a_{in}a_{jn} = 2, \forall i \neq j$$

也就是说 A 每一行都恰有三个元素为 1, 其余元素均为零, 并且任意不同的两行对应的乘积均为 2, 由此可见 $n \geq 3$ 并且 $AJ = 3J$, 这是因为矩阵 AJ 的 (i, j) 元就是矩阵 A 的第 i 行元素之和, 也就是 3

当 $n = 3$ 时 A 只能是各个元素均为 1 的矩阵, 于是 $AA^T = A^2 = 3A = 3J \neq E + 2J$ 矛盾, 这说明 $n \geq 4$

如果 $n \geq 5$, 因为交换矩阵 A 的任意两行或者任意两列, 都不改变条件 (交换后仍然是元素均为 0,1 的矩阵, 并且每一行元素平方和是 3, 任意不同两行的乘积是 2), 并且 A 每一行都恰有三个 1, 所以不妨设 A 的第一行为 $(1, 1, 1, 0, \dots, 0)$, 现在看 A 的第 2 行到第 n 行, 因为第一行与第 k 行的乘积是 2, 所以第 k 行前三个位置一定恰有两个 1, 并且在第 4 个位置及以后恰有一个 1, 其余为零, 这里 $2 \leq k \leq n$

前三个位置中选择两个位置放 1, 剩下一个位置放 0 一共有三种选法, 而 $n \geq 5$, 所以在第 2 行到第 n 行中, 必定有两行, 它们前三个位置的元素对应全相同, 通过交换行, 不妨设这两行就是第二行和第三行, 再通过交换列, 不妨设第二行为 $(1, 1, 0, 1, 0, \dots, 0)$, 第三行为 $(1, 1, 0, 0, 1, 0, \dots, 0)$

再看第 4 行至第 n 行, 首先看前三个分量, 前面已经论证了这三个数字必定是: 两个 1 和一个 0, 如果这些行每一行的前三个分量均为 $(1, 1, 0)$, 则看第 2 行到第 n 行, 每一行后面的 $n-3$ 个元素, 均恰有一个 1, 根据抽屉原理必然有两行满足: 它们后面 $n-3$ 个分量完全相同, 进而这两行完全相同, 对应的这两行乘积为 3, 矛盾

因此, 在第 4 行至第 n 行中, 存在一行使得其前两个分量为一个 0 和一个 1, 而前三个分量恰有两个 1, 所以第三个分量必须是 1, 通过交换行列, 不妨设第四行是 $(1, 0, 1, \dots)$ 其中省略号部分恰有一个 1, 其余是 0

关注矩阵的前四行, 矩阵 A 形如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

考虑第四行与第二行的乘积可知 $A(4, 4) = 1$, 这是因为乘积为 2, 再考虑第四行与第三行的乘积可知 $A(4, 5) = 1$, 同样是因为乘积为 2, 这就导致了 A 的第四行有至少四个 1, 与每行恰有三个 1 矛盾

至此我们证明了 $n = 4$, 此时 A 的每一行均有三个 1 和一个 0, 如果 A 的某两行相同, 则这两行的乘积为 3, 与条件矛盾, 所以 A 的四行两两不同, 根据抽屉原理可知 A 的每一列恰有一个 0 (因为不论是某一列没有 0 还是某一列有至少两个 0, 都会导致 A 的某两行相同, 矛盾), 进而 A 的每一行每一列都恰有一个 0 (其余元素为 1), 所以 A 的每一列元素平方和均为 3, 任意不同两列对应的的乘积均为 2, 这就证明了 $A^T A = E + 2J$ 并且 $n = 4$.

□

注释 8.5.2: 方法一乘来乘去的最后竟然能把 n 解出来, 比较巧妙, 方法二则是纯粹的枚举与讨论, 想法很简单, 但是不好写过程

例 8.5.3 是否存在行列式为 1 的二阶整数方阵 A, B, C , 使得 $A^2 + B^2 = C^2$ 或者 $A^4 + B^4 = C^4$.

证明. 1. 取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 即可

2. 对任意二阶矩阵 A 满足 $A^2 - (\text{tr } A)A + (\det(A))E = 0$

假设有 A, B, C 满足 $A^4 + B^4 = C^4$, 令 $a = \text{tr}(A), b = \text{tr}(B), c = \text{tr}(C)$

则有 $A^4 = (aA - E)^2 = a^2A^2 - 2aA + E = (a^3 - 2a)A + (1 - a^2)E$

所以 $(a^3 - 2a)A + (b^3 - 2b)B + (2 - a^2 - b^2)E = (c^3 - 2c)C + (1 - c^2)E$

两边的迹相等, 则有 $a^4 + b^4 - 4(a^2 + b^2) = c^4 - 4c^2 - 2$

因此 $a^4 + b^4 - c^4 \equiv -2 \pmod{4}$, 所以 a, b 是奇数, 且 c 是偶数, 进而 $a^4 + b^4 - 4(a^2 + b^2) \equiv 2 \pmod{8}$

于是 $c^4 - 4c^2 - 2 \equiv -2 \pmod{8}$, 矛盾。

□

注释 8.5.3: 第一问是待定系数算出来的, 显然不可以都取上三角或者下三角矩阵, 于是考虑

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix} \Rightarrow bc = xy = -1$$

进而 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & y \end{pmatrix}, b, x = \pm 1$, 然后去计算 $A^2 + B^2$, 根据行列式条件找一组解即可

8.6 矩阵空间线性映射

例 8.6.1 设线性映射 $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ 满足 $f(E_n) = E_m, f(AB) = f(A)f(B)$, 证明: f 为单射且 $n|m$.

证明. 根据定义有

$$\begin{aligned} f(E_{ii}E_{jj}) &= f(0) = 0 = f(E_{ii})f(E_{jj}), \forall i \neq j \\ f(E_{ii}E_{ii}) &= f(E_{ii}) = f(E_{ii})^2, \forall 1 \leq i \leq n \\ E_m &= f(E_n) = f(PP^{-1}) = f(P)f(P^{-1}) \Rightarrow f(P)^{-1} = f(P^{-1}) \\ A &= PBP^{-1} \Rightarrow f(A) = f(P)f(B)f(P)^{-1} \\ A &= PBQ \Rightarrow f(A) = f(P)f(B)f(Q) \end{aligned}$$

由此可见, 线性映射 f 保持矩阵的相似关系, 相抵关系不变, 自然秩也不变
根据条件,

$$A_1 = f(E_{11}), \dots, A_n = f(E_{nn}), A_1 + \dots + A_n = E_m, A_i A_j = 0, A_i^2 = A_i$$

初等变换得到

$$\begin{aligned} r(A_1) + \dots + r(A_n) &= r \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ A_2 & A_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ A_n & & & A_n \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} A_1 + \dots + A_n & A_2 & \cdots & A_n \\ & A_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & A_n & & A_n \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} E_m & A_2 & \cdots & A_n \\ A_2 & A_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ A_n & & & A_n \end{pmatrix}, \begin{cases} A_2^2 = A_2 \\ A_2 A_k = 0 \end{cases} \\ &= r \begin{pmatrix} E_m & A_2 & \cdots & A_n \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ A_n & & & A_n \end{pmatrix} = \dots = r \begin{pmatrix} E_m & A_2 & \cdots & A_n \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = m \end{aligned}$$

显然这些 A_i 是相似的, 因此秩相同, 故 $nr(A_1) = m$ 得到 $n|m$

下面证明单射, 设 $f(X) = 0$, 假如 $X \neq 0$, 设 $X = PDQ, D = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, r \geq 1$

于是

$$f(X) = f(P)f(D)f(Q) = 0 \Rightarrow f(D) = A_1 + \dots + A_r = 0$$

此时不论是看秩还是看迹, 都显然矛盾, 结论得证

□

注释 8.6.1: 证明 $n|m$ 也可以利用迹来完成:

$$m = \text{tr}(A_1 + \dots + A_n) = \text{tr}(A_1) + \dots + \text{tr}(A_n) = n \text{tr}(A_1) = nr(A_1)$$

这里用到了幂等矩阵的秩和迹相等的性质

例题 8.6.2 设 p 是 $\mathbb{R}[x]$ 上的线性函数且满足若 $p(fg) = 0$, 则必有 $p(f) = 0$ 或者 $p(g) = 0$, 证明: 存在 $x_0, c \in \mathbb{R}$ 使得 $p(f) = cf(x_0)$ 对一切 f 恒成立.

证明. 分类讨论, 如果 $p(1) \neq 0$, 则不妨设 $p(1) = 1$, 再设 $p(x) = x_0, p(x^2) = A$, 我们证明 $A = x_0^2$

反证法, 设 $A = x_0^2 + \delta, \delta \neq 0$, 待定 $u, v \neq x_0$, 则有

$$p((x-u)(x-v)) = A - (u+v)x_0 + uv = \delta + (x_0-u)(x_0-v)$$

并且 $p(x-u) \neq 0, p(x-v) \neq 0$

现在让 $\delta + (x_0-u)(x_0-v) = 0$ 即可, 比如令 $x_0-u = -1, x_0-v = \delta$, 便导致了矛盾, 所以 $p(x^2) = x_0^2$

一般的, 在证明完 $p(x^k) = x_0^k, k = 0, 1, \dots, n$ 之后, 设 $p(x^{n+1}) = x_0^{n+1} + \delta$, 如果 $\delta \neq 0$ 则有

$$\begin{aligned} p((x-u)(x^n-v)) &= x_0^{n+1} + \delta - ux_0^n - vx_0 + uv \\ &= \delta + (x_0-u)(x_0^n-v) \end{aligned}$$

同理取 $x_0-u = -1, x_0^n-v = \delta$, 则相应的 $p(x-u) \neq 0, p(x^n-v) \neq 0$ 但是 $p((x-u)(x^n-v)) = 0$, 矛盾

如果 $p(1) = 0$, 我们直接证明所有的 $p(x^k)$ 都是零

反证法, 假设 $p(x^k)$ 是第一个非零的, 不妨设他就是 1, 也即

$$p(1) = p(x) = \dots = p(x^{k-1}) = 0, p(x^k) = 1$$

为找矛盾, 考虑 $p(x^{2k}) = a$, 那么 $p((x^k-c)^2) = a - 2c$, 于是我们取 $c = \frac{a}{2}$ 就有 $p((x^k - \frac{a}{2})^2) = 0$

可是 $p(x^k - \frac{a}{2}) = p(x^k) = 1$ 矛盾, 于是结论得证

□

8.7 综合问题

例题 8.7.1 设 n 为正整数且 $n \geq 2$, x 为整数, 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

试证明: A 是可逆矩阵; 又问: 何时 A^{-1} 也是整数矩阵 (即每个元素都是整数的矩阵)

证明. 首先计算行列式, 相邻行作差然后相邻列作差, 再把各行加到第一行可知

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ x-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & x-1 & -1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x-1 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x-1 & -x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 1-x \\ x-1 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x-1 & -x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x \end{vmatrix} = x(-x)^n + (-1)^{n+1}(1-x)(x-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}(x^n - (x-1)^n)$$

注意 x 是整数, 所以 $|A| \neq 0$ 也即 A 可逆

因为 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ 并且伴随矩阵显然是整数矩阵, 所以当 $x = 0, 1$ 时, $|A| = \pm 1$, 必然有 A^{-1} 是整数矩阵

当 $x \neq 0, 1$ 时, 注意伴随矩阵中 A_{11} 是矩阵 A 划去第一行第一列之后对应的子矩阵的行列式, 刚好就是在 A 中将 n 换成 $n-1$ 那个矩阵, 利用 A 行列式的结果可知

$$A^{-1}(1, 1) = \frac{A_{11}}{|A|} = -\frac{x^{n-1} - (1-x)^{n-1}}{x^n - (1-x)^n}$$

利用高考数学知识, 容易得到在 $x \neq 0, 1$ 时上式总是介于 $(-1, 0), (0, 1)$ 之间, 因此一定不是整数, 所以 A^{-1} 不是整数矩阵, 故充要条件是 $x = 0, 1$

□

例题 8.7.2 设 A, B, P 是 n 阶方阵, P 是幂零矩阵且满足 $(A - B)P = P(A - B), BP - PB = 2(A - B)$, 求一个可逆阵 Q 使得 $AQ = QB$.

证明. 将 P 换成 $\frac{P}{2}$ 可见没有任何影响, 因此不妨条件改成 $(A - B)P = P(A - B), BP - PB = A - B$

设 $X = A - B$, 则 $XP = PX, BP - PB = X$, 要找可逆阵 Q 使得 $(B + X)Q = QB$

既然要具体找出来矩阵 Q , 而不只是单纯证明相似, 那么 Q 肯定与矩阵 P 有关, 猜测 Q 是 P 的多项式, 对于每一个 P^k , 代入之后会出现 $BP^k, P^k B, XP^k, P^k X$ 这四种项, 后两个利用交换性自然可以统一, 而前两个我们希望把 P 统一的挪到一边, 也就是说希望矩阵 P 只出现在一侧

根据条件 $BP - PB = X$ 有

$$\begin{aligned} BP^k - PBP^{k-1} &= P^{k-1}X, PBP^{k-1} - P^2BP^{k-2} = P^{k-2}XP = P^{k-1}X \\ &\dots, P^{k-1}BP - P^k B = P^{k-1}X \Rightarrow BP^k - P^k B = kP^{k-1}X \end{aligned}$$

取 $k = n$ 可知 $P^{n-1}X = 0$, 设 $Q = c_0 + c_1P + \dots + c_{n-1}P^{n-1}$, 代入可知

$$\begin{aligned} QB - BQ - XQ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k P^k B - B \sum_{k=0}^{n-1} c_k P^k - X \sum_{k=0}^{n-1} c_k P^k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} c_k (P^k B - BP^k) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k P^k X = \sum_{k=1}^{n-1} c_k k P^{k-1} X - \sum_{k=0}^{n-1} c_k P^k X \\ &= (c_1 I + 2c_2 P + \dots + (n-1)c_{n-1}P^{n-2} - c_0 I - c_1 P - \dots - c_{n-1}P^{n-1}) X \\ &= ((c_1 - c_0)I + (2c_2 - c_1)P + \dots + ((n-1)c_{n-1} - c_{n-2})P^{n-2}) X \end{aligned}$$

取 $c_0 = 1$, 然后令各个系数为零, 即可依次解出来 $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$, 注意 $c_0 = 1$ 并且矩阵 P 是幂零的, 所以由此构造的 Q 一定是可逆阵, 特征值全为 1, 结论得证

□

例题 8.7.3 设 $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n, \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$, 令 n 阶方阵 $A = (x_i^{\lambda_j})$, 求证: $\det A > 0$.

证明. 首先证明这样子的矩阵 A 一定可逆:

反证法, 则线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解, 设为

$$\begin{cases} c_1 x_1^{\lambda_1} + c_2 x_1^{\lambda_2} + \cdots + c_n x_1^{\lambda_n} = 0 \\ \vdots \\ c_1 x_n^{\lambda_1} + c_2 x_n^{\lambda_2} + \cdots + c_n x_n^{\lambda_n} = 0 \end{cases}$$

这里 $c_1, \dots, c_n$ 不全为零, 不妨设 c_m 是最后一个非零的项, 也即后面的全是零

考虑函数 $f(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2} + \cdots + c_n x^{\lambda_n}$, 条件表明 $f(x)$ 有 n 个互不相同的正实根 $x_1, \dots, x_n$

所以 $c_1 + c_2 x^{\lambda_2 - \lambda_1} + \cdots + c_n x^{\lambda_n - \lambda_1} = 0$ 有 n 个正实根, 根据罗尔中值定理可知

$$c_2 (\lambda_2 - \lambda_1) x^{\lambda_2 - \lambda_1 - 1} + \cdots + c_n (\lambda_n - \lambda_1) x^{\lambda_n - \lambda_1 - 1} = 0 \Leftrightarrow c_2 (\lambda_2 - \lambda_1) x^{\lambda_2} + \cdots + c_n (\lambda_n - \lambda_1) x^{\lambda_n} = 0$$

有 $n - 1$ 个正实根, 然后同理操作, 一直下去, 可得

$$c_m (\lambda_m - \lambda_1) (\lambda_m - \lambda_2) \cdots (\lambda_m - \lambda_{m-1}) x^{\lambda_m} = 0$$

有 $n - m + 1 \geq 1$ 个正根, 矛盾

现在将 $|A|$ 看成在区域 $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ 上的 n 元连续函数 $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, 则 f 恒非零, 因此要么恒正要么恒负. 特别的, 取 $f(1, 2, \dots, n)$, 利用范德蒙德行列式可知 $f > 0$, 故这样子的矩阵 A , 一定有 $|A| > 0$

□

例题 8.7.4 设 A, B 是 n 阶方阵且对任意复数 t 都有 $\dim \operatorname{Im}(A + tB) \leq \dim \operatorname{Im} A$, 证明: $B(\ker A) \subset \operatorname{Im} A$, 这里 $B(\ker A) = \{Bx | x \in \ker A\}$

证明. 注意问题的条件和结论在同时相抵变换 $A \rightarrow PAQ, B \rightarrow PBQ$ 下不改变, 因此不妨设 A 是相抵标准型

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}, \text{ 则条件等价于对任意 } t \neq 0 \text{ 都有 } r \begin{pmatrix} B_1 + tI_r & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \leq r$$

结论等价于从 $Ax = 0$ 能推出 $Bx = Ay$ (存在 y), 而 $Ax = 0$ 代入显然等价于 $x = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$, 对于任意的 $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, 方程 $Bx = Ay$ 其实就是

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} B_2 u \\ B_4 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

换句话说, 要证明的就是: 对任意 u , 都能找到 y_1 使得上面的矩阵等式成立, 那很明显等价于 $B_4 = 0$, 然后取 $y_1 = B_2 u$ 就是了, 至此问题等价翻译完, 就是:

若对任意 $t \neq 0$ 都有 $r \begin{pmatrix} B_1 + tI_r & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \leq r$, 证明: $B_4 = 0$

反证法, 假设 $B_4 \neq 0$, 对任意 $t \neq 0$, 现在对矩阵 $\begin{pmatrix} B_1 + tI_r & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ 的 B_4 所在的那些行与列做初等变换, 则过程中秩不改变, 并且左上角的块不动, 但是 B_2, B_3 所在的块会变。

初等变换将 B_4 变成其相抵标准型, 则为非零矩阵, 设秩为 s 相应的有

$$r \begin{pmatrix} B_1 + tI_r & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} B_1 + tI_r & U_1 & U_2 \\ V_1 & I_s & 0 \\ V_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} B_1 - U_1 V_1 + tI_r & 0 & U_2 \\ 0 & I_s & 0 \\ V_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leq r$$

这很明显能看出来矛盾, 注意左上角是 r 阶方阵, 所以至多有 r 个不同的复数 t 使得 $|B_1 - U_1 V_1 + tI_r| = 0$, 再算上 0 最多也就 $r + 1 \leq n + 1$ 个, 那么除去这至多 $n + 1$ 个复数之外, 我们任取一个复数 t_0 代入, 左上角都是可逆阵, 而 $(2, 2)$ 元也是可逆阵, 所以就会有一个 $r + s$ 阶非零子式, 与秩不超过 r 矛盾, 结论得证

□

注释 8.7.1: 不妨设相抵标准型是因为条件等价于 $r(A + tB) \leq r(A), \forall t$, 同时相抵变换不改变秩的条件, 而结论等价于: 任意 x , 如果 $Ax = 0$ 则存在 y 使得 $Bx = Ay$, 而同时相抵变换后 $Ax = 0 \Leftrightarrow AQx = 0, Bx = Ay \Leftrightarrow BQx = AQy$, 可见就是 x, y 前面多了一个 Q 而已, 所以没有影响

从证明过程可以看出, 对任意复数 t , 实际上可以弱化为对 $n + 1$ 个不同的复数 t 成立

8.8 挑战题 (非习题难度)

下面这些问题仅供欣赏, 没时间讲并且难度很大, 考试不会考, 但是问题与结论确实都非常精彩。第一题和第三题的答案可以在公众号《数海钓鱼》上找到, 第二题在谢起鸿的博客上有, 至于第四题, 我也没有答案, 留给读者

命题 8.8.1: 二次曲面的半不变量

设 A 为三阶实对称矩阵, $\alpha \in \mathbb{R}^3$ 是列向量, c 是实数, 对任意 $\beta \in \mathbb{R}^3$, 定义

$$M_1 = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & c \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

再设 $g(\lambda) = |\lambda I - A|$, $h_1(\lambda) = |\lambda I - M_1|$, $h_2(\lambda) = |\lambda I - M_2|$, 证明:

1. 若 $g(0) = h_1(0) = 0$, 则 $h_1'(0) = h_2'(0)$;
2. 若 $g(0) = g'(0) = h_1(0) = h_1'(0) = 0$, 则 $h_1''(0) = h_2''(0)$.

命题 8.8.2: 反对称阵的 pf

设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶反对称矩阵, 证明:

$$|xI - A| = x^n + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} p_k^2 x^{n-2k}, p_k = \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 \dots i_{2k})} a_{i_1 i_2} a_{i_3 i_4} \dots a_{i_{2k-1} i_{2k}}$$

其中最后的求和是对 $i_1, i_2, \dots, i_{2k} \in \{1, 2, \dots, n\}$ 两两不同, 且 $i_1 < i_2, i_3 < i_4, \dots, i_{2k-1} < i_{2k}, i_1 < i_3 < \dots < i_{2k-1}$ 的所有下标组合 $(i_1, i_2, \dots, i_{2k})$ 求和.

推论 8.8.1

设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶反对称矩阵 (n 为偶数), 证明: $|A| = \left(\sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 \dots i_n)} a_{i_1 i_2} a_{i_3 i_4} \dots a_{i_{n-1} i_n} \right)^2$
 $\sum$ 表示对所有满足 $i_1 < i_2, i_3 < i_4, \dots, i_{n-1} < i_n$, 且 $i_1 < i_3 < \dots < i_{n-1}$ 的排列 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 求和.

注释 8.8.1: 由此可见奇数阶反对称阵的行列式为零, 偶数阶反对称阵的行列式是某个关于矩阵元素的多元多项式的完全平方, 这个多项式称为反对称阵的 Pfaffian.

题 8.8.1

设全体 n 阶方阵构成的集合为 V , 线性变换 f 满足对任意 $X, Y \in V$ 都有 $f(XY) = f(X)Y + Xf(Y)$, 证明: 存在矩阵 A 使得 $f(X) = AX - XA$ 恒成立.

题 8.8.2

设 V 是全体迹为零的 n 阶方阵构成的集合, 线性映射 f 满足对任意 $A, B \in V$ 都有

$$f(AB - BA) = f(A)f(B) - f(B)f(A)$$

证明: V 是 $n^2 - 1$ 维线性空间, 并求出所有满足条件的 f .

8.9 练习题

习题 8.9.1 设 $a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$, 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 + a_2 & a_1 + a_3 & \cdots & a_1 + a_n \\ a_2 + a_1 & 0 & a_2 + a_3 & \cdots & a_2 + a_n \\ a_3 + a_1 & a_3 + a_2 & 0 & \cdots & a_3 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n + a_1 & a_n + a_2 & a_n + a_3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

习题 8.9.2 设 n 阶方阵 A 的 (i, j) 元为 $|i - j|$, 求 $|A|$.

习题 8.9.3 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 + a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 + a_2 & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3 + a_3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n + a_n \end{vmatrix}.$$

习题 8.9.4 计算行列式

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ -1 & x & 1 & \ddots & \vdots \\ -2 & -1 & x & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1-n & \cdots & -2 & -1 & x \end{vmatrix}$$

习题 8.9.5 求所有的 2020 次多项式 $f(x)$, 使得对每一个 $f(x)$ 的根 x_k , 都存在首一的多项式 $g_k(x), h_k(x)$ 使得 $f(x) = (x - x_k)g_k(x)h_k(x)$, 并且 $g_k(x), h_k(x)$ 的第二项 (次数第二高的项) 相同.

习题 8.9.6 设 A_1 为 $1 \times n$ 矩阵, $A_1 \neq O$. 如 $A_1 x = 0$ 有非零解, 取其中一个 α_1 , 令 $A_2 = \begin{pmatrix} A_1 \\ \alpha_1^T \end{pmatrix}$, 其中 α_1^T 表示 α_1 的转置. 如 $A_2 x = 0$ 有非零解, 再取其中一个 α_2 , 令 $A_3 = \begin{pmatrix} A_2 \\ \alpha_2^T \end{pmatrix}$, 如此得 $A_1, A_2, \dots$, 直到 $A_r x = 0$ 只有零解为止. 证明: 对任意 A_1 都有相应的 $r \leq n$.

习题 8.9.7 设 A, B 是 n 阶方阵且特征多项式相同, n 阶方阵 M 满足 $AM = MB$, 证明: 对任意 n 阶方阵 X 都有 $|A - MX| = |B - XM|$.

习题 8.9.8 设 A, B 为 n 阶矩阵, A_i 为 A 的第 i 列, 证明:

$$\det(BA_1, A_2, \dots, A_n) + \cdots + \det(A_1, A_2, \dots, BA_n) = \det(A) \cdot \text{tr}(B)$$

习题 8.9.9 证明: $r \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$ 等价于存在矩阵 X, Y 使得 $AX + YB = C$.

习题 8.9.10 设 A, B 为 n 阶方阵且 $r(A) = r(B), A^2 B = A$, 证明: $B^2 A = B$.

习题 8.9.11 设 n 阶方阵 A 的每行都恰有两个元素为 1, 其余元素均为零, J 是元素全为 1 的方阵, 若 $A^2 + 2A = 2J$, 求 A .

习题 8.9.12 设 A 为 2021 阶对称矩阵, A 的每一行均为 $1, 2, \dots, 2021$ 的一个排列, 求 $\text{tr}(A)$.

习题 8.9.13 若满射 $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$ 满足 $f(XY) \leq \min(f(X), f(Y))$ 恒成立, 证明: $f(X) = r(X)$.

习题 8.9.14 设 A, B 是 n 阶复方阵, 满足 $A^2 + B^2 = AB$, 若 $AB - BA$ 可逆, 证明: $3|n$

习题 8.9.15 设 $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n, 1 \leq \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_n$, 证明:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{\beta_1} + 1 & \alpha_1^{\beta_2} + 1 & \cdots & \alpha_1^{\beta_n} + 1 \\ \alpha_2^{\beta_1} + 1 & \alpha_2^{\beta_2} + 1 & \cdots & \alpha_2^{\beta_n} + 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^{\beta_1} + 1 & \alpha_n^{\beta_2} + 1 & \cdots & \alpha_n^{\beta_n} + 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1^{\beta_1} - 1 & \alpha_1^{\beta_2} - 1 & \cdots & \alpha_1^{\beta_n} - 1 \\ \alpha_2^{\beta_1} - 1 & \alpha_2^{\beta_2} - 1 & \cdots & \alpha_2^{\beta_n} - 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^{\beta_1} - 1 & \alpha_n^{\beta_2} - 1 & \cdots & \alpha_n^{\beta_n} - 1 \end{vmatrix} > 0.$$

习题 8.9.16 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1(x_1 - a) & x_1^2(x_1 - a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1 - a) \\ 1 & x_2(x_2 - a) & x_2^2(x_2 - a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2 - a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n(x_n - a) & x_n^2(x_n - a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - a) \end{vmatrix}$$

第九章 线性空间初步

线性空间的应用非常广泛，教材上的题目大多停留在机械的验证线性空间的若干性质，并没有展现出线性空间理论或者这个方法的精彩之处。实际上许多难题本身题干叙述里面或许并不会线性空间，或者说并不需要你验证线性空间的任何性质，但是却需要你主动的考虑和构造一些线性空间，来巧妙的解决问题。

研究线性空间时，维数是一个非常重要的考虑角度，比如研究满足某些条件的线性空间维数最值时候，有些是可以直接强行计算，有些则需要凭借注意力构造一个不相交的线性空间，从而快速解决；又比如说明解的存在性时候，我们可以从维数公式角度入手（参考 14 届 CMC 第二次补赛题）

无限维线性空间在高等代数中一般不会出现，涉及到无限维线性空间时除去定义之外，就只有 Zorn 引理可以使用，一切矩阵理论都失效（经典的无限维例子就是左右移位算子）

定理 9.0.1: 佐恩引理

设 A 是非空偏序集，如果 A 的任何一条链（全序子集）在集合 A 中都有上界，则 A 一定有极大元。

注释 9.0.1: 偏序关系就像小于等于号或者集合包含关系一样（定义类似），全序子集或者链，指的是其中任何两个元素都可以“比大小”（不必集合 A 中所有元素均可比大小），在 A 中有上界指，上界设为 $M \in A$ ，则这条链中所有元素都“小于 M ”，极大元是字面意思，极大元一定默认在 A 中

线性空间部分几乎没有什么定理，最重要的是会灵活运用，以及找好思考角度

9.1 维数问题

例 9.1.1 设 A 是 n 阶复方阵, 满足每一行, 每一列, 对角线元素和, 反对角线元素和都相等, 证明: 全体这样的矩阵 A 构成线性空间, 并计算其维数. (幻方矩阵空间)

证明. 首先分析一下, 假如把这些相等的求和, 其和都记为 s , 则 n 个行和, n 个列和, 一个对角线和, 一个反对角线和, 总共是 $2n+2$ 个数据, 都要等于 s , 因此矩阵 A 的各个元素算上 s 一共是 n^2+1 个变量, 对应了 $2n+2$ 个方程, 所以直观来看有 n^2-2n-1 这么多个自由度

进一步分析一下, 如果矩阵的 n 个行和还有前 $n-1$ 个列和都是 s , 显然所有行和相加等于所有列和相加, 因此最后那个列和必定也是 s , 换句话说就是有一个方程是多余的, 不提供约束条件! 因此维数还得再加一, 也即维数大概就是 n^2-2n , 当然还需要进一步讨论一下

$n=1, 2$ 时, 直接枚举可知维数都是 1, 在 $n=3$ 时, 设出左上角的二阶方阵四个元素, 以及相等的元素之和 s , 则其余所有元素均确定, 然后根据条件得到两个有效的方程, 也容易算出来维数就是 3, 以下假设 $n \geq 4$ (实际上 $n \geq 4$ 的证明和 $n=3$ 时候是一致的, 如果 $n=3$ 没看懂, 往下看即可)

设矩阵 A 的行和, 列和, 对角线, 反对角线均为 s , 再设 A 前 $n-1$ 行和前 $n-1$ 列构成的子矩阵的 (i, j) 元为 $a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n-1$, 根据行和 s , 列和 s 以及对角线 s 可以确定矩阵 A 为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & s - \sum_{j=1}^{n-1} a_{1j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & s - \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-1,j} \\ s - \sum_{j=1}^{n-1} a_{j1} & \cdots & s - \sum_{j=1}^{n-1} a_{j,n-1} & s - \sum_{k=1}^{n-1} a_{kk} \end{pmatrix}$$

此时还剩下三个条件: A 的最后一行和为 s , 最后一列和为 s , 反对角线为 s , 对应着三个方程, 现在总共有 $(n-1)^2+1$ 个变量, 根据前面的分析, 最后的行和与最后的列和两个方程实际上是一个 (另一个是多余的), 因此现在还有最后两个方程

$$ns - \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{kk} = s, 2s - \sum_{j=1}^{n-1} (a_{1j} + a_{j1}) + \sum_{i=1}^{n-2} a_{n-i,i+1} = s$$

解方程有 $s = \sum_{j=1}^{n-1} (a_{1j} + a_{j1}) - \sum_{i=1}^{n-2} a_{n-i,i+1}$, 再代入回去得到

$$(n-1) \left(\sum_{j=1}^{n-1} (a_{1j} + a_{j1}) - \sum_{i=1}^{n-2} a_{n-i,i+1} \right) = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{kk}$$

在 $n \geq 4$ 时, 显然左边不含有 $a_{n-1,n-1}$ 项, 右边含有这一项且系数为 2, 因此根据该方程可以解出来 $a_{n-1,n-1}$ 为其余 a_{ij} 的线性组合, 最终矩阵 A 各个元素, 都是前面 $(n-1)^2-1$ 个变量的线性组合, 于是维数是 $(n-1)^2-1 = n^2-2n$

□

注释 9.1.1: $n=2$ 时最后那个方程是 $2a_{11} = a_{11} + a_{11}$, 等于没有方程, 所以结论才会不一样

例 9.1.2 设 V 是由一些 n 阶方阵构成的线性空间, 且矩阵两两可交换, 证明: $\dim V$ 最大值是 $\left[\frac{n^2}{4}\right] + 1$.

证明. 先证明维数不超过 $\left[\frac{n^2}{4}\right] + 1$, 采用归纳法, $n = 1$ 时结论显然成立, 假设 $n - 1$ 时成立, 则 n 时

因为 V 中矩阵两两可交换, 所以这些矩阵可以同时上三角化, 并且过程中不会改变维数 (相当于线性空间的同构映射), 所以不妨设 V 中矩阵都是上三角的

考虑从 V 到全体 $n - 1$ 阶方阵空间的线性映射

$$\begin{aligned} f: V \rightarrow M_{n-1}(\mathbb{R}), f \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \\ g: V \rightarrow M_{n-1}(\mathbb{R}), g \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

这里 f 相当于是截取左上角 $n - 1$ 阶方阵的映射, g 则是截取右下角 $n - 1$ 阶方阵的映射

因为 V 中所有矩阵两两可交换并且是上三角的, 所以对于 f 来说, 将 V 中所有矩阵按照 f 那样子分块, 则 $f(V)$ 中所有的矩阵是两两可交换的, 显然 $f(V)$ 也是线性空间, 并且是 $n - 1$ 维空间的子空间, 根据归纳假设, 所以 $\dim \operatorname{Im} f \leq \left[\frac{(n-1)^2}{4}\right] + 1$, 对于线性映射 g , 同理也有 $\dim \operatorname{Im} g \leq \left[\frac{(n-1)^2}{4}\right] + 1$

下面考虑 $\ker f$, 显然 $\ker f$ 里面的矩阵左上角都是零, 注意 A 是上三角的, 所以 $\ker f$ 中的矩阵前 $n - 1$ 列都是零, 最后一列是由 V 中全体矩阵的最后一列构成, 同理 $\ker g$ 中的矩阵后面 $n - 1$ 列都是零, 第一行是由 V 中全体矩阵的第一行构成, 也即

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \text{ 为 } V \text{ 中矩阵的最后一列} \right\}, \ker g = \left\{ \begin{pmatrix} \beta^T \\ 0 \end{pmatrix} \mid \beta^T \text{ 为 } V \text{ 中矩阵的第一行} \right\}$$

因为 V 中矩阵两两可交换, 所以 $\ker f, \ker g$ 中的矩阵也是, 故

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^T \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} \beta^T \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta^T \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta^T \alpha = 0$$

因此 $\ker f$ 中的向量和 $\ker g$ 中的向量互相是垂直的, 这两个空间均可看做是 n 维线性空间 R^n 的子空间, 这个条件表明其中一个包含在另外一个的正交补里面 (如果不知道, 就按定义验证维数), 故 $\dim \ker f + \dim \ker g \leq n$, 根据维数公式有

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \ker g + \dim \operatorname{Im} g \\ &= \frac{\dim \ker f + \dim \ker g}{2} + \frac{\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g}{2} \\ &\leq \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{(n-1)^2}{4}\right] + 1 = \left[\frac{n^2}{4}\right] + 1 \end{aligned}$$

最后是取等条件, 根据维数可知大约矩阵有 $\frac{1}{4}$ 的地方任取, 剩下的都是零, 所以 $n = 2m$ 时考虑 $\begin{pmatrix} 0 & X_{m \times m} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I_{2m}$,

$n = 2m + 1$ 时考虑 $\begin{pmatrix} 0 & X_{(m+1) \times m} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I_{2m+1}$ 即可, 满足条件 □

例题 9.1.3 设 V 是由一些 n 阶方阵构成的线性子空间, 满足其中任何矩阵的秩都不超过 r , 这里 $r \leq n$, 证明: $\dim V$ 最大值是 rn .

证明. 本题构造是显然的, 只需要让矩阵前 r 列任取, 后面的列全为零即可, 故只要证明不等式

显然可以不妨设 V 中秩最大的矩阵, 秩是 r , 然后证明 $\dim V \leq rn$ 即可, 注意对 V 中所有矩阵做同时的左右乘可逆阵, 是同构线性映射, 因此不改变维数, 也就是说具体的, 可以不妨设 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V$

我们尝试找一个 $n^2 - nr$ 维的线性空间 W , 使得 $V \cap W = \{0\}$, 这样子根据维数公式就能得到结论

考虑 W 是全体 $\begin{pmatrix} 0 & A^T \\ A & B \end{pmatrix}$ 这样的矩阵构成的线性空间, 则 $\dim W = n^2 - nr$, 我们证明 $V \cap W = \{0\}$

任何 W 中的矩阵, 如果在 V 中, 则对任意 $k \neq 0$, 根据线性空间知道 $\begin{pmatrix} kI & A^T \\ A & B \end{pmatrix} \in V$, 所以

$$r \begin{pmatrix} kI & A^T \\ A & B \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} kI & A^T \\ 0 & B - \frac{1}{k}AA^T \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & B - \frac{1}{k}AA^T \end{pmatrix} \leq r$$

这说明 $B = \frac{1}{k}AA^T$, 故只能 $B = AA^T = 0$, 所以 $A = 0$, 结论得证

□

注释 9.1.2: 本题的思想很重要, 证明一个空间维数不超过 r 时, 我们可以找一个 $n - r$ 维空间, 使得这两个空间一定没有交集, 只要找到之后, 就能立刻得到需要的结论, 很多难题迎刃而解

这个线性空间不能构造为 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$, 虽然维数对了, 但是我们只能证到 $A = 0$, B 控制不了, 所以无法实现目标

例题 9.1.4 设 V 是由全体 n 阶方阵构成的线性空间, W 是 V 的子空间, 满足对任意 $A \in V, B \in W$ 都有 $AB \in W$, 证明: n 整除 $\dim W$, 并且可以构造无穷个满足条件的 n 维子空间 W .

证明. 根据条件, 对于 B 中的任何一个矩阵, 左乘一切可逆阵之后都还在 B 中, 也就是说可以随意做初等行变换, 另一方面, 对于任何可逆阵 Q , 考虑同构线性映射 $\varphi(X) = XQ$, 则容易验证 $\varphi(V)$ 是同样具备题中性质的线性空间, 且维数一样, 因此我们还可以做初等列变换

设 B 是 V 中秩最大的矩阵, 秩为 r (假设 $1 \leq r \leq n-1$, 不考虑平凡情况), 则经过初等列变换 (上述同构线性映射), 不妨设 B 的前 r 列就是极大无关组, 然后用左乘矩阵 A 的条件, 做初等行变换可知 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V$

分块矩阵乘法表明

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \in V, \forall A, C$$

所以 $\dim V \geq nr$, 根据上一题结论立刻得到 $\dim V = nr$, 结论得证

方法二: 不用上一题结论, 我们直接证明 V 中所有矩阵后面 $n-r$ 列全为零

反证法, 假设某个 V 中的矩阵 X , 后面 $n-r$ 列不全为零, 因为 V 是线性空间, 并且包含了前面 r 列任取 (后面均为零) 的所有矩阵, 所以 (作差) 不妨设 X 的前 r 列均为零, 然后做初等行变换, 根据条件仍在 V 中, 因此不妨设 X 的最后一行不全为零, 再考虑 $X + \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V$, 这个矩阵的秩显然至少是 $r+1$, 矛盾

至于构造, 对任意 λ , 考虑

$$\begin{pmatrix} a_1 & \lambda a_1 & 0 & \cdots \\ a_2 & \lambda a_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ a_n & \lambda a_n & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

显然不同的 λ 对应不同的线性空间, 并且都是 n 维的, 也满足条件 (因为只是对满足条件的线性空间做了一次初等列变换而已, 如开头所述, 这没有影响) $\square$

例 9.1.5 对 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义 $f(X) = |x_1| + \dots + |x_r| - |x_{r+1}| - \dots - |x_{r+s}|$ 为 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射, 其中 $r \geq s \geq 0$, 证明:

- (1) 存在 $n-r$ 维子空间 W 使得对任意 $X \in W$ 都有 $f(X) = 0$
- (2) 若 W_1, W_2 是两个 $n-r$ 维子空间, 且满足 $f(X) = 0, \forall X \in W_1 \cup W_2$, 证明: $\dim(W_1 \cap W_2) \geq n - (r+s)$
- (3) 上一问中, 结论改成任意有限个 $n-r$ 维子空间, 结论也成立.

证明. 对于第一问, 考虑

$$x_1 = x_{r+1}, x_2 = x_{r+2}, \dots, x_s = x_{r+s}, x_{s+1} = \dots = x_r = 0$$

这个线性空间, 则维数是 $n-r$ 且 $f(X)$ 在里面恒为零

第二问:

如果线性空间 W 使得 $f(X)$ 在 W 中恒为零, 考虑只有前面 r 个分量非零的线性空间 U , 这是 r 维的并且显然 U 与 W 不能相交 (否则 $|x_1| + \dots + |x_r| = 0$ 只能全为零), 因此 $\dim W \leq n-r$

设 V 是前面 $r+s$ 个分量均为零, 后面任取的线性空间, 这是 $n-(r+s)$ 维的, 对任何满足 $f(W) \equiv 0$ 的 $n-r$ 维线性空间 W , 只要证明 $V \subset W$ 就能得到结论

考虑线性空间 $W+V$ 中任何一个向量 $\alpha + \beta$, 注意 f 的运算只涉及前 $r+s$ 个分量, 并且 $\beta \in V$ 前面 $r+s$ 个分量都是零 (其实 β 和零向量没有区别), 所以 $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) = 0$, 也就是说 $f(X)$ 在一个更大的线性空间 $W+V$ 中依然恒为零, 但是前面说过 $n-r$ 就是线性空间的维数, 所以 $W+V = W$ 也即 $V \subset W$

自然本题中 $V \subset W_1, W_2$, 于是 $\dim(W_1 \cap W_2) \geq \dim V = n - (r+s)$, 得证

由此可知第三问结论显然成立, 因为任何满足条件的 $n-r$ 维子空间, 都包含了 V

□

注释 9.1.3: 这个 $n-r$ 维数是有意义的, 注意很明显 $f(X) = 0$ 的解集不是一个线性空间, 题目相当于是在这个解集里面找了一个线性空间, 那解集里面最多能有多大 (多少维) 的线性空间? 其实就是 $n-r$, 因为如果考虑前 r 个分量任取, 后面分量全为零的线性空间 (记为 U), 这是 r 维的, 假如还有一个 $n-r+1$ 维空间 W 使得 $f(W) = 0$, 那么 U, W 会相交, 但是这两空间明显不能相交, 所以 $n-r$ 这个维数, 就是解集里面找线性空间的最大维数

再想一下, 如果我说要在解集里面找一个维数最大的线性空间, 虽然这样的线性空间可能有很多, 但是因为维数要最大, 那是不是应该让 $x_{r+s+1}, \dots, x_n$ 这些东西任取, 反正它们也不出现在 $f(X)$ 当中, 这样就平白无故送给你了 $n-r-s$ 个维数, 在前面 $r+s$ 个分量中, 又和第一问类似的能提供 s 个维数, 似乎只有这样才能凑出来 $n-r$ 这么多维数

因此我们自然推测, 是否任何一个这样的 W , 都一定包含了前面 $r+s$ 个分量全为零, 后面任取的这个线性空间? 这刚刚好是一个 $n-(r+s)$ 维线性空间, 于是结论得证

本题延续了之前的思想: 证明维数最大 $n-r$, 那就找一个不会相交的 r 维线性空间

9.2 对偶空间问题

例 9.2.1 1. 设 V 是线性空间 (维数不一定有限), $f_1, \dots, f_n$ 是 V 上的线性函数, 证明: 线性函数 f 可以由 $f_1, \dots, f_n$ 线性表出等价于 $\bigcap_{k=1}^n \ker f_k \subset \ker f$.

2. 设 V 是线性空间 (维数不一定有限), $f_1, \dots, f_n$ 是 V 上的线性函数且线性无关, 证明: 存在 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V$ 使得 $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}, \forall 1 \leq i \leq n$.

证明. 对于 1, 如果已知 f 可以由 $f_1, \dots, f_n$ 线性表出, 则显然有 $\bigcap_{k=1}^n \ker f_k \subset \ker f$

反之, 如果 $\bigcap_{k=1}^n \ker f_k \subset \ker f$, 显然可以不妨设 $f_1, \dots, f_n$ 是线性无关的, 然后采用反证法, 于是只需要论证结论 2, 就可以得到矛盾, 进而得证, 下面证明 2

采用归纳法, $n = 1$ 时显然成立, 假设 n 时结论成立, 则 $n + 1$ 时, 只需要证明存在向量 α 使得 $f_1(\alpha) = \dots = f_n(\alpha) = 0, f_{n+1}(\alpha) = 1$, 则可以同理找到剩下 n 个向量, 进而完成证明

显然 $f_1, \dots, f_n$ 线性无关, 根据归纳假设, 存在 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 使得 $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$

根据条件, 一切形如 $c_1 f_1 + \dots + c_n f_n + c f_{n+1}$ 这样的线性函数, 都不会恒为零, 我们找一组 c_i 使得这个线性函数作用在 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 上均为零, 然后利用条件就可以得到一个新的向量, 使得代入后非零

因为

$$(c_1 f_1 + \dots + c_n f_n + c f_{n+1})(\alpha_k) = c_k + c f_{n+1}(\alpha_k) = 0, 1 \leq k \leq n$$

所以取 $c = 1, c_1 = -f_{n+1}(\alpha_1), \dots, c_n = -f_{n+1}(\alpha_n)$, 并考虑线性函数

$$h(x) = f_{n+1}(x) - (f_{n+1}(\alpha_1) f_1(x) + \dots + f_{n+1}(\alpha_n) f_n(x))$$

则 $h(x)$ 不恒为零, 并且 $h(\alpha_1) = \dots = h(\alpha_n) = 0$, 所以存在 β 使得 $h(\beta) = 1$

寻找 $x = c_1 \alpha_1 + \dots + c_n \alpha_n + c \beta$ 这样的向量, 使得 $f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0, f_{n+1}(x) = 1$, 计算有

$$\begin{aligned} f_1(x) &= c_1 + c f_1(\beta) = 0, \dots, f_n(x) = c_n + c f_n(\beta) = 0 \Rightarrow c_1 = -c f_1(\beta), \dots, c_n = -c f_n(\beta) \\ f_{n+1}(x) &= c_1 f_{n+1}(\alpha_1) + \dots + c_n f_{n+1}(\alpha_n) + c f_{n+1}(\beta) \\ &= -c f_1(\beta) f_{n+1}(\alpha_1) - \dots - c f_n(\beta) f_{n+1}(\alpha_n) + c f_{n+1}(\beta) = c h(\beta) = c \Rightarrow c = 1 \end{aligned}$$

由此可见, 向量 $x = \beta - (f_1(\beta) \alpha_1 + \dots + f_n(\beta) \alpha_n)$ 满足要求, 结论得证

□

注释 9.2.1: 这两个结论是等价的, 或许结论 2 更好用也更加清晰一些 (注意本题从未涉及到维数, 因此适用于无限维线性空间)

结论 2 的证明想法来自于 $n = 2$, 如果你不会做, 试试 $n = 2$, 自己想想该构造什么东西就明白了, 细节见上课视频, 另外, 本题也有泛函分析的做法

例 9.2.2 1. 对任意一组线性无关的 n 阶实方阵 $A_1, A_2, \dots, A_{n^2}$, 证明: 存在唯一一组线性无关的 n 阶实方阵

$B_1, B_2, \dots, B_{n^2}$, 使得 $\text{tr}(A_i B_j) = \delta_{ij}, \forall 1 \leq i, j \leq n^2$; 并且此时还会成立 $\sum_{i=1}^{n^2} A_i B_i = \sum_{i=1}^{n^2} B_i A_i = nI$

2. 对任意一组线性无关的 n 阶实方阵 $A_1, A_2, \dots, A_{n^2}$, 证明: 存在唯一一组线性无关的 n 阶实方阵 $B_1, B_2, \dots, B_{n^2}$, 使得 $\text{tr}(A_i B_j^T) = \delta_{ij}, \forall 1 \leq i, j \leq n^2$; 并且此时还会成立 $\sum_{i=1}^{n^2} A_i B_i = \sum_{i=1}^{n^2} B_i A_i = I$

证明. 1. 如果一组矩阵 $B_1, \dots, B_{n^2}$ 满足 $\text{tr}(A_i B_j) = \delta_{ij}$, 设 $c_1 B_1 + \dots + c_{n^2} B_{n^2} = 0$, 根据条件有

$$\text{tr}(A_i (c_1 B_1 + \dots + c_{n^2} B_{n^2})) = c_i = 0, \forall 1 \leq i \leq n^2$$

由此可知 $B_1, \dots, B_{n^2}$ 一定线性无关.

设 $B_k = (b_{ij}^{(k)})_{n \times n}, k = 1, 2, \dots, n^2$, 则一共有 n^4 个未知数, 因而 $\text{tr}(A_i B_j) = \delta_{ij}, \forall 1 \leq i, j \leq n^2$ 表示一个 n^4 元的非齐次线性方程组, 方程个数也为 n^4 , 要证明该方程组存在唯一解

只需要证明相应的齐次线性方程组 $\text{tr}(A_i B_j) = 0, \forall 1 \leq i, j \leq n^2$ 只有零解, 若该方程组有一组非零解 $B_1, \dots, B_{n^2}$, 则不妨设 $B_1 \neq 0$, 因为 $A_1, \dots, A_{n^2}$ 是一组基, 所以存在 $c_1, \dots, c_{n^2}$ 使得 $c_1 A_1 + \dots + c_{n^2} A_{n^2} = B_1^T$, 进而 $\text{tr}(B_1^T B_1) = \text{tr}((c_1 A_1 + \dots + c_{n^2} A_{n^2}) B_1) = 0$, 利用迹的正定性知 $B_1 = 0$, 矛盾, 故存在唯一性得证, 并且线性无关

直接设 $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{n \times n}, k = 1, 2, \dots, n^2$ 难以刻画线性无关, 为了体现线性无关性, 我们要反着设: 令

$$E_{ij} = \sum_{k=1}^{n^2} x_k^{(ij)} A_k, B_k = (b_{ij}^{(k)})_{n \times n} = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^{(k)} E_{ij}, k = 1, 2, \dots, n^2$$

这个设法就直接保证了 $A_1, \dots, A_{n^2}$ 线性无关, 各个 $x_k^{(ij)}$ 由 $A_1, \dots, A_{n^2}$ 决定, 下面求 $b_{ij}^{(k)}$:

$$\text{tr}(B_p E_{ij}) = \text{tr}\left(B_p \sum_{k=1}^{n^2} x_k^{(ij)} A_k\right) = x_p^{(ij)}, \text{tr}(B_p E_{ij}) = \text{tr}\left(\sum_{s,t=1}^n b_{st}^{(p)} E_{st} E_{ij}\right) = \text{tr}\left(\sum_{s,t=1}^n b_{st}^{(p)} \delta_{it} E_{sj}\right) = b_{ji}^{(p)}$$

由此可知 $b_{ji}^{(k)} = x_k^{(ij)}, 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq k \leq n^2$, 一共 n^4 个 $b_{ij}^{(k)}$ 全部确定

为了计算 $\sum_{i=1}^{n^2} A_i B_i$, 设 $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{n \times n} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(k)} E_{ij}, k = 1, 2, \dots, n^2$, 对比等式 $E_{ij} = \sum_{k=1}^{n^2} x_k^{(ij)} A_k$ 两端的

(p, q) 元可知 $\delta_{ip} \delta_{jq} = \sum_{k=1}^{n^2} x_k^{(ij)} a_{pq}^{(k)}$, 进而计算有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n^2} A_k B_k &= \sum_{k=1}^{n^2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(k)} E_{ij} \sum_{s,t=1}^n b_{st}^{(k)} E_{st} = \sum_{i,j,s,t=1}^n \sum_{k=1}^{n^2} a_{ij}^{(k)} x_k^{(ts)} \delta_{js} E_{it} = \sum_{i,j,s,t=1}^n \delta_{it} \delta_{js} \delta_{js} E_{it} = \sum_{i,j=1}^n E_{ii} = nI \\ \sum_{k=1}^{n^2} B_k A_k &= \sum_{k=1}^{n^2} \sum_{s,t=1}^n b_{st}^{(k)} E_{st} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(k)} E_{ij} = \sum_{i,j,s,t=1}^n \sum_{k=1}^{n^2} a_{ij}^{(k)} x_k^{(ts)} \delta_{it} E_{sj} = \sum_{i,j,s,t=1}^n \delta_{it} \delta_{js} \delta_{it} E_{sj} = \sum_{i,j=1}^n E_{jj} = nI \end{aligned}$$

2. 前面存在唯一性和线性无关性证明是完全一样的, 唯一区别是如上假设后对应 $b_{ij}^{(k)} = x_k^{(ij)}$, i, j 交换, 故

$$\sum_{k=1}^{n^2} B_k A_k = \sum_{k=1}^{n^2} A_k B_k = \sum_{i,j,s,t=1}^n \sum_{k=1}^{n^2} a_{ij}^{(k)} x_k^{(st)} \delta_{js} E_{it} = \sum_{i,j,s,t=1}^n \delta_{is} \delta_{jt} \delta_{js} E_{it} = \sum_{i=1}^n E_{ii} = I$$

□

注释 9.2.2: 第二届 CMC 数学类决赛压轴题、2013 四川大学考研题、谢起鸿白皮书第十章习题

例题 9.2.3 设 V 是 $n(>1)$ 维实线性空间, V^* 是 V 的对偶空间, 分别取定 V 的一个基 $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n$ 和 V^* 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. 设 $\alpha_i(\mathbf{h}_j) = a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$. 对每个 $1 \leq i \leq n$, 定义 V^* 上的线性变换 r_i 为: 对任意 $\alpha \in V^*$ 有 $r_i(\alpha) = \alpha - \alpha(\mathbf{h}_i)\alpha_i$. 证明: 若 $a_{ii} = 2, a_{ij}a_{ji} = 3, i \neq j$, 则对任意 $i \neq j, (r_i r_j)^6$ 是 V^* 上的恒等变换.

证明. 方法一: 只需证明 $(r_1 r_2)^6 = I$, 一般情况可以类似完成或者转化

计算表示矩阵有

$$\begin{aligned} r_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} -1 & -a_{21} & \cdots & -a_{n1} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\ r_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} 1 & -a_{12} & \cdots & -a_{n2} \\ -a_{21} & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

转置一下, 要证明 $(r_2^T r_1^T)^6 = I$, 写成矩阵为

$$r_1^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}, r_2^T = \begin{pmatrix} 1 & -a_{12} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \beta & I_{n-2} \end{pmatrix}, \alpha = -\begin{pmatrix} a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \beta = -\begin{pmatrix} a_{32} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}$$

计算有

$$r_2^T r_1^T = \begin{pmatrix} 2 & -a_{12} & 0 \\ a_{21} & -1 & 0 \\ -a_{21}\beta & \beta & I_{n-2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -a_{12} \\ a_{21} & -1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (r_2^T r_1^T)^3 = \begin{pmatrix} -I_2 & \\ * & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

于是 $(r_2^T r_1^T)^6 = I$, 结论得证

方法二: 设 $W_1 = L(\alpha_i, \alpha_j), W_2 = \{\alpha \in V^* \mid \alpha(\mathbf{h}_i) = \alpha(\mathbf{h}_j) = 0\}$, 则 W_1, W_2 都分别是 r_i 和 r_j 的不变子空间, 且 $\dim W_1 = 2, \dim W_2 = n - 2$.

任取 $\alpha \in W_1 \cap W_2$, 则 $\alpha \in W_1$ 且 $\alpha \in W_2$. 令 $\alpha = k_1 \alpha_i + k_2 \alpha_j$, 由 $\alpha(\mathbf{h}_i) = \alpha(\mathbf{h}_j) = 0$ 解得 $k_1 = k_2 = 0$, 故 $\alpha = 0$. 因此, $V^* = W_1 \oplus W_2$.

注意到, r_i 和 r_j 都是限制在 W_2 上的恒等变换, 所以 $(r_i r_j)^6$ 限制在 W_2 上是恒等变换. 故只需证明 $(r_i r_j)^6$ 限制在 W_1 上是恒等变换.

根据定义易知, r_i 和 r_j 在 W_1 的基 α_i, α_j 下的矩阵分别为 $\begin{pmatrix} -1 & -a_{ji} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_{ij} & -1 \end{pmatrix}$. 因此, $r_i r_j$ 在 W_1 的基 α_i, α_j 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -a_{ji} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_{ij} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a_{ji} \\ -a_{ij} & -1 \end{pmatrix}.$$

直接计算得, $A^3 = -E_2$, 所以 $A^6 = E_2$. 这就表明, $(r_i r_j)^6$ 限制在 W_1 上是恒等变换. 因此, $(r_i r_j)^6$ 是 V^* 上的恒等变换. 同理可证, $(r_j r_i)^6$ 也是 V^* 上的恒等变换.

□

9.3 无限维线性空间

例 9.3.1 设 E 为 $l^2 = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) \mid x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty \right\}$ 的一个线性基, 证明: E 是不可数集.

证明. 对任意 $a \in (0, 1)$, 定义 $x_a = (1, a, a^2, \dots)$, 显然 $x_a \in l^2$, 并且根据范德蒙德行列式可知, 这些 x_a 里面, 任何有限个 (a 两两不同) 都是线性无关的 (因为截断一下, 看前面 n 个分量, 对应的是范德蒙德行列式, 非零), 因此 E 一定是无限集

反证法, 假如 E 可数, 因为可数集的全体有限子集也是可数的, 设 E 的全体有限子集为 $E_1, E_2, \dots$ 一系列集合, 每一个 E_i 张成的线性空间记为 W_i , 显然 W_i 都是有限维的

条件表明, 对任意 $a \in (0, 1)$, x_a 都可以写成 E 中某些 (有限个) 向量的线性组合, 因而向量 x_a 都在某个 W_i 之中

所以必然存在某个 W_N 含有不可数个向量 x_a , 注意 W_N 是有限维线性空间, 而各个 x_a 满足任意有限个线性无关, 所以这无限个 x_a 不可能存在于一个有限维线性空间之内, 矛盾

□

注释 9.3.1: 本题是经典且重要的结论: “ n 维空间中, 可以构造一系列向量 (范德蒙德行列式类型), 使得其中任取 n 个都是一组基” 的一个推广或者说应用, 构造很重要, 需要掌握

本题证明方法不唯一, 也可以使用 Baire 纲定理或者泛函分析的一些语言来完成证明

9.4 杂题

例题 9.4.1 设 A 是可逆矩阵, 分块设 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, 证明: $r(A_{12}) = r(B_{12})$.

证明. 假设矩阵都可逆, 分块矩阵求逆得到

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B & I \\ C & D & I \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} A & B & I \\ 0 & D - CA^{-1}B & -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 & * & -B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ 0 & D - CA^{-1}B & -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} I & 0 & * & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ 0 & I & * & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以 $B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}$, 因此秩相等

但是这样子需要假定可逆, 且无法摄动, 所以这个方法没办法完成证明, 只能揭示本题背后的原理, 不过这个形式计算可以给后面的证明提供思路

考虑线性方程组 $A_{12}x = 0, B_{12}y = 0$, 它们的解空间分别记为 V_1, V_2 , 要证明秩相等, 只需要说明 $\dim V_1 = \dim V_2$ 考虑两个线性方程组解的关系, 如果 $A_{12}x = 0$, 则

$$B_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})x = -A_{11}^{-1}A_{12}x = 0, B_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})x = B_{12}A_{22}x$$

所以对应了一个解 $y = A_{22}x$, 似乎存在对应关系

我们考虑线性映射 $\varphi: V_1 \rightarrow R^n, \varphi(x) = A_{22}x$, 证明 φ 是 $V_1 \rightarrow V_2$ 的同构映射即可

对任意 $x \in V_1$ 有 $A_{12}x = 0$, 所以

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_{22}x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ A_{22}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{12}A_{22}x \\ B_{22}A_{22}x \end{pmatrix} \Rightarrow B_{12}(A_{22}x) = 0$$

这说明 φ 是 V_1 到 V_2 的线性映射, 然后验证单射, 如果 $\varphi(x) = 0$, 则

$$A_{12}x = A_{22}x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = 0$$

于是 $x = 0$, 单射得证

最后验证满射, 对任意 $y \in V_2$ 也即 $B_{12}y = 0$, 要找一个 x 使得 $y = A_{22}x, A_{12}x = 0$, 同样的

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{22}y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ B_{22}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{12}B_{22}y \\ A_{22}B_{22}y \end{pmatrix}$$

所以 $x = B_{22}y$ 满足要求, 因此结论得证

□

例题 9.4.2 设 A, B 分别是 m, n 阶方阵, 证明: $AX - XB = C$ 有解等价于 $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 相似.
(Roth 消去定理)

证明. 如果 $AX - XB = C$ 有解, 则采用初等变换立即可知 $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 相似

反之若 $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 相似, 也即存在可逆阵 T 使得 $T^{-1} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, 两边左乘矩阵 T , 相当于一个矩阵方程有可逆阵 T 作为解, 我们来关注这个矩阵方程解长什么样子: 考虑分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} AP + CR = PA \\ AQ + CS = QB \\ BR = RA \\ BS = SB \end{cases}$$

因为 A, B 是任意的, 所以一般来说 $R = 0$ (因为很可能 A, B 无公共特征值), 看第二个方程, 取 $Q = X, S = -I$ 刚刚好就是 $AX - XB = C$, 同时 $BS = SB$ 也会自动成立, 所以我们需要寻找 $\begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ 这样的矩阵使得上述等式成立, 下面是证明 (前面是分析)

定义线性变换

$$\varphi(X) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \psi(X) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

条件的相似表明

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} (T^{-1}X) - (T^{-1}X) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = 0$$

所以 $\dim \ker \varphi = \dim \ker \psi$, 希望找 $\begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & -I \end{pmatrix} \in \dim \ker \varphi$

关注第二行, 为 $(0, -I)$, 所以我们定义一个“截取第二行”线性映射, 设 V 是矩阵空间, 令

$$\mu_1 : \ker \varphi \rightarrow V, \mu_1 \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = (R, S), \mu_2 : \ker \psi \rightarrow V, \mu_2 \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = (R, S)$$

于是目标变成证明 $(0, -I) \in \text{Im} \mu_1$, 实际上显然

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

所以 $(0, -I) \in \text{Im} \mu_2$, 下面的目标是证明 $\text{Im} \mu_1 = \text{Im} \mu_2$, 从而结论成立

因为

$$\ker \varphi : AP + CR = PA, AQ + CS = QB, BR = RA, BS = SB$$

$$\ker \psi : \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \Leftrightarrow AP = PA, AQ = QB, BR = RA, BS = SB$$

$$\ker \mu_1 : R = S = 0, \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \in \ker \varphi \Leftrightarrow AP = PA, AQ = QB, R = S = 0$$

$$\ker \mu_2 : R = S = 0, \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \in \ker \psi \Leftrightarrow AP = PA, AQ = QB, R = S = 0$$

所以 $\ker \mu_1 = \ker \mu_2$, 然后看像空间

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} \mu_1 &= \left\{ (R, S) \left| \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \in \ker \varphi \right. \right\} = \{(R, S) \mid AP + CR = PA, AQ + CS = QB, BR = RA, BS = SB\} \\ \operatorname{Im} \mu_2 &= \left\{ (R, S) \left| \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \in \ker \psi \right. \right\} = \{(R, S) \mid AP = PA, AQ = QB, BR = RA, BS = SB\} \\ &= \{(R, S) \mid BR = RA, BS = SB\}, \text{ (这是因为可以取 } P = Q = 0 \text{)}\end{aligned}$$

由此可见 $\operatorname{Im} \mu_1 \subset \operatorname{Im} \mu_2$, 再由维数公式

$$\begin{aligned}\dim \ker \mu_1 + \dim \operatorname{Im} \mu_1 &= \dim \ker \varphi, \dim \ker \mu_2 + \dim \operatorname{Im} \mu_2 = \dim \ker \psi \\ \dim \ker \varphi &= \dim \ker \psi, \dim \ker \mu_1 = \dim \ker \mu_2\end{aligned}$$

所以 $\dim \operatorname{Im} \mu_1 = \dim \operatorname{Im} \mu_2$, 这说明 $\operatorname{Im} \mu_1 = \operatorname{Im} \mu_2$, 得证

□

9.5 练习题

习题 9.5.1 1. 设 V 是由一些 n 阶幂零实方阵构成的线性空间, 求 $\dim V$ 的最大值.

2. 设 V 是由一些 n 实方阵构成的线性空间, 满足任意 $A, B \in V$ 都有 $\text{tr}(AB) = 0$, 求 $\dim V$ 的最大值.

习题 9.5.2 设 M 是 $P^{n \times n}$ 的一个非空子集, 且满足下列条件: (I) M 中至少有一个非零矩阵; (II) $\forall A, B \in M, A - B \in M$; (III) $\forall A \in M, X \in P^{n \times n}$, 有 $AX \in M, XA \in M$. 证明: $M = P^{n \times n}$.

习题 9.5.3 设 V 是数域 F 上的线性空间. 证明: 不存在 V 的五个子空间 $W_1, W_2, \dots, W_5$, 使下述四个条件均成立:

- (1) $W_1, W_2, \dots, W_5$ 两两不等;
- (2) 任意两个 W_i, W_j 之和 $W_i + W_j$ 与交 $W_i \cap W_j$ 仍属于这五个子空间;
- (3) $W_1 \subseteq W_2 \subseteq W_3 \subseteq W_5, W_1 \subseteq W_4 \subseteq W_5$;
- (4) W_2 与 W_4, W_3 与 W_4 之间都没有包含关系.

习题 9.5.4 设 V 是 n 维线性空间, f, g 是 V 上的线性函数且线性无关, 证明: 对任意 $v \in V$, 存在分解 $v = u + w$ 使得 $f(v) = f(w), g(v) = g(u)$.

习题 9.5.5 设 V 是由全体迹为零的 n 阶方阵构成的线性空间, 证明: $\dim V = n^2 - 1$, 并且 V 就是全体形如 $AB - BA$ 这样的矩阵构成的集合.

习题 9.5.6 设 $X \subset C[0, 1]$ 是有限维子空间, X 中一系列函数 $f_n(x)$ 点态收敛于 $f(x)$, 证明: 收敛是一致的.

习题 9.5.7 设 V 是 8 维线性空间, V_1, V_2, V_3, V_4 是 V 的 4 维子空间, 并且对任意 $i \neq j$ 都有 $V_i \cap V_j = \emptyset$, 证明: 存在一个 4 维子空间 W 使得 $\dim(W \cap V_i) = 2, i = 1, 2, 3, 4$.

习题 9.5.8 1. 设 V 是线性空间 (维数可以无穷), W 是 V 的子空间, 证明: 存在子空间 W_0 使得 $V = W \oplus W_0$.

2. 设 V 是线性空间 (维数可以无穷), 线性变换 A 满足对任意直和分解 $V = M \oplus N$, 都有直和分解 $V = AM \oplus AN$, 证明: A 是可逆线性变换.

第十章 空间解析几何

这部分的内容基本都能用自然的高考数学方法现推解决，少数难题或许是例外，但是当你线性代数知识到位之后，抛开解析几何这门课，你照样可以用矩阵的方法分析出需要的东西，因此高中数学的基本方法以及线性代数知识学好之后，解析几何就没有难题。

所谓稍有难度的非高考数学的空间解析几何题，都是围绕着平面截二次曲面的交线问题，或者与正交阵相关的问题展开，有且只有这两类问题可能（对初学者）有难度。

平时考的多的一般是单叶双曲面和双曲抛物面（直纹面），要不就是求轨迹方程，或者围绕上述两个难点考

命题 10.0.1: 单叶双曲面上的直母线

设单叶双曲面的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, a > 0, b > 0, c > 0$ ，则它的两族直母线为

$$(I) \begin{cases} \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) = \mu \left(1 + \frac{y}{b} \right) \\ \lambda \left(1 - \frac{y}{b} \right) = \mu \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) \end{cases}, (II) \begin{cases} \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) = \mu \left(1 - \frac{y}{b} \right) \\ \lambda \left(1 + \frac{y}{b} \right) = \mu \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) \end{cases}$$

或者写成

$$(I) : \begin{cases} x = a \cos u + av \sin u \\ y = b \sin u - bv \cos u \\ z = cv \end{cases}, (II) : \begin{cases} x = a \cos u + av \sin u \\ y = b \sin u - bv \cos u \\ z = -cv \end{cases}$$

命题 10.0.2: 双曲抛物面上的直母线

设马鞍面的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, a > 0, b > 0$ 。它的两族直母线为

$$(I) \begin{cases} x = au + av, \\ y = bu - bv, \\ z = 2uv, \end{cases} \text{ 及 } (II) \begin{cases} x = av + au, \\ y = -bv + bu, \\ z = 2vu, \end{cases}$$

或者写成

$$(I) \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + 2\lambda = 0 \\ \lambda \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) + z = 0 \end{cases}, (II) \begin{cases} \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) + z = 0 \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 2\lambda = 0 \end{cases}$$

这里列举了两个最常用且不是那么显然的公式，剩下的结论自行看书，随便一本教材都有。

关于平面截二次曲面交线的一般结果可参考[链接](#)，看最后结论就行，前面的是垃圾方法，不用看

10.1 各类例题讲解

例题 10.1.1 设双叶双曲面 $S: x^2 + y^2 - z^2 = -2$, 记以 $M_0(1, 1, -1)$ 为顶点且与 S 的上半叶相切的所有切线构成的锥面为 Σ , 求 Σ 的方程以及切点所在的平面

证明. 设直线方程为 $x = At + 1, y = Bt + 1, z = Ct - 1$. 代入到双叶双曲面的方程中有 $(At + 1)^2 + (Bt + 1)^2 - (Ct + 1)^2 = -2$, 所以 $t^2(A^2 + B^2 - C^2) + 2t(A + B + C) + 3 = 0$

因为直线和曲面相切, 所以判别式为零, 因此 $(A + B + C)^2 = 3(A^2 + B^2 - C^2)$

注意 $A = \frac{x-1}{t}, B = \frac{y-1}{t}, C = \frac{z+1}{t}$, 代入后两边乘以 t^2 则得到关于 x, y, z 的等式 $(x + y + z - 1)^2 = 3((x - 1)^2 + (y - 1)^2 - (z + 1)^2)$, 这就是锥面的方程

下面来求切平面, 设切点 (x_0, y_0, z_0) , 则切点和 M_0 的连线应与法向量垂直, 法向量为 $(x_0, y_0, -z_0)$, 所以 $(x_0 - 1, y_0 - 1, z_0 + 1) \perp (x_0, y_0, -z_0)$, 注意 $x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = -2$, 因此所求平面的方程为 $x + y + z + 2 = 0$ $\square$

注释 10.1.1: 本题实际上出的并不严谨, 因为要求了和上半平面相切, 所以严格来应该对变量的取值范围做一些要求, 但是官方答案并没有管这件事情, 同时用 geogebra 画图可以看出求出来的曲面的确不是全部与上半平面相切的。不过既然标答都不关注这个问题, 那我们也没必要纠结取值范围的问题了, 按照常规思路求出来一个范围就是了。

例题 10.1.2 已知大圆半径为 a , 小圆半径为 b , 大圆不动, 小圆在大圆内紧贴大圆做无滑动的滚动, 小圆上某一定点 P 的轨迹称为内摆线, 求其参数方程.

证明. 1. 设定坐标系与变量大圆的圆心固定在原点 $(0, 0)$. 小圆的圆心 C 在滚动时的圆心轨迹是一个半径为 $a - b$ 的圆. 设大圆与小圆的切点 T 在大圆圆心 O 处的转角为参数 θ , 则: 小圆的圆心位置为:

$$C = ((a - b) \cos \theta, (a - b) \sin \theta).$$

小圆内部的定点 P 的位置是基于小圆圆心 C 并结合小圆的转动.

2. 小圆的无滑动滚动因为无滑动滚动, 小圆的滚动角度等于大圆的弧长对应的转角. 所以小圆的转角为:

$$\phi = -\frac{a}{b}\theta.$$

这个负号是因为小圆的转动方向与大圆转动方向相反.

3. 定点 P 的位置设定点 P 在小圆的起始位置为其圆心 C 的正右侧, 即在小圆的局部坐标系中, 初始位置为 $(b, 0)$.

当小圆滚动时, 定点 P 的位置由以下两部分组成: (a). 小圆圆心 C 的位置:

$$C = ((a - b) \cos \theta, (a - b) \sin \theta).$$

(b). 定点 P 相对于小圆圆心 C 的相对位置:

$$P_{\text{rel}} = (b \cos \phi, b \sin \phi),$$

其中 $\phi = -\frac{a}{b}\theta$.

将两部分合并, 得到定点 P 的绝对位置:

$$P = C + P_{\text{rel}}.$$

4. 合并得到参数方程将 C 和 P_{rel} 代入, 得到:

$$x = (a - b) \cos \theta + b \cos \left(-\frac{a}{b}\theta\right),$$

$$y = (a - b) \sin \theta + b \sin \left(-\frac{a}{b}\theta\right).$$

因此所求的是

$$x = (a - b) \cos \theta + b \cos \left(\frac{a}{b}\theta\right),$$

$$y = (a - b) \sin \theta - b \sin \left(\frac{a}{b}\theta\right),$$

其中 θ 为参数。

□

例题 10.1.3 求与两直线 $\frac{x-6}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$ 与 $\frac{x}{3} = \frac{y-8}{2} = \frac{z+4}{-2}$ 相交, 且与平面 $2x+3y-5=0$ 平行的直线的轨迹

证明. 设两条直线上的点分别为 $A(3u+6, 2u, u+1), B(3v, 2v+8, -2v-4)$, 注意平面的法向量是 $(2, 3, 0)$, AB 两点对应的向量是 $(3u-3v+6, 2u-2v-8, u+2v+4)$, 应与法向量垂直, 代入可知 $v = u-1$, 从而 $A(3u+6, 2u, u+1), B(3u-3, 2u+6, -2u-2)$

因此, 直线的方向为 $(3, -2, u+1)$, 方程是 $\frac{x-3u-6}{3} = \frac{y-2u}{-2} = \frac{z-u-1}{u+1}$, 也即

$$\begin{cases} x = 3m + 3u + 6 \\ y = -2m + 2u \\ z = (u+1)m + u + 1 \end{cases}$$

我们的目标是消去 m, u 从而得到 x, y, z 满足的方程, 从第二个方程入手得到 $m = u - \frac{y}{2}$, 代入有 $x = 6u - \frac{3}{2}y + 6 \Rightarrow u = \frac{x}{6} + \frac{y}{4} - 1$, 进而

$$z = (u+1)(m+1) = (u+1)\left(u+1 - \frac{y}{2}\right) = \left(\frac{x}{6} + \frac{y}{4}\right)\left(\frac{x}{6} - \frac{y}{4}\right) = \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16}$$

这就是要求的曲面方程

□

例题 10.1.4 证明: 在直角坐标系 $Oxyz$ 中, 顶点在原点的二次锥面 $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz = 0$ 有三条互相垂直的直母线的充分必要条件是 $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$.

证明. 先将方程化为标准形式, 可以作正交变换 (也即重新建立坐标系) 使得方程变为 $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$ 的形式, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 都非零, 则显然变换前三条两两垂直的直母线的存在性和变换后的存在性是等价的, 并且正交变换不改变矩阵的迹, 所以不妨设锥面的方程就是 $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$, 要证明此时存在三条两两垂直的直母线当且仅当 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$

如果有三条两两垂直的直母线, 设 $x = x_0 + At, y = y_0 + Bt, z = z_0 + Ct$ 代入可知 $\lambda_1 A^2 + \lambda_2 B^2 + \lambda_3 C^2 = 0$, 也就是说这个关于 (A, B, C) 的方程有三组两两垂直的解 $(A_i, B_i, C_i), i = 1, 2, 3$, 不妨设 $A_i^2 + B_i^2 + C_i^2 = 1$, 于是

矩阵 $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$ 的每一行都是单位向量, 并且不同行之间是相互垂直的, 所以 A 是正交阵, 进而每一列也都是单位向量且两两垂直

将

$$\lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 B_1^2 + \lambda_3 C_1^2 = 0$$

$$\lambda_1 A_2^2 + \lambda_2 B_2^2 + \lambda_3 C_2^2 = 0$$

$$\lambda_1 A_3^2 + \lambda_2 B_3^2 + \lambda_3 C_3^2 = 0$$

三个式子相加, 结合上述结果可知当 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, 结论成立

如果 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, 我们证明方程 $\lambda_1 A^2 + \lambda_2 B^2 = (\lambda_1 + \lambda_2) C^2$ 有三组两两垂直的解 $(A_i, B_i, C_i), i = 1, 2, 3$ 显然 $(1, 1, 1)$ 是一组解, 我们设剩下的解是 (x, y, z) , 则垂直告诉我们满足 $x + y + z = 0$, 于是

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = (\lambda_1 + \lambda_2) z^2 = (\lambda_1 + \lambda_2) (x + y)^2$$

化简, 解一元二次方程得到

$$\lambda_2 x^2 + \lambda_1 y^2 + 2xy(\lambda_1 + \lambda_2) = 0, y = \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2) \pm \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_1} x$$

考虑到分母可能是零, 所以我们去分母, 再代入 $z = -x - y$, 因此去看这三个向量

$$\begin{pmatrix} 1, 1, 1 \\ \lambda_1, -(\lambda_1 + \lambda_2) + \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2}, \lambda_2 - \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2} \\ \lambda_1, -(\lambda_1 + \lambda_2) - \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2}, \lambda_2 + \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2} \end{pmatrix}$$

显然第一个向量与第二个垂直, 也与第三个垂直, 我们只需要验证后面两个向量垂直即可: 它们的数量积

$$\lambda_1^2 + ((\lambda_1 + \lambda_2)^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2)) + \lambda_2^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2) = 0$$

这样就构造出来了三个两两垂直的方向向量, 结论得证

□

命题 10.1.1: 单叶双曲面性质汇总

证明: 单叶双曲面具备性质

1. 同族的两条直母线异面
2. 异族的两条直母线共面
3. 对于单叶双曲面上任意一点, 两族直母线中各有一条直母线通过该点

证明. 设单叶双曲面的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

1. 两族直母线的方程为

$$(I) : \begin{cases} x = a \cos u + av \sin u \\ y = b \sin u - bv \cos u \\ z = cv \end{cases}, (II) : \begin{cases} x = a \cos u + av \sin u \\ y = b \sin u - bv \cos u \\ z = -cv \end{cases}$$

我们证明其中一族直母线具备“同族异面”的性质即可, 另外一族便同理可知成立

以第一族为例, 设两条直线的方程为

$$l_1 : \frac{x - a \cos u}{a \sin u} = \frac{y - b \sin u}{-b \cos u} = \frac{z}{c}, l_2 : \frac{x - a \cos v}{a \sin v} = \frac{y - b \sin v}{-b \cos v} = \frac{z}{c}, u, v \in [0, 2\pi), u \neq v$$

其中 l_1 过点 $M_1(a \cos u, b \sin u, 0)$, 方向向量 $v_1 = (a \sin u, -b \cos u, c)$, l_2 过点 $M_2(a \cos v, b \sin v, 0)$, 方向向量 $v_2 = (a \sin v, -b \cos v, c)$

要证明 l_1, l_2 异面, 等价于说明 $M_1 M_2, v_1, v_2$ 三个向量不共面, 也就是混合积 (行列式) 非零, 由于

$$(M_1 M_2, v_1, v_2) = \begin{vmatrix} a \sin u & -b \cos u & c \\ a \sin v & -b \cos v & c \\ a(\cos u - \cos v) & b(\sin u - \sin v) & 0 \end{vmatrix} = 2abc(\cos(u-v) - 1) \neq 0$$

结论得证

2. 设不同族的两条直母线方程为

$$l_1 : \frac{x - a \cos u}{a \sin u} = \frac{y - b \sin u}{-b \cos u} = \frac{z}{c}, l_2 : \frac{x - a \cos v}{a \sin v} = \frac{y - b \sin v}{-b \cos v} = \frac{z}{-c}, u, v \in [0, 2\pi)$$

相应的

$$M_1(a \cos u, b \sin u, 0), M_2(a \cos v, b \sin v, 0), v_1 = (a \sin u, -b \cos u, c), v_2 = (a \sin v, -b \cos v, -c)$$

$$(M_1 M_2, v_1, v_2) = \begin{vmatrix} a \sin u & -b \cos u & c \\ a \sin v & -b \cos v & -c \\ a(\cos u - \cos v) & b(\sin u - \sin v) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

由此可知共面

3. 对于单叶双曲面上任意一点 (x_0, y_0, z_0) , 显然满足方程 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1$, 要证明两族直母线中各自有一条通过该点, 也就等价于说明以下两个线性方程组的解空间维数都是 1

$$(I) \begin{cases} \lambda \left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} \right) = \mu \left(1 + \frac{y_0}{b} \right) \\ \lambda \left(1 - \frac{y_0}{b} \right) = \mu \left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} \right) \end{cases}, (II) \begin{cases} \lambda \left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} \right) = \mu \left(1 - \frac{y_0}{b} \right) \\ \lambda \left(1 + \frac{y_0}{b} \right) = \mu \left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} \right) \end{cases}$$

注意它们系数矩阵对应的行列式是零, 并且系数不全为零, 所以结论得证

□

命题 10.1.2: 平面截单叶双曲面

设单叶双曲面的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, 平面的方程是 $Ax + By + Cz + D = 0$, 这里 $a, b, c > 0, a > b$ 且 A, B, C 不全为零, 研究并分类平面和单叶双曲面的交线.

1. 粗略分类: 判断何时交线为椭圆型 (圆和椭圆)、双曲型 (双曲线或两条直线)、抛物型 (抛物线);
2. 细致分类: 找出交线为圆、椭圆 (非圆)、双曲线、两条直线、抛物线的充要条件.

证明. 1. 先做粗略的分类, 我们不区分圆和椭圆, 也不区分退化的圆锥曲线, 只看椭圆, 双曲, 抛物三种

如果 $C = 0$, 则平面是竖着的, 形如 $Ax + By + D = 0$, 看图可知交线为双曲型

如果 $C \neq 0$, 则不妨设平面为 $z = Ax + By + D$, 与曲面联立有 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(Ax + By + D)^2}{c^2} = 1$ 也即

$$x^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{A^2}{c^2} \right) + y^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{B^2}{c^2} \right) - \frac{2AB}{c^2} xy - \frac{2AD}{c^2} x - \frac{2BD}{c^2} y - \frac{D^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (*)$$

这表示的是交线在 xoy 平面上的投影, 它也是二次曲线并且和空间中原来的曲线一定是同一类型的 (指如果空间中是椭圆, 双曲线, 抛物线, 两条直线, 那么投影下来之后这条曲线还是那样子, 但是注意: 空间中是圆和投影是圆, 二者没有任何关系!), 因此只需讨论上述方程何时对应椭圆, 抛物线, 双曲线

三类圆锥曲线核心的分类标准是二次项部分, 判别式的正负完全决定了曲线的种类, 因为

$$\Delta = 4 \left(\frac{A^2 B^2}{c^4} - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{A^2}{c^2} \right) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{B^2}{c^2} \right) \right) = \frac{4A^2 B^2}{a^2 b^2 c^2} (a^2 A^2 + b^2 B^2 - c^2)$$

所以对应到原题中为

$$A^2 a^2 + b^2 B^2 < C^2 c^2 \Leftrightarrow \text{椭圆型}, A^2 a^2 + b^2 B^2 = C^2 c^2 \Leftrightarrow \text{抛物型}, A^2 a^2 + b^2 B^2 > C^2 c^2 \Leftrightarrow \text{双曲型}$$

2. 先来区分圆和椭圆:

对于圆的情况, 显然 $C \neq 0$, 因此设 $z = Ax + By + D$ 代入联立得到 (*) 式, 交线圆可以视为球和平面的交线, 设相应的球面为 $(x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2 = R^2$, 将平面和球面联立有

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 + (Ax + By + D - w)^2 - R^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 (A^2 + 1) + y^2 (B^2 + 1) + 2ABxy + \dots = 0$$

它和 (*) 式应表示同一曲线, 所以系数成比例, 假设 $AB \neq 0$, 则

$$-c^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{A^2}{c^2} \right) = A^2 + 1, -c^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{B^2}{c^2} \right) = B^2 + 1$$

显然矛盾, 因此 $AB = 0$

如果 $A = 0$, 则两个曲线的二次项部分分别为 $[x^2 + y^2 (B^2 + 1), \frac{x^2}{a^2} + y^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{B^2}{c^2} \right)]$, 因为系数成比例, 所以

$$a^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{B^2}{c^2} \right) = B^2 + 1 \Rightarrow B^2 = \frac{\frac{a^2}{b^2} - 1}{1 + \frac{a^2}{c^2}}, B = \pm \frac{c}{b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}}, z = \pm \frac{c}{b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}} y + D$$

如果 $B = 0$, 则类似的可知 $A = \pm \frac{c}{a} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2 + c^2}}$, 但是 $a > b$ 所以根号里面是负的, 无解

这就证明了, 交线为圆的全体平面是 $z = \pm \frac{c}{b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}} y + D$

再来区分圆锥曲线和两条直线，两条直线具备结构 $(ax + by + c)(mx + ny + p) = 0$ ，写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \frac{\alpha\beta^T + \beta\alpha^T}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \alpha = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$$

最后中间那个矩阵是实对称的，并且为两个秩 1 矩阵相加形式，所以秩不超过 2，因此其根本特性是行列式为零，所以我们可以用行列式是否为零这一性质来区分两条直线

将前面 (*) 式写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} - \frac{A^2}{c^2} & -\frac{AB}{c^2} & -\frac{AD}{c^2} \\ -\frac{AB}{c^2} & \frac{1}{b^2} - \frac{B^2}{c^2} & -\frac{BD}{c^2} \\ -\frac{AD}{c^2} & -\frac{BD}{c^2} & \frac{D^2}{c^2} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

记中间的矩阵为 M ，计算出其行列式是 $|M| = \frac{a^2A^2 + b^2B^2 - c^2 - D^2}{c^2b^2c^2}$

而恰好判别椭圆，抛物和双曲的式子是 $a^2A^2 + b^2B^2 - c^2$ ，这个在第一问中已经算出来了，所以最终结论为

- (a) 椭圆当且仅当 $C^2c^2 > A^2a^2 + B^2b^2$
- (b) 双曲线当且仅当 $C^2c^2 < A^2a^2 + B^2b^2$ 同时 $a^2A^2 + b^2B^2 - C^2c^2 - D^2 \neq 0$
- (c) 抛物线当且仅当 $C^2c^2 = A^2a^2 + B^2b^2$ 同时 $D \neq 0$
- (d) 两条直线当且仅当 $a^2A^2 + b^2B^2 - C^2c^2 - D^2 = 0$

对于 (d)，可以进一步区分出：两条相交直线当且仅当 $a^2A^2 + b^2B^2 - C^2c^2 - D^2 = 0$ 且 $D \neq 0$ ，两条平行直线当且仅当 $C^2c^2 = A^2a^2 + B^2b^2$ 同时 $D = 0$

很明显不存在异面直线，单点集，两条重合直线等等特殊情况，至此就完成了全部分类

□

注释 10.1.2: 上课我们用 geogebra 的 3D 画图功能展示了所有可能的交线情况，也包括竖着的平面（交线可能是双曲线也可能是两条相交直线），你可以自行画图感受，也可以去看上课视频

我这个方法不需要你记忆任何不变量的结论，也不需要做复杂的正交变换，你只需要抓住各种各样的二次曲线的根本特性（可以举例分析，观察，很容易看出来，细节见上课视频），是最简单和直观的方法了

在开头基础知识部分给的链接当中，作者采用的方法是正交变换，你只需要关注最后结论，前半部分的证明忽略即可，因为繁杂，要记的结论很多，且没必要

10.2 练习题

习题 10.2.1 求与 $l_1: \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}, l_2: \begin{cases} x=-1 \\ y=-z \end{cases}, l_3: \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+2}{5}$ 同时共面的直线所产生的曲面的方程.

习题 10.2.2 求实数 m 的取值范围, 使得平面 $x+y-mz=0$ 与单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 的交线分别为椭圆、双曲线.

注: 建议用最自然和简单的方法处理以上问题, 而不是套用前面的定理.

习题 10.2.3 求双曲抛物面上两条正交直母线的交点的轨迹方程.

习题 10.2.4 设单叶双曲面 S 的方程为 $x^2+y^2-z^2=1$, 求 S 上所有点 $P(a,b,c)$, 使得经过点 P 且落在 S 上的两条直线均平行于平面 $x+y-z=0$.

命题 10.2.1: 双曲抛物面性质汇总

证明: 双曲抛物面具备性质

1. 同族的两条直母线异面
2. 异族的两条直母线相交
3. 所有同族的直母线平行于同一平面
4. 对于双曲抛物面上任意一点, 两族直母线中各有一条直母线通过该点

命题 10.2.2: 平面截双叶双曲面

设双叶双曲面的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, 平面的方程是 $Ax + By + Cz + D = 0$, 这里 $a, b, c > 0$ 且 A, B, C 不全为零, 研究并分类平面和双叶双曲面的交线.

1. 粗略分类: 判断何时交线为椭圆型 (圆和椭圆)、双曲型 (双曲线或两条直线)、抛物型 (抛物线);
2. 细致分类: 找出交线为圆、椭圆 (非圆)、双曲线、两条直线、抛物线的充要条件.

注: 类似的可以讨论平面截双曲抛物面的情况, 不过很容易, 因为只有双曲线, 抛物线和两条直线三种情况

第十一章 16 届决赛数学类

例题 11.0.1 1. 设一个半径为 r , 球心为 $(0, 0, h)$, $h > r > 0$ 的球相切于一个以原点为顶点, 以 z 轴为轴的圆锥形漏斗, 求圆锥形漏斗的方程.

2. 求以原点为顶点, 包含三条坐标轴的圆锥面方程.

证明. 1. 设圆锥面上一点 $P(x_0, y_0, z_0)$, 则直线 OP 的方程是 $x = x_0 t, y = y_0 t, z = z_0 t$, 球的方程是 $x^2 + y^2 + (z - h)^2 = r^2$, 二者相切, 联立并计算判别式得到

$$\begin{aligned} t^2 (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) - 2hz_0 t + h^2 - r^2 &= 0 \\ \Delta = 4(h^2 z_0^2 - (h^2 - r^2)(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)) &= 0 \end{aligned}$$

因此所求方程是 $(x^2 + y^2 + z^2)(h^2 - r^2) = h^2 z^2$

2. 根据条件, 该圆锥面方程是二次齐次方程, 可以设为

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz = 0$$

因为包含三条坐标轴, 所以经过点 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$, 代入即可得到 $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, 于是圆锥面方程可以设为 $2axy + 2byz + 2czz = 0$, 下面寻找 a, b, c 之间的约束条件

设相应的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ a & 0 & b \\ c & b & 0 \end{pmatrix}$, 圆锥的条件表明 A 有两个相同的特征值, 所以特征多项式

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^3 - \lambda(a^2 + b^2 + c^2) - 2abc$$

有重根, 因为

$$f'(\lambda) = 3\lambda^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

不论哪种情况, 代入均可得到 $3\sqrt{3}|abc| = (a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}$, 根据均值不等式有

$$3\sqrt{3}|abc| = (a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{3}{2}} \geq \left(3\sqrt{a^2 b^2 c^2}\right)^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3}|abc|$$

所以 $|a| = |b| = |c|$, 不妨设 $a = 1$, 于是 $b, c = \pm 1$, 最终共有四个曲面 $xy \pm yz \pm zx = 0$, 均满足要求

□

注释 11.0.1: 可以自己举个例子看看圆锥面有什么特点: 比如轴为 z 轴的圆锥面, 其方程是 $x^2 + y^2 = kz^2$ 的形式, 系数有两个相同的, 所以圆锥面相比一般的锥面要多具备一个条件: 特征多项式有重根, 由此即可锁定 a, b, c 的关系

例题 11.0.2 设矩阵 M 及其子矩阵 N, P, Q 为

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

若 $|M| = 12, |N| = 1, |P| = 2, |Q| = 3$, 求三条直线

$$L_1 : a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, L_2 : a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0, L_3 : a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0$$

围成的三角形面积

证明. 首先计算交点, 解方程有

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_3 = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} A_{31}, y_3 = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} A_{32}$$

这里各个 A_{ij} 表示矩阵 M 相应的代数余子式, 同理可知 $x_2 = \frac{1}{2} A_{21}, y_2 = \frac{1}{2} A_{22}, x_1 = A_{11}, y_1 = A_{12}$
所以面积是

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & 1 \\ \frac{1}{2} A_{21} & \frac{1}{2} A_{22} & 1 \\ \frac{1}{3} A_{31} & \frac{1}{3} A_{32} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & 1 \\ A_{21} & A_{22} & 2 \\ A_{31} & A_{32} & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{31} \\ A_{21} & A_{22} & A_{31} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \frac{|M^*|}{12} = 12$$

□

注释 11.0.2: 三维也有类似结果: 设 $\mathbb{R}^3$ 中 4 个平面的方程为 $\Pi_i : a_i x + b_i y + c_i z = 1 (i = 1, 2, 3, 4)$. 令

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{pmatrix}.$$

令 $\Delta_i = M_{i4}$ 即 A 删掉第 i 行第 4 列得到的行列式. 证明: Π_i 围成的四面体的体积 $V = \left| \frac{|A|^3}{6\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4} \right|$

例题 11.0.3 设 $f(x): [a, b] \rightarrow [a, b]$ 连续, $x_0 \in [a, b], x_{n+1} = f(x_n)$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+2025} - x_n) = 0$, 证明: 数列 $\{x_n\}$ 的聚点至多 2025 个.

证明. 定义 2025 个子列 $y_n^{(k)} = x_{2025n+k}, k = 0, 1, \dots, 2024$, 记 $g(x) = f(\dots f(x) \dots)$ 是 $f(x)$ 是 2025 次复合, 显然也是连续函数, 并且满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_{n+1}^{(k)} - y_n^{(k)}) = 0, y_{n+1}^{(k)} = g(y_n^{(k)}), k = 0, 1, \dots, 2024$$

我们直接证明每一个 $y_n^{(k)}$ 都是收敛的, 这样就可以说明 x_n 的聚点不超过 2025 个 (因为一共划分为了 2025 个子列, 所以 x_n 的任何一个收敛子列, 其中必定有无穷多项落入这 2025 个子列中的某一个确定的子列, 所以 x_n 的这个收敛子列, 其极限就是那 2025 个极限点之一)

这是一个经典的结论, 以前上课讲过:

命题 11.0.1

设连续函数 $f(x): [0, 1] \rightarrow [0, 1], x_1 \in [0, 1], x_{n+1} = f(x_n)$, 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$.

如果 x_n 收敛, 则显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$, 要证明收敛, 反证法, 则记

$$L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, l = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, 0 \leq l < L \leq 1$$

引理 11.0.1: 有界数列 x_n 如果满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$, 则 x_n 的全体聚点构成一个闭区间.

这个引理很直观也很重要, 我们就在本题过程中顺带证明此结果

反证法, 则存在 $A \in (l, L)$ 使得 A 不是聚点, 故存在 $\delta > 0$ 使得区间 $(A - \delta, A + \delta)$ 中只包含了有限个 x_n , 因此存在正整数 N_1 使得 $n > N_1$ 时恒有 $|x_n - A| \geq \delta$, 并且可以要求 $A + \delta < L, A - \delta > l$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$, 所以存在 N_2 使得 $n > N_2$ 时恒有 $|x_{n+1} - x_n| < \delta$, 记 $N = \max(N_1, N_2)$

根据上下极限的定义, 存在 $j > i > N$ 使得 $x_i > A + \delta, x_j < A - \delta$, 现在看 $x_i, x_{i+1}, \dots, x_j$ 这些项, 考虑其中最后一个大于等于 $A + \delta$ 的项, 记为 x_k , 显然 $k \leq j - 1$, 那么 $x_{k+1} < A + \delta$, 根据反证法的假设知 $x_{k+1} \leq A - \delta$, 则 $|x_{k+1} - x_k| \geq 2\delta$, 矛盾, 因此引理得证

现在来证明 $f(x) = x$ 对任意 $x \in [l, L]$ 恒成立, 任取 $A \in [l, L]$ 则存在一个子列 $x_{n_k} \rightarrow A$, 根据条件可知 $x_{n_k+1} \rightarrow A$, 在递推式 $x_{n_k+1} = f(x_{n_k})$ 中令 $k \rightarrow \infty$ 可知 $A = f(A)$

对于 $A = \frac{l+L}{2}$, 这也是一个极限点, 所以存在 $x_N \in [l, L]$, 因此 $x_n = x_N, \forall n \geq N$, 这与数列不收敛矛盾

□

例 11.0.4 设 $x_0 > y_0 > 0$, 定义数列

$$x_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^n (x_k + y_k), y_{n+1} = \left(\prod_{k=0}^n x_k y_k \right)^{\frac{1}{2n+2}}$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$, 并且数列 $n(x_n - y_n)$ 收敛到一个正数.

证明. 根据条件有

$$\begin{aligned} 2(n+1)x_{n+1} - 2nx_n &= x_n + y_n \Rightarrow x_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}x_n + \frac{1}{2n+1}y_n \\ \frac{y_{n+1}^{2n+2}}{y_n^{2n}} &= x_n y_n \Rightarrow y_{n+1} = y_n^{\frac{2n+1}{2n+2}} x_n^{\frac{1}{2n+1}} \end{aligned}$$

由均值不等式, 显然 $x_n \geq y_n$, 因为 $x_0 > y_0 > 0$, 所以 $x_n > y_n$ 恒成立, 再看递推式可知 x_n 单调递减, y_n 单调递增, 从而数列 x_n, y_n 极限都存在, 设为 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a > 0$

这种形如 $x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$ 的数列都可以求通项公式, 求通项得到

$$\frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!}x_{n+1} - \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}x_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}y_n \Rightarrow \frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!}x_{n+1} = 2x_1 + \sum_{k=1}^n \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}y_k$$

用 stolz 公式求极限有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \left(2x_1 + \sum_{k=1}^n \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}y_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}y_k}{\frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}y_n}{\frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!} - \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{(2n+2) - (2n+1)} = a = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \end{aligned}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$

对于第二问, 令 $u_n = nx_n, v_n = ny_n, n \geq 1$, 则有 $u_n > v_n > 0$, 递推式为

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}x_n + \frac{1}{2n+1}y_n \\ y_{n+1} = y_n^{\frac{2n+1}{2n+2}} x_n^{\frac{1}{2n+1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)u_n + \frac{1}{2n}v_n \\ v_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)v_n^{\frac{2n+1}{2n+2}} u_n^{\frac{1}{2n+1}} \end{cases}$$

希望证明 $u_n - v_n$ 是单调有界的, 以此说明收敛, 因为

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)u_n + \frac{1}{2n}v_n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)v_n^{\frac{2n+1}{2n+2}} u_n^{\frac{1}{2n+1}} = v_n \left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \frac{u_n}{v_n} + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^{\frac{1}{2n+2}} \right)$$

显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1, \frac{u_n}{v_n} > 1$, 并且里面是齐次的, 所以考虑泰勒展开, 令

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)x + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)x^{\frac{1}{2n+2}}, x \geq 1$$

根据二项式定理 (泰勒展开) 易知

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{2n+2}} &= (1 + x - 1)^{\frac{1}{2n+2}} = 1 + \frac{1}{2n+2}(x-1) - \frac{2n+1}{8(n+1)^2}(x-1)^2 + \dots \\ &\in \left[1 + \frac{1}{2n+2}(x-1) - \frac{2n+1}{8(n+1)^2}(x-1)^2, 1 + \frac{1}{2n+2}(x-1) \right], \forall x \geq 1 \\ &\Rightarrow x-1 \leq f_n(x) \leq x-1 + \frac{2n+1}{8n(n+1)}(x-1)^2 \leq x-1 + \frac{1}{4n}(x-1)^2 \end{aligned}$$

所以

$$u_{n+1} - v_{n+1} = v_n f_n \left(\frac{u_n}{v_n} \right) \geq v_n \left(\frac{u_n}{v_n} - 1 \right) = u_n - v_n$$

也即数列 $u_n - v_n$ 单调递增, 从而只需要证明其有上界

因为

$$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} &= v_n f_n \left(\frac{u_n}{v_n} \right) \leq v_n \left(\frac{u_n}{v_n} - 1 + \frac{1}{4n} \left(\frac{u_n}{v_n} - 1 \right)^2 \right) = u_n - v_n + \frac{(u_n - v_n)^2}{4nv_n} \\ &= u_n - v_n + \frac{1}{4y_n} (x_n - y_n)^2 \leq u_n - v_n + \frac{1}{4y_0} (x_n - y_n)^2 \end{aligned}$$

所以只需要证明 $x_n - y_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\right)$, 这里 ε 是某个正数 (一旦成立, 则两边求和即可得到有界性, 注意这个比原题需求要弱的, $n(x_n - y_n)$ 有界实际上是要证 $x_n - y_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, 已知的是 $x_n - y_n = o(1)$, 仔细体会区别)

根据前面不等式有 $\frac{u_{n+1} - v_{n+1}}{u_n - v_n} \leq 1 + \frac{x_n - y_n}{4y_0} \frac{1}{n}$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$, 所以对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N 使得对任意 $n \geq N$ 都有 $\frac{x_n - y_n}{4y_0} < \varepsilon$, 所以

$$\begin{aligned} \ln(u_{n+1} - v_{n+1}) - \ln(u_n - v_n) &\leq \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{n}\right) < \frac{\varepsilon}{n}, \forall n \geq N \\ \Rightarrow \ln(u_{n+1} - v_{n+1}) &\leq \ln(u_N - v_N) + \varepsilon \sum_{k=N}^n \frac{1}{k} \leq \ln(u_N - v_N) + \varepsilon(\ln n + 1) \\ n(x_n - y_n) = u_n - v_n &\leq (u_N - v_N) e^{\varepsilon} n^{\varepsilon} \Rightarrow x_n - y_n = O\left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right) \end{aligned}$$

这比我们期望的结果 $x_n - y_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\right)$ 还要好, 结论得证

□

注释 11.0.3: 递推数列很多时候反复迭代可以提升阶, 过程就像上面这样子, 从一无所知, 到第一问的 $o(1)$ 估计, 再到 $o\left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)$ 估计, 最后利用泰勒展开提升到 $O\left(\frac{1}{n}\right)$ 估计
实际上最后的过程是证明了: 对任意 $\varepsilon > 0$ 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-\varepsilon} (x_n - y_n) = 0$

例题 11.0.5 设实系数多项式

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, q(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$$

已知 $q(x)|p(x)$, 并且存在 k 使得 $|b_k| > 2025^k C_m^k$, 证明: 存在 j 使得 $|a_j| > 2024$.

证明. 反证法, 希望从所有 $|a_k| \leq 2024$ 出发去证明所有 $|b_k| \leq 2025^k C_m^k$

条件是系数的限制, 希望得到根的约束, 所以考虑 $p(x)$ 的根

$$p(x) = 0, |x|^n = |a_1 x^{n-1} + \dots + a_n| \leq |a_1| |x|^{n-1} + \dots + |a_n| \leq 2024 (|x|^{n-1} + \dots + 1) = 2024 \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1}$$

由此看出 $|x| < 2025$, 也就是说 $p(x)$ 的根都在 $|z| < 2025$ 这个圆内, 注意 $q(x)|p(x)$, 所以 $q(x)$ 的也根都在 $|z| < 2025$ 这个圆内

下面我们要从根的信息去找系数满足的条件, 运用韦达定理, 则有

$$|b_k| = \left| \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \right| \leq \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} |x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}| \leq 2025^k C_m^k$$

结论得证

□

例题 11.0.6 验证方程 $y' = \pm \sqrt{\frac{1-y^4}{1-x^4}}$ 有形如 $x^2 + y^2 + c^2 x^2 y^2 = c^2 + 2xy\sqrt{1-c^4}$ 的通解, 并求方程 $y' = \pm \sqrt{\frac{1+y^4}{1+x^4}}$ 的通解.

证明. 直接对着题中的等式解方程, 把 C 求出来, 解一元二次方程有

$$\begin{aligned} c^2(x^2 y^2 - 1) + (x^2 + y^2) &= 2xy\sqrt{1-c^4} \\ c^4(x^2 y^2 - 1)^2 + (x^2 + y^2)^2 &= 4x^2 y^2(1-c^4) \\ c^4(x^2 y^2 + 1)^2 + 2c^2(x^2 y^2 - 1)(x^2 + y^2) + (x^2 - y^2)^2 &= 0 \\ c^2 &= \frac{-(x^2 y^2 - 1)(x^2 + y^2) \pm \sqrt{(x^2 y^2 - 1)^2(x^2 + y^2)^2 - (x^2 y^2 + 1)^2(x^2 - y^2)^2}}{(x^2 y^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-(x^2 y^2 - 1)(x^2 + y^2) \pm 2xy\sqrt{(1-x^4)(1-y^4)}}{(x^2 y^2 + 1)^2} = \left(\frac{x\sqrt{1-y^4} \pm y\sqrt{1-x^4}}{x^2 y^2 + 1} \right)^2 \\ \Rightarrow c &= \frac{x\sqrt{1-y^4} \pm y\sqrt{1-x^4}}{x^2 y^2 + 1} \end{aligned}$$

所以直接对最后的式子求导即可解决问题, 以下是证明 (前面是分析)

如果 $y' = \sqrt{\frac{1-y^4}{1-x^4}}$, 则

$$\begin{aligned} (x\sqrt{1-y^4} - y\sqrt{1-x^4})' &= \sqrt{1-y^4} - \frac{2xy^3 y'}{\sqrt{1-y^4}} - y'\sqrt{1-x^4} + \frac{2x^3 y}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{2xy}{\sqrt{1-x^4}}(x^2 - y^2) \\ \left(\frac{x\sqrt{1-y^4} - y\sqrt{1-x^4}}{x^2 y^2 + 1} \right)' &= \frac{\frac{2xy}{\sqrt{1-x^4}}(x^2 - y^2)(x^2 y^2 + 1) - 2xy(y + xy')(x\sqrt{1-y^4} - y\sqrt{1-x^4})}{(x^2 y^2 + 1)^2} \\ &= \frac{\frac{2xy}{\sqrt{1-x^4}}(x^2 - y^2)(x^2 y^2 + 1) - 2xy(y + xy')(x\sqrt{1-y^4} - y\sqrt{1-x^4})}{(x^2 y^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2xy((x^2 - y^2)(x^2 y^2 + 1) - (y\sqrt{1-x^4} + xy'\sqrt{1-x^4})(x\sqrt{1-y^4} - y\sqrt{1-x^4}))}{(x^2 y^2 + 1)^2 \sqrt{1-x^4}} \\ &= \frac{2xy((x^2 - y^2)(x^2 y^2 + 1) + y^2(1-x^4) - x^2(1-y^4))}{(x^2 y^2 + 1)^2 \sqrt{1-x^4}} = 0 \end{aligned}$$

所以 $\frac{x\sqrt{1-y^4} - y\sqrt{1-x^4}}{x^2 y^2 + 1} = C$, 平方两次化简可得 (如前面推导那样, 无非是反过来写)

$$x^2 + y^2 + c^2 x^2 y^2 = c^2 + 2xy\sqrt{1-c^4}$$

同理若 $y' = -\sqrt{\frac{1-y^4}{1-x^4}}$, 可得 $\frac{x\sqrt{1-y^4} + y\sqrt{1-x^4}}{x^2 y^2 + 1} = C$, 平方化简可知

$$x^2 + y^2 + c^2 x^2 y^2 = c^2 + 2xy\sqrt{1-c^4}$$

综上, $y' = \pm \sqrt{\frac{1-y^4}{1-x^4}}$ 有形如 $x^2 + y^2 + c^2 x^2 y^2 = c^2 + 2xy\sqrt{1-c^4}$ 的通解
第二问同理, 求导验证有

$$c = \frac{x\sqrt{1+y^4} \pm y\sqrt{1+x^4}}{1-x^2 y^2}$$

所以通解是

$$x^2 + y^2 - c^2 x^2 y^2 = c^2 + 2xy\sqrt{1+c^4}$$

□

第十二章 习题答案

12.1 第二章习题答案

1. 本题做法很多, 展示两种思路, 都是采用反证法也即设集合 A 非空并且不是 $\mathbb{R}^n$, 而且是开集也是闭集

方法一: 可以取一个点 $x \notin A$, 单点集 $\{x\}$ 是紧集, A 是闭集, 所以存在 $y \in A$ 使得 $|x - y| = d(x, A) > 0$, 也就是说集合 A 中存在一个与 x 距离最近的点, 既然 A 是开集, 那么 y 是内点, 很明显这样会导致 y 不是与 A 距离最近的点, 矛盾

注: 这个方法运用了性质“ A 是紧集, B 是闭集且不相交, 则存在 $x \in A, y \in B$ 使得 $|x - y| = d(A, B) > 0$, 也就是距离最近的两个点存在”, 但是把紧集改成闭集就不对了!

方法二: 采用二分法, 取 $x \notin A, y \in A$, 考虑线段 xy 的中点 P , 如果 $P \in A$ 就考虑线段 xP , 如果 $P \notin A$ 就考虑线段 Py , 这样区间就缩小一半了, 一直操作下去, 每次取中点, 然后考虑“发生变化”的那一段, 也就是说要求线段两端一个在 A 中一个不在 A 中, 这样根据闭集套定理, 最后会存在唯一 ξ 属于所有的线段

现在来看 ξ 点, 如果 $\xi \in A$, 则利用 A 是开集可知 ξ 附近一个区域都在 A 中, 但是线段的长度是趋于零的, 于是后面的线段两个端点就都在 A 中了, 矛盾; 如果 $\xi \notin A$, 则利用 A 是闭集可知补集为开集, 于是 ξ 附近一个区域都与 A 无交集, 但是线段的长度是趋于零的, 所以后面的线段两个端点就都不在 A 中了, 矛盾

2. 根据条件, 设 $f(x)$ 在 $(-r, r)$ 内恒等于某个多项式 $p(x)$, 我们考虑最大的区间, 也即令

$$u = \inf \{x < 0 \mid f(t) \equiv p(t), \forall t \in [x, 0]\} \leq -r, v = \sup \{x > 0 \mid f(t) \equiv p(t), \forall t \in [0, x]\} \geq r$$

我们说明 $u = -\infty, v = \infty$ 即可, 反证法, 不妨 v 是有限数, 则存在 $a \in (0, r)$ 使得 $f(x)$ 在区间 $(v - a, v + a)$ 内恒等于某个多项式 $q(x)$, 所以在区间 $(v - a, v)$ 中 $f(x), p(x), q(x)$ 三者恒等, 故两个多项式 $p(x), q(x)$ 是恒相等的 (在 $\mathbb{R}$ 上), 因此 $f(x)$ 在区间 $(0, v + a)$ 中都恒等于 $p(x)$, 这与 v 是上确界矛盾, 结论得证

3. 证明方法不唯一, 若用 baire 纲定理则是显然的, 因为若 $[0, 1]$ 可数, 则可以写成可数个单点集 (没有内点的闭集) 的并, 于是 $[0, 1]$ (根据 baire 纲定理) 也没有内点, 显然矛盾

若不用 baire 纲定理, 则可以利用区间套完成证明: 反证法, 若 $[0, 1] = \{x_1, x_2, \dots\}$ 是可数集, 记 $[a_1, b_1] = [0, 1]$, 则将 $[0, 1]$ 等分三份, 必有一个闭区间不包含点 x_1 , 我们把这个区间记为 $[a_2, b_2]$, 然后对 $[a_2, b_2]$ 三等分, 选取一个区间使得其不包括点 x_2 , 如此进行下去得到一个区间套 $[a_n, b_n]$, 故存在唯一点 ξ 属于每一个 $[a_n, b_n]$, 则这个 ξ 不能是任何一个 x_k , 因为每一个 x_k 都在第 $k + 1$ 个闭区间中被踢出去了, 矛盾

4. 本题可以用 baire 纲定理解决, 参考数学类红宝书上册例 2.2.3, 也可以用区间套来解决:

设 $r_1, r_2, \dots$ 是区间 $[0, 1]$ 的全体有理数, 任取一个有理数 $r \in (0, 1), r \neq r_1$, 因为 $f(x)$ 在 $x = r$ 处连续, 则可以选取包含 r 但是不包含 r_1 的闭区间 $[a_1, b_1] \subset (0, 1)$ 并且区间长度 $b_1 - a_1 < \frac{1}{2}$, 使得 $f(x)$ 在 $[a_1, b_1]$ 中的振幅

$\sup_{x, y \in [a_1, b_1]} |f(x) - f(y)|$ 不超过 $\frac{1}{2}$ (这是因为连续性)

然后在区间 (a_1, b_1) 中任取一个不等于 r_2 的有理数 r' , 则存在包含 r' 但是不包含 r_2 的子区间 $[a_2, b_2] \subset (a_1, b_1)$, $b_2 - a_2 < \frac{1}{3}$, 使得 $f(x)$ 在 $[a_2, b_2]$ 中的振幅 $\sup_{x, y \in [a_2, b_2]} |f(x) - f(y)|$ 不超过 $\frac{1}{3}$ (这是因为连续性)

以此类推得到一个区间套 $[a_n, b_n]$, 满足 $b_n - a_n < \frac{1}{n}$, $a_n < a_{n+1}$, $b_n > b_{n+1}$ 并且前 n 个有理数 $r_1, \dots, r_n$ 都不在 $[a_n, b_n]$ 中, 同时 $f(x)$ 在这个区间中的振幅不超过 $\frac{1}{n}$

根据区间套定理, 存在唯一 ξ 属于每一个 $[a_n, b_n]$, 故 ξ 一定是无理数 (因为每一个区间都依次踢出去了一个有理数) 并且 $a_n < \xi < b_n$ 恒成立, 由条件 $f(x)$ 在 ξ 点不连续

但是对任意正整数 n 和任意 $x \in (a_n, b_n)$, 根据振幅条件我们有 $|f(x) - f(\xi)| \leq \sup_{u, v \in [a_n, b_n]} |f(u) - f(v)| < \frac{1}{n}$, 由此可以看出 $f(x)$ 在 ξ 点一定是连续的 (因为 a_n 严格单调递增趋于 ξ , b_n 严格单调递减趋于 ξ , 不连续则意味着有一列 $t_k \rightarrow \xi$ 使得 $|f(t_k) - f(\xi)| \geq \delta > 0$, 那么 k 充分大之后 t_k 会落入任何一个开区间 (a_n, b_n) , 与不等式对比, 引发矛盾), 所以和 ξ 的定义矛盾, 结论得证

注释 12.1.1: 这里的“严格”是很重要的, 你可以试试如果我们过程中处理的时候不注意细节, 区间全用闭区间, 然后 a_n, b_n 两个序列就不再严格单调, 会有什么后果, 还能证得出来吗?

5. 解决本题, 我们需要一个 Baire 纲定理的变形 (核心引理, 其实可以一步得到, 见注释):

引理 12.1.1: 设 $A_n \subset \mathbb{R}$ 是一列闭集, 并且 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 也是闭集, 则存在开区间 (a, b) (可以是无穷区间) 和正整数 N 使得 $(a, b) \cap A \subset A_N$.

反证法, 则对任意开区间 (a, b) , $(a, b) \cap A$ 都不是任何一个 A_n 的子集

所以存在 $x_1 \in A, x_1 \notin A_1$ (否则任意 $x_1 \in A$ 都有 $x_1 \in A_1$, 这意味着 $A = A_1$, 则区间 (a, b) 取为 $\mathbb{R}$ 便有 $(a, b) \cap A \subset A_1$, 矛盾), 由于 A_1 是闭集, 故 x_1 与集合 A_1 的距离是正数, 因此存在 $r_1 \in (0, 1)$ 使得 $(x_1 - r_1, x_1 + r_1) \cap A_1 = \emptyset$

因为 $(x_1 - r_1, x_1 + r_1) \cap A \not\subset A_2$, 所以存在 $x_2 \in (x_1 - r_1, x_1 + r_1) \cap A, x_2 \notin A_2$, 由于 A_2 是闭集, 故存在 $r_2 \in (0, \frac{1}{2})$ 使得

$$[x_2 - r_2, x_2 + r_2] \subset (x_1 - r_1, x_1 + r_1), (x_2 - r_2, x_2 + r_2) \cap A_2 = \emptyset$$

以此类推得到一系列区间和一系列 $x_n \in A$, 满足

$$[x_n - r_n, x_n + r_n] \subset (x_{n-1} - r_{n-1}, x_{n-1} + r_{n-1}), (x_n - r_n, x_n + r_n) \cap A_n = \emptyset, r_n < \frac{1}{n}$$

所以对任意正整数 N 和 $m, n \geq N$ 都有

$$x_m, x_n \in [x_N - r_N, x_N + r_N] \Rightarrow |x_m - x_n| \leq \frac{2}{N}$$

根据柯西收敛准则可知 x_n 收敛于 ξ , 而 A 是闭集且 $x_n \in A$, 所以 $\xi \in A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 则 ξ 一定在某个 A_N 中 但是 $(x_N - r_N, x_N + r_N) \cap A_N = \emptyset$, 所以 $\xi \notin (x_N - r_N, x_N + r_N)$, 同时

$$x_{N+1}, x_{N+2}, \dots \in [x_{N+1} - r_{N+1}, x_{N+1} + r_{N+1}] \subset (x_N - r_N, x_N + r_N)$$

故 ξ 是闭集 $[x_{N+1} - r_{N+1}, x_{N+1} + r_{N+1}]$ 的一个极限点, 因此 $\xi \in [x_{N+1} - r_{N+1}, x_{N+1} + r_{N+1}]$ 这显然是矛盾的, 引理得证

回到原题, 反证法, 如果 $(0, 1)$ 可以写成一列互不相交的闭集的并, 则闭集一定是无限个, 并且 $[0, 1]$ 也可以写成一列互不相交的闭集的并, 因此设 $[0, 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 这里每一个 A_n 都是非空的闭集

用 $\overset{\circ}{A}$ 表示集合 A 的内部, ∂A 表示集合 A 的边界, 则显然 $\overset{\circ}{A}$ 是开集, ∂A 是闭集 (这是因为 $\mathbb{R}$ 分为 A 的内部, A 的边界以及 A 的外部三个不相交的部分, 并且 A 的外部也即 A^c 的内部是开集, $\overset{\circ}{A}$ 也是开集, 取补集得到 ∂A 是闭集), 注意对闭集 A 总有 $A = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$ (实际上 A 是闭集等价于 $\partial A \subset A$), 所以

$$[0, 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{A}_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \partial A_n \right)$$

根据条件: 上述并集中出现的各个集合互不相交, 于是有

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \partial A_n = [0, 1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{A}_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{A}_n \right)^c \cap [0, 1] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\overset{\circ}{A}_n \right)^c \cap [0, 1]$$

是一个闭集, 并且 $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \partial A_n$ 是一列互不相交的非空闭集的并, 根据 Baire 纲定理 (引理) 知存在开区间 $(a, b) \subset (0, 1)$ 和正整数 N 使得 $(a, b) \cap B \subset \partial A_N$, 注意各个 ∂A_n 是互不相交的, 这说明 (a, b) 中只含有非空集合 ∂A_N 中的点, 而与其余任何一个 ∂A_k 都不相交

事实上, 能够证明: 如果一个开区间 (a, b) 与某个 ∂A_i 相交, 则它必定也和其余某个 ∂A_j 相交

反证法: 设某个区间 $(a, b) \subset (0, 1)$ 只和 ∂A_1 相交, 而与其余所有 ∂A_i 都不相交, 则任取一个 $x \in (a, b) \cap \partial A_1$, 此时 x 是闭集 A_1 的边界点, (a, b) 是 x 点的邻域, 则存在 $y \in (a, b) \subset (0, 1), y \notin A_1$, 而 $[0, 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 所以 y 一定在其余某个 A_k 中, 不妨设 $y \in A_2$, 下面来说明 (a, b) 与 ∂A_2 相交:

若不然, 即 $(a, b) \cap \partial A_2 = \emptyset$, 则有

$$(a, b) \cap A_2 = \left((a, b) \cap \overset{\circ}{A}_2 \right) \cup ((a, b) \cap \partial A_2) = (a, b) \cap \overset{\circ}{A}_2$$

是开集, 由于 A_2^c 是开集, 则

$$(a, b) = ((a, b) \cap A_2) \cup ((a, b) \cap A_2^c)$$

是两个不相交的非空开集的并, 非空是因为

$$y \in (a, b) \cap A_2, x \in (a, b) \cap \partial A_1 \Rightarrow x \notin A_2, x \in (a, b) \cap A_2^c$$

但是这个结果与区间的连通性矛盾, 连通性是指

引理 12.1.2: 对任意开区间 (a, b) , 都不能将其写成两个非空的不交的开集的并

反证法, 设 $A, B \subset (a, b)$ 是非空开集并且 $(a, b) = A \cup B$, 则任取 $x \in A, y \in B$, 考虑线段 xy

取线段 xy 的中点 $\frac{x+y}{2} \in (a, b)$, 如果 $\frac{x+y}{2} \in A$, 则记 $x_1 = \frac{x+y}{2}, y_1 = y$ 并考虑线段 $x_1 y_1$, 反之若 $\frac{x+y}{2} \in B$, 则记 $x_1 = x, y_1 = \frac{x+y}{2}$ 并考虑线段 $x_1 y_1$

同样考虑线段 $x_1 y_1$ 的中点并以此确定下一个线段 x_2, y_2 , 以此类推可得一个闭区间套, 满足两个端点总是一个属于 A , 一个属于 B , 根据区间套定理, 存在唯一 ξ 属于所有的线段 $x_k y_k$, 则不论 $\xi \in A$ 还是 $\xi \in B$, 由于 A, B 是开集, 都会导致 ξ 的某个邻域全部位于开集 A 中或者开集 B 中, 因此当 n 充分大时, 线段长度趋于零, 变会导致 x_n, y_n 两个端点属于同一个开集, 矛盾

因此, (a, b) 中不可能只含有非空集合 ∂A_N 中的点, 一定还包含其余某个 ∂A_k 中的点, 导致矛盾, 结论得证

注释 12.1.2: Baire 纲定理的一个版本是“完备的度量空间是第二纲的”, 也就是说如果 X 是完备(任意柯西列都收敛)度量空间, 则 X 不能写成一系列无处稠密集(先取闭包再取内部, 得到空集, 这样的集合)的并, 因此如果一系列闭集 A_n , 它们的并集 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 也是一个闭集, 则可以将 A 视为完备度量空间。现在全空间 A 写成了一系列闭集的并, 对 A 使用 Baire 纲定理, 在子空间拓扑意义下, 则存在一个 A_N 使得 A_N 有“相对内点”, 对应到 $\mathbb{R}$ 中就是说存在一个开区间 I , 使得 $I \cap A \subset A_N$ 。

换句话说: 存在一个开区间 I , 使得区间 I 中所有在 $A_1, A_2, \dots$ 中的点, 都在 A_N 里面(设想 $A = \mathbb{R}$, 则 A_N 里面直接包含了一个开区间 I , 那么 I 中所有点都在 A_N 里面了, 上述论断是自然的, 而一般情况下, 可能任何一个 A_n 都没有内点, 只有“相对内点”。

可是上述“子空间拓扑”的说法或许不能让人信服, 尤其是只学过数学分析的同学, 因此我们将这个命题也就是 Baire 纲定理的变形单独拿出来, 用最基本的数学分析方法证明一遍, 再使用。

补充: 度量空间完备性质和闭集性质有什么关系? 完备的集合显然一定是闭集, 反之闭集有可能不完备, 若想要这个结论成立, 需要补充条件“这个闭集是完备度量空间的一个子集”, 这里提及的两个结论证明都是很简单而直接的验证, 自行完成

根据本题结果, 我们可以立即得到一些类似的结论, 闭集显然包括了闭区间的情况

推论 12.1.1

1. 任何开区间 (a, b) 均不能写成有限个不交的闭集的并
2. $(0, 1), [0, 1), [0, 1]$ 均不能写成一系列互不相交的闭集的并

其中第一点是容易证明的, 考虑区间的连通性即可, 完全不必像本题这样操作(应当掌握)

还有一个更具一般性的命题, 是 100 年前才被证明的精彩的定理

定理 12.1.1: Sierpinski

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是不可数集, 若一系列互不相交的闭集使得 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 则至多有一个集合 A_n 非空。

显然这个命题是比原题以及推论要强的, 自然证明也更加困难

6. 对于两个解的情况, 结论是不存在: 如果存在, 则假设 $f(a) = f(b) = 0$, 然后关注区间 $[a, b]$, 此时如果存在 $x_1 \in (a, b)$ 使得 $M = f(x_1) > 0$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中的最大值, 则 $x < a$ 或者 $x > b$ 时都恒有 $f(x) < 0$, 否则对充分小的正数 ε , $f(x) = \varepsilon$ 至少会有三个解(介值性), 矛盾

现在考虑 $f(x) = M$ 的解, 则存在 $x_2 \in (a, b), x_2 \neq x_1$ 使得 $f(x_2) = M$, 在区间 $[x_1, x_2]$ 或者 $[x_2, x_1]$ 中, $f(x)$ 显然存在最小值 m 并且 $m < M$, 于是对充分小的正数 ε , $f(x) = M - \varepsilon$ 至少会有四个解, 导致矛盾

综上, 我们说明了 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中的最大值就是 0, 同理 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中的最小值也是 0, 进而 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 中恒为零, 矛盾, 故不存在

对于三个解的情况, 结论是存在, 例如 $f(x) = \begin{cases} n, & x = 2n \\ n-2, & x = 2n-1 \end{cases}$, 这是一个折线构成的函数, 画图容易看出满足条件, 并且将 2, 3 换成一般的偶数和奇数, 结论都是不变的

7. 因为 $f(x)$ 取值恒正, 所以 $\bigcup_{x \in [0,1]} (x - f(x), x + f(x)) \supset [0, 1]$, 根据有限覆盖定理, 存在其中有限个区间覆盖 $[0, 1]$, 设为 $I_k = (x_k - f(x_k), x_k + f(x_k)), k = 1, 2, \dots, n$, 这些区间 I_k 互相可能有交集, 也可能某个区间是其他一些区间合起来的子集, 下面做些改进

如果区间 I_1 可以被剩下 $n - 1$ 个区间的并集覆盖, 则将 I_1 扔掉, 反之则保留, 再看区间 I_2 , 如果它可以被剩下的 $n - 1$ 或者 $n - 2$ 个区间的并集覆盖, 则将 I_2 扔掉, 反之则保留, 以此类推下去, 逐一检查这 n 个区间, 则有限次操作后, 我们不妨设最终保留下来的区间是 $I_k = (x_k - f(x_k), x_k + f(x_k)), k = 1, 2, \dots, m, m \leq n$, 那么这些区间一定满足: 任何一个区间都不能被其余 $m - 1$ 个区间的并集覆盖, 并且它们的并集仍然覆盖了 $[0, 1]$

我们将这些区间按照左端点的大小关系递增排列, 不妨设 $x_1 - f(x_1) \leq x_2 - f(x_2) \leq \dots \leq x_m - f(x_m)$, 方便起见记 $I_k = (a_k, b_k), a_k = x_k - f(x_k), b_k = x_k + f(x_k)$, 其中 a_k 是单调递增的, 显然 a_k 严格单调递增, 否则不妨是 $a_1 = a_2$, 则不论 b_1 与 b_2 的大小关系如何, I_1 和 I_2 中都一定有某一个另外一个是另一个的子集, 矛盾

如果存在 k 使得 $I_k \cap I_{k+2} \neq \emptyset$, 则 $a_k < a_{k+2} < b_k < b_{k+2}$, 我们考虑 a_{k+1} , 根据递增性应有 $a_k < a_{k+1} < a_{k+2}$, 再来看 b_{k+1} , 因为 I_{k+1} 不能被 I_k 和 I_{k+2} 覆盖, 所以 $b_{k+1} > b_{k+2}$, 但是这样子 I_{k+2} 就被 I_{k+1} 覆盖了, 矛盾

因此 $I_1, I_3, \dots$ 互不相交, $I_2, I_4, \dots$ 互不相交, 注意 $I_1, I_2, \dots, I_m$ 的并集覆盖了 $[0, 1]$, 考虑区间长度可知

$$2(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k)) > 1$$

于是 $f(x_1) + f(x_3) + \dots > \frac{1}{4}$ 和 $f(x_2) + f(x_4) + \dots > \frac{1}{4}$, 不妨设前者成立, 则相应的 $x_1, x_3, \dots$ 对应的区间 $I_1, I_3, \dots$ 是两两不交的, 并且函数值求和大于 $\frac{1}{4}$, 即为所求

注释 12.1.3: 前面例题中提到有限覆盖有时候需要去掉重复的区间才能达到目的, 本题就是一个具体的去重复的例子, 最后的效果直观来说就是“区间是严格递增的并且基本上不重复”

8. 在例题 2.2.5 中已经证明了任何函数的极值个数都是至多可数的 (包括在 $\mathbb{R}^n$ 中也一样), 现在证明存在一个区间 I 使得 $f(x)$ 在 I 中为常值函数 (注意这个证明并不依赖于值域是至多可数集, 两个结论是独立的)

反证法: 假设 $f(x)$ 在任何区间中都不是常值函数, 任取 $x_1 \in \mathbb{R}$, 根据条件, 存在 $a_1 < x_1 < b_1, b_1 - a_1 < 1$ 使得 $f(x_1)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a_1, b_1]$ 中的最小值, 注意 $f(x)$ 在任何区间中都不是常值函数, 所以存在 $x_2 \in (a_1, b_1)$ 使得 $f(x_2) > f(x_1)$, 并且存在 $[a_2, b_2] \subset (a_1, b_1), x_2 \in (a_2, b_2), b_2 - a_2 < \frac{1}{2}$ 使得 $f(x_2)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a_2, b_2]$ 中的最小值

以此类推得到一个闭区间套 $[a_n, b_n]$, 这里 a_n 严格单调递增, b_n 严格单调递减, 并且 $a_n < x_n < b_n, f(x_{n+1}) > f(x_n)$ 恒成立, 因为 $b_n - a_n < \frac{1}{n}$, 所以存在唯一的 ξ 属于每一个 $[a_n, b_n]$, 也是 a_n, b_n, x_n 这三个数列共同的极限

现在关注 ξ 点, 因为是极小值点, 存在 $\delta > 0$ 使得 $f(x)$ 在区间 $[\xi - \delta, \xi + \delta]$ 中的最小值是 $f(\xi)$, 注意 $a_n, b_n \rightarrow \xi$, 所以存在充分大的正整数 N , 使得 $n > N$ 时恒成立 $x_n, \xi \in [a_n, b_n] \subset [\xi - \delta, \xi + \delta]$, 则 $f(x_n), f(\xi)$ 都是 $[a_n, b_n]$ 中的最小值, 故 $f(x_n) = f(\xi)$, 这与序列 $f(x_n)$ 严格单调递增矛盾, 结论得证

但是如果将极小值点改成极值点, 则结论不在成立, 比如取 $f(x)$ 为黎曼函数, 此时 $f(x)$ 处处取极值 (有理点取极大值, 无理点取极小值), 但是在任何区间中都不是常值函数

9. 乙有必胜策略: 注意 $[0, 1]$ 中的有理数是可数的, 因此乙在每一次选择区间的时候, 只要将第 n 个有理数踢出去就可以了, 这样最后的交集就不可能是有理数, 因为最后所有的有理数全被踢出去了, 当然“结果如何”指的是乙有必胜策略, 而非乙随意选择区间都必定能获胜。

本题可以推广: 将有理数集换成任意一个第一纲的集合 M (可数个无处稠密集的并, 或者说能够写成一列没有内点的闭集之并的集合), 结论都是不变的, 同样乙只需要在第 n 次操作中回避这一列集合中的第 n 个 (不交), 那么最后的交集就一定不属于 M , 反之如果乙有必胜策略, 则这个集合 M 也必须是第一纲的, 自行验证

12.2 第三章习题答案

1. 利用递推式的单调递减性, 归纳证明 $1 - \frac{1}{n+1} \leq a_n \leq 1$ 即可
2. 见微信公众号[链接](#) (如果你是打印版, 请到 PDF 版中点击链接查看答案)
3. 注意如果数列中某一项为零, 则后面所有项都是零, 极限显然存在, 反之不妨设数列正, 此时可以取对数, 问题转化为实数列 $a_{m+n} \leq a_m + a_n$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 存在 (为有限数或者无穷).

任取一个 m 然后做带余除法: $\frac{a_{km+r}}{km+r} \leq \frac{ka_m + a_r}{km+r}, r = 0, 1, \dots, m-1, k \geq 1$, 再让 $k \rightarrow \infty$ 取上极限得到 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_m}{m}$, 然后对 $m \rightarrow \infty$ 取下极限就有 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$, 这意味着 $\frac{a_n}{n}$ 极限存在 (允许为负无穷), 从过程中还可以看出 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \inf_m \frac{a_m}{m}$, 反向的不等式显然成立, 进而第二问也得证

4. 根据递推式和 $u_n > 0$, 显然 $u_n > 1$, 所以

$$u_{n+2} = 1 + \frac{1}{u_{n+1}} < 2,$$

再代入回去可知

$$u_n < 1 + 2 = 3,$$

因此 u_n 是有界数列。

设 u_n 的上极限、下极限分别为 A, B , 则

$$1 \leq B \leq A \leq 3,$$

在递推式两边取上下极限可知

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+2} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 + \frac{A}{B} \implies AB \leq A + B,$$

$$B = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+2} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 + \frac{B}{A} \implies AB \geq A + B.$$

这说明 $AB = A + B$ 。

现在可以取子列 u_{n_k+2} 使得它趋于 A 。考虑每个 u_{n_k+2} 的前一项构成的数列, 它作为一个有界数列必定存在收敛子列, 我们把这个收敛子列取出来, 再考虑这个收敛子列的前一项构成的数列, 同样可以取出另一个收敛子列, 然后再同理操作一次, 因此我们可以设子列

$$u_{n_k+2} \rightarrow A, \quad u_{n_k+1} \rightarrow l_1, \quad u_{n_k} \rightarrow l_2, \quad u_{n_k-1} \rightarrow l_3,$$

代入递推关系取极限可知

$$A = 1 + \frac{l_1}{l_2}, \quad l_1 = 1 + \frac{l_2}{l_3}.$$

其中 $AB = A + B, 1 \leq B \leq l_2, l_3 \leq A \leq 3$ 。

所以

$$A = 1 + \frac{l_1}{l_2} \leq 1 + \frac{B}{l_3} = A,$$

这说明 $l_1 = A, l_2 = B$ 。

再由

$$l_1 = 1 + \frac{l_2}{l_3}$$

代入以上结果放缩可知

$$A = 1 + \frac{B}{l_3} \leq 2.$$

但是 $AB = A + B \implies B = A(B - 1) \leq 2B - 2 \implies B \geq 2$ 。

结合 $A \geq B$ 即可得到 $A = B = 2$ ，因此所求的极限就是 2。

5. 反证法：则有 $A > \frac{1}{4}$ 使得

$$n^2(4a_n(1 - a_{n-1}) - 1) \geq A > \frac{1}{4}, \forall n \geq N$$

于是

$$4a_n(1 - a_{n-1}) \geq 1 + \frac{A}{n^2} \Leftrightarrow a_n \geq \frac{1}{4(1 - a_{n-1})} \left(1 + \frac{A}{n^2}\right), a_n \in (0, 1)$$

令

$$b_n = \frac{1}{4(1 - b_{n-1})} \left(1 + \frac{A}{n^2}\right), b_N = a_N$$

则 $a_n \geq b_n$ ，并且从递推式可知 a_n, b_n 都是单调递增的（代入递推式后，由均值不等式即得到），所以极限存在

在 $4a_n(1 - a_{n-1}) \geq 1 + \frac{A}{n^2}$ 中令 $n \rightarrow \infty$ 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$

于是 a_n 单调递增趋于 $\frac{1}{2}$ ，同理 b_n 也是单调递增趋于 $\frac{1}{2}$ ，方便起见，我们讨论 b_n

令 $b_n = \frac{1 - c_n}{2}$ ，则 $c_n \in (0, 1)$ 且单调递减趋于零

$$\begin{aligned} 4b_n(1 - b_{n-1}) &= 1 + \frac{A}{n^2} \Rightarrow (1 - c_n)(1 + c_{n-1}) = 1 + \frac{A}{n^2} \\ \Rightarrow c_{n-1} - c_n &= \frac{A}{n^2} + c_n c_{n-1}, c_n - c_{n+1} > \frac{A}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

求和得到

$$c_n \geq A \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots \right) > \frac{A}{n+1}$$

回代得到

$$c_{n-1} - c_n = \frac{A}{n^2} + c_n c_{n-1} \geq \frac{A}{n^2} + \frac{A^2}{n(n+1)}$$

求和得到 $c_n \geq \frac{A}{n+1} + \frac{A^2}{n+1}$

右边变大了，于是我们考虑右边最大能到多少

设 m 为 $(n+1)c_n$ 的下确界（对任意 $n \geq N$ ），即 $c_n \geq \frac{m}{n+1}$ 是最佳的

回代得到

$$c_{n-1} - c_n = \frac{A}{n^2} + c_n c_{n-1} \geq \frac{A}{n^2} + \frac{m^2}{n(n+1)}$$

求和得到 $c_n \geq \frac{A}{n+1} + \frac{m^2}{n+1}$

因此 $(n+1)c_n \geq A + m^2$ 不应超过下确界 m ，所以

$$A + m^2 \leq m \Rightarrow A \leq m(1 - m) \leq \frac{1}{4}$$

这就导出了矛盾，从而结论得证

6. 若可导，则导数定义中取有理数时算出来导数为零，因此无理数方式趋近时候极限也必须是零，可是 $a \in (0, 2]$ ，由狄利克雷逼近定理知不可能

7. 对任意 $c \in [-1, 1]$, 要说明在 c 的任意邻域内都有数列 $\sin n$ 中的某一项, 设 $x \in [0, 1]$ 满足 $\sin 2\pi x = c$, 则我们需要找正整数 n 使得 $\sin n = \sin 2\pi \left\{ \frac{n}{2\pi} \right\} \in (c - \delta, c + \delta)$, 也就是说找 n 使得 $\left\{ \frac{n}{2\pi} \right\}$ 在 x 附近, 这由前面的 Kronecker 逼近定理是显然的

8. 因为 $\sin a(x + t_n) = \sin \left(ax + 2\pi \left\{ \frac{at_n}{2\pi} \right\} \right)$, 所以为了保证一致收敛, 应有 $\left\{ \frac{at_n}{2\pi} \right\}$ 充分小, 所以本题要做的事情是: 找一系列 t_n 单调递增趋于无穷, 使得 $\left\{ \frac{at_n}{2\pi} \right\}, \left\{ \frac{bt_n}{2\pi} \right\}, \left\{ \frac{ct_n}{2\pi} \right\}$ 三者都趋于零, 将 $t_n \rightarrow kt_n$, 则目标为找一系列 t_n 使得 $\{at_n\}, \{bt_n\}, \{t_n\}$ 都趋于零, 进一步的, 只要能说明: 对任意 $\varepsilon > 0$ 和任意充分大的 M , 都存在 $t > M$ 使得 $\{ta\}, \{tb\}, \{t\} < \varepsilon$ 就可以了

如果 a, b 都是有理数, 直接“去分母”取 t_n , 即可让前面三者均恒为零, 显然成立

以下不妨设 a 是无理数, 让 t 取正整数, 根据无理数的基本性质 (等分布, 或者稠密, 都行), 能找一系列正整数 n_i 使得 $\{n_i a\} < \varepsilon$, 接着看对应的 $\{n_i b\}, i = 1, 2, \dots$, 根据稠密性 (或者等分布, 或者抽屉原理), 会有无穷多组相距很近的 $\{n_i b\}, \{n_j b\}$, 则 $\{(n_j - n_i)b\}$ 会很小, 相应的 $\{(n_i - n_j)a\}$ 要么在 0 附近要么在 1 附近, 因为有无穷多组, 所以可以让其在 0 附近, 也即总可以找到充分大的 $t = n_i - n_j$, 使得 $\{ta\}, \{tb\}, \{t\} < \varepsilon$

注: 显然 3 个可以推广到 n 个

9. 首先想办法把答案猜出来, 注意绝对值里面的东西是恒负的, 考虑

$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} - e^{-x} \geq 0, f'(x) = e^{-x} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-(n+1)}$$

则

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n+1}$$

容易看出上述方程存在唯一的正根, 还有一个显然的解 $x = 0$, 现在考虑 x 取什么值时候这个方程会成立或者近似的成立, 泰勒展开 (形式计算) 有

$$\frac{x}{n+1} = \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \approx \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} \Rightarrow \frac{x^2}{2n^2} = \frac{x}{n(n+1)} \Rightarrow x \approx 2$$

于是推测 $x = 2$ 为近似的零点, 并且代入 $x = 2$ 去计算, 出来的极限便是答案, 下面做证明:

显然

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \geq 0} \left| e^{-x} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \right| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-n} - e^{-2} \right) = \frac{1}{e^2} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(e^{2-n \ln(1+\frac{2}{n})} - 1 \right) = \frac{2}{e^2}$$

$$\text{所以只需要证明 } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \max_{x \geq 0} \left| e^{-x} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \right| \leq \frac{2}{e^2}$$

因为 $f(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} - e^{-x} \geq 0$ 先增后减, 且有唯一的极大值点 x_0 (取值与 n 有关), 满足方程 $\ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n+1}$, 所以只需要代入 $x = x_0$ 求极限, 问题在于 x_0 算不出来, 下面分两步处理这个问题

如果能够说明存在 M 使得对每一个 n , 最大值总是在 $[0, M]$ 中取到, 也就是说

$$\max_{x \geq 0} \left| e^{-x} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \right| = \max_{x \in [0, M]} \left| e^{-x} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \right|, \forall n \geq 1$$

那么在 $n \rightarrow \infty$ 的过程中, 泰勒展开将会具备一致性, 形式上看就是可以直接对里面做泰勒展开, 然后令 $n \rightarrow \infty$ 得到极限函数, 再对极限函数计算最大值 (可以理解为做了换序), 详细过程如下:

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得任意 $x \in (0, \delta)$ 都有 $e^x - 1 \leq (1 + \varepsilon)x$, 注意 $x \in [0, M]$ 于是当 $n > N$ 充分大时总有

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} - e^{-x} = e^{-n \ln(1+\frac{x}{n})} - e^{-x} \leq e^{-n \left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2}\right)} - e^{-x} = e^{-x} \left(e^{\frac{x^2}{2n}} - 1 \right) \leq e^{-x} (1 + \varepsilon) \frac{x^2}{2n}$$

所以

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \max_{x \geq 0} n \left| e^{-x} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \right| \leq (1 + \varepsilon) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \max_{x \geq 0} (e^{-x} x^2) = (1 + \varepsilon) \max_{x \geq 0} \frac{x^2}{e^x} = (1 + \varepsilon) \frac{2}{e^2}$$

根据 ε 的任意性便可得到答案

所以只要证: 对任意正整数 n , $f(x)$ 的最大值点总是在一个确定的有限区间中, 也就是说方程 $\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n+1}$ 的解 x 是有界的, 这个界与 n 无关

说明这件事情的方法有很多 (高考题), 随便举个例子: 根据高考不等式 $\ln(1+x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x}}$, $x > 0$ 有

$$\frac{x}{n+1} = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq \frac{\frac{x}{n}}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}} \Rightarrow \sqrt{1+\frac{x}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow x \leq 2 + \frac{1}{n}$$

由此结论得证, 最后答案是 $\frac{2}{e^2}$

10. 第一步: 证明 x_n 有界

我们用归纳法证明

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{n} < x_n < \sqrt{3} - \frac{1}{n}, \forall n \geq 4$$

根据初始值和递推有

$$x_2 = \frac{13}{6}, x_3 = \frac{31}{39}, x_4 = \frac{413}{279} < \sqrt{3} - \frac{1}{4} \\ \left(\left(\frac{413}{279} + \frac{1}{4} \right)^2 - 3 = -\frac{7607}{1245456} < 0 \right)$$

所以结论对 $n = 4$ 成立

假设 n 时成立, 则 $n+1$ 时

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{2}{3n} < \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{n}} + \frac{2}{3n} < \sqrt{3} - \frac{1}{n+1} \\ x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{2}{3n} > \frac{1}{\sqrt{3} - \frac{1}{n}} + \frac{2}{3n} > \sqrt{3} + \frac{1}{n+1}$$

我们只需要证明这两个标红的不等号, 设

$$f(x) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{x}} + \frac{2}{3x} - \sqrt{3} + \frac{1}{x+1} \\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{3} - \frac{1}{x}} + \frac{2}{3x} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{x+1}$$

则根据二次函数的单调性可知

$$f(x) = \frac{6 + 15x - 7\sqrt{3}x - 4\sqrt{3}x^2}{3x(1+x)(3+\sqrt{3}x)} \leq \frac{66 - 92\sqrt{3}}{3x(1+x)(3+\sqrt{3}x)} < 0 \\ g(x) = \frac{-2 + x + 3\sqrt{3}x}{3x(1+x)(-1+\sqrt{3}x)} \geq \frac{2 + 12\sqrt{3}}{3x(1+x)(-1+\sqrt{3}x)} > 0$$

因此 $n+1$ 时结论成立, 这就证明了

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{n} < x_n < \sqrt{3} - \frac{1}{n}, \forall n \geq 4$$

第二步: 证明 $x_{2n} > 1$ 恒成立

若不然, 设使得 $x_{2n} \leq 1$ 成立的最小的 n 为 n_0 , 则 $x_{2n_0} \leq 1$ 且 $x_{2k} > 1, \forall 1 \leq k \leq n_0 - 1$, 显然 $n_0 \geq 3$

因为 $x_{2n_0} = \frac{1}{x_{2n_0-1}} + \frac{2}{3(2n_0-1)} \leq 1$, 所以 $x_{2n_0-1} > 1$

因此根据递推式迭代可知

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{x_n} + \frac{2}{3n} \Rightarrow x_n = \frac{1}{x_{n+1} - \frac{2}{3n}}, x_{n+1} = \frac{1}{x_{n+2} - \frac{2}{3(n+1)}} \\ \Rightarrow x_n &= \frac{1}{x_{n+1} - \frac{2}{3n}} = \frac{1}{\frac{1}{x_{n+2} - \frac{2}{3(n+1)}} - \frac{2}{3n}} \\ \Rightarrow x_{2n_0-3} &= \frac{1}{\frac{1}{x_{2n_0-1} - \frac{2}{3(n_0-1)}} - \frac{2}{3(2n_0-3)}} \\ &> \frac{1}{\frac{1}{1 - \frac{2}{3(n_0-1)}} - \frac{2}{3(2n_0-3)}} \\ &= \frac{1}{35 - 51n_0 + 18n_0^2} + 1 > 1 \end{aligned}$$

这说明

$$x_{2n_0-1} > 1, x_{2n_0-3} > 1, \dots, x_3 > 1, x_1 > 1$$

显然和初始值 $x_1 = \frac{2}{3}$ 是矛盾的, 因此结论得证

第三步: 证明偶子列 x_{2n} 单调递减趋于 1

前面证明了 $x_{2n} > 1$, 则由递推式可知

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{2}{3(n+1)} = \frac{1}{\frac{1}{x_n} + \frac{2}{3n}} + \frac{2}{3(n+1)} \\ x_{2n+2} - x_{2n} &= \frac{1}{\frac{1}{x_{2n}} + \frac{1}{3n}} + \frac{2}{3(2n+1)} - x_{2n} \\ &= \frac{3nx_{2n}}{x_{2n} + 3n} + \frac{2}{3(2n+1)} - x_{2n} = \frac{2}{3(2n+1)} - \frac{x_{2n}^2}{x_{2n} + 3n} \\ &< \frac{2}{3(2n+1)} - \frac{1}{1+3n} = -\frac{1}{3(1+2n)(1+3n)} < 0 \end{aligned}$$

其中用到了 $\frac{x^2}{x+3n} = \frac{1}{\frac{3n}{x^2} + \frac{1}{x}}$ 是增函数

所以 x_{2n} 单调递减且恒大于 1, 设子列 x_{2n} 的极限为 A , 则显然 $A \geq 1$, 下面证明 $A = 1$

若不然, 设 $A = 1 + \delta > 1$, δ 为一个确定的正数, 则 $x_{2n} > 1 + \delta$, 当 n 充分大时恒成立 $\frac{1+\delta}{3n} < \delta$, 此时根据递推式有

$$\begin{aligned} x_{2n+2} - x_{2n} &= \frac{2}{3(2n+1)} - \frac{x_{2n}^2}{x_{2n} + 3n} \\ &= \frac{1}{3n} \left(\frac{2n}{2n+1} - \frac{x_{2n}^2}{1 + \frac{1}{3n}x_{2n}} \right) \\ &< \frac{1}{3n} \left(1 - \frac{(1+\delta)^2}{1 + \frac{1}{3n}(1+\delta)} \right) < -\frac{\delta}{3n} \end{aligned}$$

因为调和级数发散, 所以上式表明 n 充分大时 x_{2n} 一定会趋于负无穷, 这显然与数列有界矛盾!

所以我们证明了偶子列 x_{2n} 单调递减趋于 1

第四步: 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$

现在考虑奇子列, 因为 $x_{2n+1} = \frac{1}{x_{2n}} + \frac{1}{2n}$, 令 $n \rightarrow \infty$ 结合 $x_{2n} \rightarrow 1$ 立即得到 x_{2n+1} 也趋于 1, 综上结论得证

12.3 第四章习题答案

1. 解方程 $x^2 - bx - a = 0$ 得到两个根

$$\lambda = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2} > 0, \mu = \frac{b - \sqrt{b^2 + 4a}}{2} < 0$$

然后分拆一下, 根据条件就有

$$(f'(x) - \lambda f(x))' \leq \mu (f'(x) - \lambda f(x)) \Rightarrow (e^{-\mu x} (f'(x) - \lambda f(x)))' \leq 0$$

已知条件表明 $f(x)$ 单调递增, 下凸, 所以 $f(-\infty) = A$ 有限, $f'(-\infty) = 0$, 由以上不等式知 $e^{-\mu x} (f'(x) - \lambda f(x))$ 单调递减, 然后令 $x \rightarrow -\infty$ 便有 $f'(x) \leq \lambda f(x)$, 这说明 $c = \lambda$ 满足要求, 很明显这是最佳的

2. 极限为零时候显然一致连续, 反之只需注意: 当 n 充分大时, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \rightarrow 0$, 因此对充分大的 x , 在其附近找一个 $\sqrt{k}$ 作为过度, 利用绝对值不等式放缩, 并结合条件 $f(\sqrt{k}) \rightarrow 0$ 即可

3. 显然, 不妨设 $f(x) \in C[0, 1]$, 只需要证明 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内有可导点

减去线性函数, 不妨设 $f(0) = f(1) = 0$, 进一步不妨设 $f(x)$ 在 $x_0 \in (0, 1)$ 处取到正的最大值, 则有

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h} &= 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \right) = 0 \\ \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} &\geq 0, \forall h > 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \\ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &\leq 0, \forall h > 0 \Rightarrow f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0 \end{aligned}$$

同理可知左导数也是零, 于是该点可导, 并且导数为零

注: 实际上可以证明, 可导点构成的集合还是不可数的, 方法也差不多

4. 反证法, 设 $|f'(x_1)| > 2\sqrt{AB} + D$, 根据条件有

$$|f'(x_1)| = \left| f'(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f''(t) dt \right| \leq D + B|x_1 - x_0|$$

由此得到 $|x_1 - x_0| > 2\sqrt{\frac{A}{B}}$, 进一步泰勒公式有

$$\begin{aligned} f(x_1 + h) &= f(x_1) + f'(x_1)h + \frac{1}{2}f''(\xi)h^2 \\ |f'(x_1)| &= \left| \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} - \frac{1}{2}f''(\xi)h \right| \leq \frac{2A}{|h|} + \frac{B}{2}|h| \end{aligned}$$

希望右边最小, 给出最好的估计, 所以取 $h = \pm 2\sqrt{\frac{A}{B}}$ 即可, 注意区间的限制, 应当保证 $x_1 + h \in [a, b]$, 不过

前面已经得到了 $|x_1 - x_0| > 2\sqrt{\frac{A}{B}}$, 所以这样的 h 肯定可以取到, 问题解决

5. 三问一起解决, 注意凸性等价于极值原理, 并且线性函数代入之后刚刚好取等, 所以采用反证法, 不妨设 $f(0) = f(1) = 0$, 并且 $f(a) > 0$ 是 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 中的最大值

第一问: 利用 $f(a) \leq \frac{1}{2h} \int_{a-h}^{a+h} f(x) dx \leq \frac{1}{2h} \int_{a-h}^{a+h} f(a) dx = f(a)$, $h > 0$ 和连续性可知 $f(x) \equiv f(a)$ 矛盾

第二问: 用 $y = \frac{a}{2}$ 去截 $f(x)$, 根据连续性可知有 $u < a < v$ 使得 $f(u) = f(v) = \frac{a}{2}$ 并且在 (u, v) 内恒成立 $f(x) > \frac{a}{2}$, 代入 u, v 到条件的不等式里面, 显然矛盾

第三问: 根据前两问, 一直取等则说明既上凸又下凸, 所以是线性函数

6. 第一问: 条件表明 $f(x)$ 有界, 设 $|f(x)| \leq M$ 恒成立, 显然 $F(x)$ 连续, 所以 $F(x)$ 在 $[0, 11]$ 中一致连续, 我们只需要证明 $F(x)$ 在 $[10, +\infty)$ 上一致连续 (如此假设是为了保证 $x, y, 2x, 2y$ 四个数字总是从小到大排列的)

对任意 $x, y \geq 10, 0 < y - x < 1$ 有

$$\begin{aligned}
 F(y) - F(x) &= \int_0^y t^a f(t+y) dt - \int_0^x t^a f(t+x) dt \\
 &= \int_y^{2y} (t-y)^a f(t) dt - \int_x^{2x} (t-x)^a f(t) dt \\
 &= \int_y^{2x} ((t-y)^a - (t-x)^a) f(t) dt + \int_{2x}^{2y} (t-y)^a f(t) dt - \int_x^y (t-x)^a f(t) dt \\
 &\quad \left| \int_y^{2x} ((t-y)^a - (t-x)^a) f(t) dt \right| \leq M \int_y^{2x} ((t-y)^a - (t-x)^a) dt \\
 &= \frac{M}{a+1} \left((2x-y)^{a+1} - x^{a+1} + (y-x)^{a+1} \right) \leq \frac{M(y-x)^{a+1}}{a+1} \\
 &\quad \left| \int_y^{2y} (t-y)^a f(t) dt \right| \leq M \int_y^{2y} (t-y)^a dt \leq M \int_{2x}^{2y} 1 dt = 2M(y-x) \\
 &\quad \left| \int_x^{2x} (t-x)^a f(t) dt \right| \leq M \int_x^{2x} (t-x)^a dt = \frac{M}{a+1} (y-x)^{a+1} \\
 \Rightarrow |F(y) - F(x)| &\leq \frac{M(y-x)^{a+1}}{a+1} + 2M(y-x) + \frac{M}{a+1} (y-x)^{a+1}
 \end{aligned}$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 只要 $|y-x|$ 充分小, 则上式右端就会充分小 (不论 x, y 多大), 由此知一致连续

第二问: 利用周期性, 对任意正整数 n 有

$$\begin{aligned}
 F((n+1)T) &= \int_0^{(n+1)T} t^a f(t+(n+1)T) dt = \int_0^{(n+1)T} t^a f(t) dt \\
 &= \int_0^T t^a f(t) dt + \int_T^{2T} t^a f(t) dt + \dots + \int_{nT}^{(n+1)T} t^a f(t) dt \\
 &= \int_0^T f(t) (t^a + (t+T)^a + \dots + (t+nT)^a) dt
 \end{aligned}$$

利用欧拉麦克劳林公式, 记 $g_n(t) = t^a + (t+T)^a + \dots + (t+nT)^a, t \in [0, T], h(x) = (t+Tx)^a$, 则

$$\begin{aligned}
 g_n(t) &= h(0) + h(1) + \dots + h(n) = \int_0^n h(x) dx + \frac{h(0) + h(n)}{2} + \int_0^n b_1(x) h'(x) dx \\
 &= \frac{(t+nT)^{a+1} - t^{a+1}}{T(a+1)} + \frac{1}{2}(t+nT)^a + \frac{1}{2}t^a + aT \int_0^n b_1(x) (t+Tx)^{a-1} dx
 \end{aligned}$$

注意 $a \in (0, 1), t \in [0, T]$, 所以容易知道余项 $\int_0^n b_1(x) (t+Tx)^{a-1} dx$ 是一个关于 $t \in [0, T]$ 和正整数 $n \geq 1$ 一致有界的量 (分段即可看出来, 0 附近显然一致有界, 之后 $b_1(x)$ 的存在导致积分正负互相抵消, 被积函数又会趋于零, 所以也是一致有界的, 跟区间长度 n 还有 t 的大小没关系), 所以

$$g_n(t) = \frac{(t+nT)^{a+1} - t^{a+1}}{T(a+1)} + \frac{1}{2}(t+nT)^a + O(1) = \frac{1}{T(a+1)}(nT)^{a+1} + \left(\frac{t}{T} + \frac{1}{2}\right)(nT)^a + O(1)$$

上面这一步化简用了泰勒展开, 然后代回去, 得到

$$F((n+1)T) = \int_0^T f(t) g_n(t) dt = \frac{(nT)^{a+1}}{T(a+1)} \int_0^T f(t) dt + (nT)^a \int_0^T f(t) \left(\frac{t}{T} + \frac{1}{2}\right) dt + O(1)$$

所以必须 $\int_0^T f(t) dt = 0$, 否则增长速度无法被一次函数控制, 不可能一致连续

因此下面设 $\int_0^T f(t) dt = 0, \int_0^3 f(t) dt = 2022$, 我们证明此时依然是不一致连续的
对任意充分大的正整数 n 以及 $\delta \in (0, 1)$ 有

$$\begin{aligned} F((n+1)T + \delta) - F((n+1)T) &= \int_0^{(n+1)T+\delta} t^a f(t + (n+1)T + \delta) dt - \int_0^{(n+1)T} t^a f(t + (n+1)T) dt \\ &= \int_0^T (f(t + \delta) - f(t)) g_n(t) dt + \int_0^\delta (t + (n+1)T)^a f(t + \delta) dt \\ &= \int_0^T (f(t + \delta) - f(t)) \left(\frac{(nT)^{a+1}}{T(a+1)} + \left(\frac{t}{T} + \frac{1}{2} \right) (nT)^a + O(1) \right) dt + (nT)^a \int_0^\delta \left(1 + \frac{t+T}{nT} \right)^a f(t + \delta) dt \\ &= (nT)^a \int_0^T (f(t + \delta) - f(t)) \frac{t}{T} dt + (nT)^a \int_0^\delta f(t + \delta) dt + O(1) \end{aligned}$$

这里化简利用了 $f(x)$ 周期为 T , 以及前面对 $g_n(t)$ 的估计式

利用周期性进一步计算, 容易得到 $\int_0^T (f(t + \delta) - f(t)) \frac{t}{T} dt = \int_0^\delta f(t) dt$, 所以

$$F((n+1)T + \delta) - F((n+1)T) = (nT)^a \int_0^{2\delta} f(t) dt + O(1)$$

只要 $\int_0^{2\delta} f(t) dt$ 非零, 那么右边一定趋于无穷, 从而不一致连续

现在看条件, 我们有 $\int_0^T f(t) dt = 0, \int_0^3 f(t) dt = 2022$, 所以 $f(x)$ 一定会在某个点附近邻域内积分非零, 不妨设这个邻域就在 0 附近, 从而推到上述最后一步时候, 就解决了问题, 当然你也可以平移一下, 先设出来这个邻域, 然后考虑对应的 $F((n+1)T + x_0 + \delta) - F((n+1)T + x_0)$

7. 根据定义

$$a_{n+1} \geq a_n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} f\left(\frac{2k-1}{2n+2}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)$$

利用泰勒公式积分余项 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^x f''(t)(x - t) dt$, 所以

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2k+1}{2n+2}\right) &= f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + f'\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \left(\frac{2k+1}{2n+2} - \frac{2k-1}{2n}\right) + \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n+2}} f''(t) \left(\frac{2k+1}{2n+2} - t\right) dt \\ &= f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + \frac{2n-2k+1}{2n(n+1)} f'\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n+2}} f''(t) \left(\frac{2k+1}{2n+2} - t\right) dt, k=1, 2, \dots, n \\ f\left(\frac{2k+1}{2n+2}\right) &= f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) + f'\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \left(\frac{2k+1}{2n+2} - \frac{2k+1}{2n}\right) + \int_{\frac{2k+1}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n+2}} f''(t) \left(\frac{2k+1}{2n+2} - t\right) dt \\ &= f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - \frac{2k+1}{2n(n+1)} f'\left(\frac{2k+1}{2n}\right) + \int_{\frac{2k+1}{2n+2}}^{\frac{2k+1}{2n}} f''(t) \left(t - \frac{2k+1}{2n+2}\right) dt, k=0, 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

这说明

$$f\left(\frac{2k+1}{2n+2}\right) = \begin{cases} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + \frac{2n-2k+1}{2n(n+1)} f'\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n+2}} f''(t) \left(\frac{2k+1}{2n+2} - t\right) dt \\ f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - \frac{2k+1}{2n(n+1)} f'\left(\frac{2k+1}{2n}\right) + \int_{\frac{2k+1}{2n+2}}^{\frac{2k+1}{2n}} f''(t) \left(t - \frac{2k+1}{2n+2}\right) dt \end{cases}, 1 \leq k \leq n-1$$

具体写出来为

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{2k+1}{2n+2}\right) &= \frac{k}{n} f\left(\frac{2k+1}{2n+2}\right) + \left(1 - \frac{k}{n}\right) f\left(\frac{2k+1}{2n+2}\right) \\
 &= \frac{k}{n} \left(f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + \frac{2n-2k+1}{2n(n+1)} f'\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n+2}} f''(t) \left(\frac{2k+1}{2n+2} - t\right) dt \right) \\
 &\quad + \left(1 - \frac{k}{n}\right) \left(f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - \frac{2k+1}{2n(n+1)} f'\left(\frac{2k+1}{2n}\right) + \int_{\frac{2k+1}{2n+2}}^{\frac{2k+1}{2n}} f''(t) \left(t - \frac{2k+1}{2n+2}\right) dt \right), k = 1, 2, \dots, n-1 \\
 f\left(\frac{1}{2n+2}\right) &= f\left(\frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2n(n+1)} f'\left(\frac{1}{2n}\right) + \int_{\frac{1}{2n+2}}^{\frac{1}{2n}} f''(t) \left(t - \frac{1}{2n+2}\right) dt \\
 f\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) &= f\left(\frac{2n-1}{2n}\right) + \frac{1}{2n(n+1)} f'\left(\frac{2n-1}{2n}\right) + \int_{\frac{2n-1}{2n}}^{\frac{2n+1}{2n+2}} f''(t) \left(\frac{2n+1}{2n+2} - t\right) dt
 \end{aligned}$$

相加, 整理得到 (有点难算这一步, 自行计算)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n+1} f\left(\frac{2k-1}{2n+2}\right) &= f\left(\frac{1}{2n+2}\right) + f\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n+2}\right) \\
 &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + \sum_{k=1}^n f'\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{n+1-2k}{2n^2(n+1)} \\
 &\quad + \int_{\frac{1}{2n+2}}^{\frac{1}{2n}} f''(t) \left(t - \frac{1}{2n+2}\right) dt + \int_{\frac{2n-1}{2n}}^{\frac{2n+1}{2n+2}} f''(t) \left(\frac{2n+1}{2n+2} - t\right) dt \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n+2}} f''(t) \left(\frac{2k+1}{2n+2} - t\right) dt + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \int_{\frac{2k+1}{2n+2}}^{\frac{2k+1}{2n}} f''(t) \left(t - \frac{2k+1}{2n+2}\right) dt
 \end{aligned}$$

因此, 要证明的结论 $a_{n+1} \geq a_n$ 等价于

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n+2}} f''(t) \left(\frac{2k+1}{2n+2} - t\right) dt + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \int_{\frac{2k+1}{2n+2}}^{\frac{2k+1}{2n}} f''(t) \left(t - \frac{2k+1}{2n+2}\right) dt \\
 &\quad + \int_{\frac{1}{2n+2}}^{\frac{1}{2n}} f''(t) \left(t - \frac{1}{2n+2}\right) dt + \int_{\frac{2n-1}{2n}}^{\frac{2n+1}{2n+2}} f''(t) \left(\frac{2n+1}{2n+2} - t\right) dt \geq \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n+1-2k}{2n^2(n+1)} \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{2n-2k+1}{2n}} f''(x) dx
 \end{aligned}$$

利用 $f''(x)$ 非负递增的特性放缩 (是充要的, 不会放过)

$$\int_{\frac{1}{2n+2}}^{\frac{1}{2n}} f''(t) \left(t - \frac{1}{2n+2}\right) dt + \int_{\frac{2n-1}{2n}}^{\frac{2n+1}{2n+2}} f''(t) \left(\frac{2n+1}{2n+2} - t\right) dt \geq f''\left(\frac{2n-1}{2n}\right) \frac{1}{8n^2(n+1)^2}$$

设 $f''(x) = g(x)$, 则等价于在 $g(x)$ 非负且单调递增的条件下, 证明:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n+2}} g(x) \left(\frac{2k+1}{2n+2} - x\right) dx + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \int_{\frac{2k+1}{2n+2}}^{\frac{2k+1}{2n}} g(x) \left(x - \frac{2k+1}{2n+2}\right) dx + \frac{g\left(\frac{2n-1}{2n}\right)}{8n^2(n+1)^2} \\
 &\geq \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n+1-2k}{2n^2(n+1)} \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{2n-2k+1}{2n}} g(x) dx
 \end{aligned}$$

将不等号右端的项移过来, 拆开, 与左端合并, 然后利用单调性和积分第二中值定理自然放缩即可

比如 $n=2$ 时对应

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} g(x) \left(\frac{1}{2} - x\right) dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} g(x) \left(x - \frac{1}{2}\right) dx + \frac{1}{288} g\left(\frac{3}{4}\right) \geq \frac{1}{24} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} g(x) dx \\
 &\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} g(x) (5-12x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} g(x) (12x-7) dx + \frac{1}{12} g\left(\frac{3}{4}\right) \geq 0
 \end{aligned}$$

利用非负递增性知

$$\begin{aligned}
 & \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} g(x)(5-12x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} g(x)(12x-7)dx + \frac{1}{12}g\left(\frac{3}{4}\right) \\
 & \geq \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} g(x)(12x-7)dx - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} g(x)(12x-5)dx + \frac{1}{12}g\left(\frac{3}{4}\right) \\
 & \geq \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} g(x)(12x-7)dx + \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{3}{4}} g(x)(12x-7)dx - g\left(\frac{1}{2}\right) \int_{\frac{5}{12}}^{\frac{1}{2}} 12x-5dx + \frac{1}{12}g\left(\frac{3}{4}\right) \\
 & \geq \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{3}{4}} g(x)(12x-7)dx - \frac{1}{24}g\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{12}g\left(\frac{3}{4}\right) \geq \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{3}{4}} g(x)(12x-7)dx + \frac{1}{24}g\left(\frac{3}{4}\right) \geq 0
 \end{aligned}$$

从而成立, 一般情况完全同理 (太难算了, 自行完成, 省略), 你也可以思考一下有没有简单方法

8. 当 $r = \frac{\pi}{2}$ 时, 取 $f(x) = \cos x, g(x) = \sin x$ 可知满足题目要求, 从而只需说明对任意 $r \in (0, \frac{\pi}{2})$, 都不存在这样的 $f(x), g(x)$

反证法, 如果存在, 则根据条件可知

$$\begin{aligned}
 |f(x)| &= \left| \int_x^r f'(y)dy \right| \leq \int_x^r |f'(y)|dy \leq \int_x^r |g(y)|dy \\
 &= \int_x^r \left| \int_0^y g'(t)dt \right|dy \leq \int_x^r \int_0^y |g'(t)|dtdy \leq \int_x^r \int_0^y |f(t)|dtdy
 \end{aligned}$$

现在定义 $g_0(x) = |f(x)|, g_{n+1}(x) = \int_x^r \int_0^y g_n(t)dtdy$, 显然 $g_n(x)$ 都是非负且可导的函数, 并且

$$\begin{aligned}
 |f(x)| &\leq \int_x^r \int_0^y |f(t)|dtdy \leq \int_x^r \int_0^y g_0(t)dtdy = g_1(x) \\
 |f(x)| &\leq \int_x^r \int_0^y |f(t)|dtdy \leq \int_x^r \int_0^y g_1(t)dtdy = g_2(x) \\
 &\dots \\
 &\Rightarrow |f(x)| \leq g_n(x), \forall n \geq 0, \forall x \in [0, r]
 \end{aligned}$$

下面证明 $g_n(x)$ 一致收敛到零 (其实点态收敛就可以了), 从而在上式中令 $n \rightarrow \infty$ 有 $f(x) = 0, \forall x \in [0, r]$, 这与 $f(0) > 0$ 矛盾, 得到所求的最小的正数 r 就是 $\frac{\pi}{2}$, 提取出来是这样的问题

引理 12.3.1: 设 $r \in (0, \frac{\pi}{2})$, $f_0(x)$ 在 $(0, r)$ 上黎曼可积, 定义函数列

$$f_{n+1}(x) = \int_x^r \int_0^y f_n(t)dtdy$$

证明: $f_n(x)$ 在 $[0, r]$ 上一致收敛于零.

因为 $f_0(x)$ 黎曼可积, 所以有界, 设 $A \leq f_0(x) \leq B$ 恒成立

根据递推式可知“单调性”, 也即迭代的初值 (两个函数) 如果具有恒成立的大小关系, 那么积分后这个不等号将继续保持, 归纳的可知每一项都会保持这个恒成立的大小关系

换句话说, 如果迭代初值 $f_0(x) \leq g_0(x)$, 那么按照相同的递推得到的 $f_n(x) \leq g_n(x)$ 就会恒成立, 同时显然两个初值如果相差 k 倍, 那么每一项也都是刚好相差 k 倍

所以我们只要证明 $f_0(x) = 1$ 作为初值, 迭代得到的函数列是一致收敛于零的, 那么夹逼表明 $f_n(x)$ 夹在 A 作为初值迭代的第 n 项和 B 作为初值迭代的第 n 项之间, 这两个都是一致收敛于零的, 则中间的 $f_n(x)$ 自然也是

因为 $r < \frac{\pi}{2}$, 所以

$$0 \leq f_0(x) = 1 \leq \frac{\cos x}{\cos r} = g_0(x), \forall x \in [0, r]$$

定义 $g_{n+1}(x) = \int_x^r \int_0^y g_n(t) dt dy$, 则有 $0 \leq f_n(x) \leq g_n(x)$, 现在只要证明 $g_n(x)$ 一致收敛于零

采用归纳法证明: $g_n(x) \leq \frac{(1 - \cos r)^n}{\cos r} \cos x, \forall n \geq 0, x \in [0, r]$

$n = 0$ 时显然成立, 设 n 时成立, 则 $n + 1$ 时

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &\leq \int_x^r \int_0^y \frac{(1 - \cos r)^n}{\cos r} \cos t dt dy \\ &= \frac{(1 - \cos r)^n}{\cos r} \int_x^r \sin y dy = \frac{(1 - \cos r)^n}{\cos r} (\cos x - \cos r) \\ &\leq \frac{(1 - \cos r)^{n+1}}{\cos r} \cos x \\ &\Leftrightarrow (1 - \cos r) \cos x \geq \cos x - \cos r \Leftrightarrow \cos r \cos x \leq \cos r \end{aligned}$$

显然成立, 而 $1 - \cos r \in (0, 1)$, 所以 $g_n(x)$ 在区间 $[0, r]$ 上一致收敛到零

9. 如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{|x|^{\frac{a}{1-a}}} > 0$ 则根据下极限定义, 然后再有限闭区间上找一个 c , 与下极限的值对比, 取一个较小的, 即可完成证明

根据对称性, 只需要证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{\frac{a}{1-a}}} > 0$ 则负无穷处可以同理, 进而得证

令 $g(x) = \int_0^x f(u) du$ 则 $g(x)$ 单调递增且 $g(0) = 0$, 先证明 $g(+\infty) = +\infty$ (因为后面会发现推理的时候需要这个性质, 并且从结论来看这个性质成立是理所应当的, 故我们先证明它)

反证法, 则 $\int_0^\infty f(x) dx$ 收敛, 任意取定一个 $t_0 \geq 0$, 因为反常积分收敛, 所以存在一列 x_n 单调递增趋于正无穷使得 $f(x_n) \rightarrow 0$ 代入条件有

$$f(t_0) + f(x_n) \geq \left| \int_{t_0}^{x_n} f(u) du \right|^a$$

令 $n \rightarrow \infty$ 就有 $f(t_0) \geq \left| \int_{t_0}^\infty f(u) du \right|^a$

换句话说, 对任意 $x \geq 0$ 都有 $f(x) \geq \left| \int_x^\infty f(u) du \right|^a$, 因此令 $h(x) = \int_x^\infty f(u) du$, 则 $h(x)$ 恒正且单调递减趋于零, 满足 $-h'(x) \geq h(x)^a$, 积分有

$$\frac{h'(x)}{h(x)^a} \leq -1, \int_0^\infty \frac{h'(t)}{h(t)^a} dt = \int_{h(0)}^0 \frac{1}{u^a} du = \frac{-h(0)^{1-a}}{1-a} = -\infty$$

于是 $h(0) = \int_0^\infty f(u) du = +\infty$ 矛盾

现在我们证明了 $g(+\infty) = \int_0^\infty f(u) du = +\infty$, 在条件中取 $y = 0$ 有 $g'(x) + f(0) \geq g(x)^a$ 恒成立, 也即

$$\frac{g'(x)}{g(x)^a} \geq 1 - \frac{f(0)}{g(x)^a}$$

则存在 M 使得 $x \geq M$ 时恒有

$$\frac{f(0)}{g(x)^a} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)^a} \geq \frac{1}{2}, \forall x \geq M$$

两边积分有

$$\begin{aligned}
 \int_M^x \frac{g'(t)}{g(t)^a} dt &= \int_{g(M)}^{g(x)} \frac{1}{u^a} du = \frac{g(x)^{1-a} - g(M)^{1-a}}{1-a} \geq \frac{1}{2}(x-M) \\
 \Rightarrow g(x)^{1-a} &\geq \frac{1}{2}(1-a)(x-M) + g(M)^{1-a} = \lambda x + \mu, \lambda, \mu > 0 \\
 \Rightarrow g(x) &\geq (\lambda x + \mu)^{\frac{1}{1-a}}, \forall x \geq M \\
 \Rightarrow f(x) = g'(x) &\geq g(x)^a - f(0) \geq (\lambda x + \mu)^{\frac{a}{1-a}} - f(0) \\
 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{\frac{a}{1-a}}} &= \lambda^{\frac{a}{1-a}} > 0
 \end{aligned}$$

结论得证

12.4 第五章习题答案

1. 见例题 4.2.2

2. 反证法, 不妨设一列 x_n 单调递减趋于零, 满足 $g'(x_n) \geq \delta > 0$, 并且对任意 x 成立 $|g''(x)| < \frac{1}{x^r}$. 待定一个 $t > 0$, 在每一个区间 $[x_n - t, x_n]$ 中考虑问题, 此时有

$$|g''(x)| \leq \frac{1}{x^r} \leq \frac{1}{(x_n - t)^r}, g'(x_n) \geq \delta \Rightarrow g'(x) \geq g'(x_n) - \frac{x_n - x}{(x_n - t)^r} \geq \delta - \frac{t}{(x_n - t)^r}$$

$$g(x_n) - g(x_n - t) \geq t \left(\delta - \frac{t}{(x_n - t)^r} \right), \frac{g(x_n)}{x_n^r} \geq \frac{g(x_n - t)(x_n - t)^r}{(x_n - t)^r x_n^r} + \frac{t}{x_n^r} \left(\delta - \frac{t}{(x_n - t)^r} \right)$$

然后取 $t = \frac{1}{2}\delta x_n^r$ 是一个与 n 有关的正数 (不同的 x_n 对应不同区间), 代入有

$$\frac{g(x_n)}{x_n^r} \geq \frac{g(x_n - \frac{1}{2}\delta x_n^r)}{(x_n - \frac{1}{2}\delta x_n^r)^r} \left(1 - \frac{1}{2}\delta x_n^{r-1} \right) + \frac{1}{2}\delta \left(\delta - \frac{\delta}{2(1 - \frac{1}{2}\delta x_n^{r-1})^r} \right)$$

再令 $n \rightarrow \infty$, 则左边趋于零, 右边趋于正数 $\frac{1}{4}\delta^2$, 矛盾

3. 本题的方法完全一样, 最后结论是 $a > 1$ 结论不一定成立, 而 $a \in (0, 1]$ 时都有 $f'(+\infty) = 0$

4. 做法完全同上

5. 第一问: 采用反证法

则存在一列 $x_n \rightarrow \infty$ 使得 $f(x_n) \geq \delta > 0$, 因为 $\int_0^\infty f(x) dx < \infty$, 故存在一列 $y_n \rightarrow \infty$ 使得 $f(y_n) \rightarrow 0$,

因为 $\int_0^\infty g(x) dx$ 收敛, 则存在 $M > 0$ 使得任意 $a, b > M$ 都有 $\int_a^b g(x) dx < \frac{\delta}{4}$

于是可以取一个 x_i, y_j 使得 $x_i > y_j > M, f(y_j) \leq \frac{\delta}{2}$, 由 $f'(x) \leq g(x)$ 积分得到 $\frac{\delta}{2} \leq f(x_i) - f(y_j) \leq \frac{\delta}{4}$ 矛盾

第二问: 采用反证法

则存在一列 $x_n \rightarrow \infty$ 使得 $f(x_n) \geq \delta > 0$, 于是对 $x < x_n$ 有

$$f(x) = f(x_n) + f'(\xi)(x - x_n) \geq \delta - C(x_n - x)$$

进而

$$\int_{x_n - \frac{\delta}{C}}^{x_n} f(x) dx \geq \int_{x_n - \frac{\delta}{C}}^{x_n} \delta - C(x_n - x) dx = \frac{\delta^2}{2C}$$

显然我们一开始就可以不妨设 $x_{n+1} - x_n \geq \frac{\delta}{C}$, 于是上式对 n 求和表明 $\int_0^\infty f(x) dx$ 发散, 矛盾

第三问: 采用反证法

则存在一列 $x_n \rightarrow \infty$ 使得 $f(x_n) = \delta > 0$ (显然能办到, 并且如此方便后续书写), 不妨设 $x_{n+1} - x_n > \frac{\delta^{1-p}}{C}$

根据几何意义, 我们直接证明: 对任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 以及 $x \in [x_n - \frac{\delta^{1-p}}{C}, x_n]$, 都有 $f(x) \geq \delta - C\delta^p(x_n - x)$

如此便可得到 $f(x)$ 总在对应的线段上方, 而这个线段围成的面积 $\frac{\delta^{2-p}}{2C}$ 是与 n 无关的常数, 从而必有 $\int_0^\infty f(x) dx = +\infty$, 即可导出矛盾 (从而原命题得证), 以下继续采用反证法

则存在 $a \in \left(x_n - \frac{\delta^{1-p}}{C}, x_n\right)$ 使得 $f(a) < \delta - C\delta^p(x_n - a)$

根据连续性, 则 $f(x) < \delta - C\delta^p(x_n - x)$ 在 $x = a$ 的邻域内成立, 考虑最大的区间, 令

$$t_0 = \sup \{t \in [a, x_n] | f(x) < \delta - C\delta^p(x_n - x), \forall x \in (a, t)\}$$

则 $a < t_0 \leq x_n$, 并且 $f(t_0) = \delta - C\delta^p(x_n - t_0)$, 同时任意 $x \in [a, t_0]$ 有 $f(x) \leq \delta - C\delta^p(x_n - x)$

根据中值定理有 $\frac{f(t_0) - f(a)}{t_0 - a} = f'(\xi) \leq C f^p(\xi) \leq C \delta^p$, 再根据几何意义可得

$$\frac{f(t_0) - f(a)}{t_0 - a} \geq \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} > \frac{f(x_n) - f\left(x_n - \frac{\delta^{1-p}}{C}\right)}{x_n - \left(x_n - \frac{\delta^{1-p}}{C}\right)} = C \delta^p$$

从而矛盾, 结论得证 (最后几何意义部分也可以直接代入相关的等式, 计算导出矛盾)

注: 这是 24 年暑假写的答案了, 如今熟练掌握这种问题处理手法后, 完全可以更快的解决问题

6. 不妨设 $\lambda \geq 0$, 若不然考虑函数 $-f(x)$, 则可以把 λ 变成 $-\lambda$, 先假定 $\lambda \geq 0$

根据上下极限版洛必达法则知

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\lambda x} f'(x)}{e^{\lambda x}} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{\lambda x} f'(x))'}{\lambda e^{\lambda x}} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{C e^{\lambda x}}{\lambda e^{\lambda x}} = \frac{C}{\lambda}$$

这说明 $f'(x)$ 有上界, 我们只需再证明 $f'(x)$ 有下界, 则可以说明 $f''(x)$ 有上界, 化为 $\lambda = 0$ 情况

根据条件设 $f''(x) + \lambda f'(x) \leq C$, 其中 $C > 0$, 则有

$$(e^{\lambda x} f'(x))' = e^{\lambda x} (f''(x) + \lambda f'(x)) \leq C e^{\lambda x}$$

于是对任何区间 $[a, b]$ 和任意 $x \in [a, b]$ 有

$$\begin{aligned} (e^{\lambda x} f'(x))' &\leq C e^{\lambda b} \Rightarrow e^{\lambda x} f'(x) \leq e^{\lambda a} f'(a) + C e^{\lambda b} (x - a) \\ &\Rightarrow e^{\lambda(x-a)} f'(x) \leq f'(a) + C e^{\lambda(b-a)} (x - a) \leq f'(a) + C e^{\lambda(b-a)} (b - a) \end{aligned}$$

由此可见, 若对于很大的 a , $f'(a)$ 是非常小的负数 (绝对值很大), 则在 a 右端一个较大的区间内 $f'(a) + C e^{\lambda(b-a)} (b - a)$ 都是很小的负数, 容易看出 $f'(x)$ 也会在 $x = a$ 右端一个较长 (至少长度不趋于零) 的区间内一直是很小的负数, 积分一下即可得到 $f(x)$ 振荡, 所以不可能成立 $f(x) \rightarrow 0$ (直观理解, 过程也容易书写, 自行完成)

至此, 说明了 $f'(x)$ 有界并且 $f''(x)$ 有上界, 总之只需要对 $\lambda = 0$ 验证, 此时条件限制了 $f'(x)$ 的增长速度, 因此若一列 $x_n \rightarrow \infty$ 使得 $f'(x_n) \geq \delta > 0$, 则看 x_n 左端可知 $f'(x)$ 在左侧一个较长的区间内都 $\geq \frac{\delta}{2}$, 与 $f(x) \rightarrow 0$ 矛盾, 同理若一列 $x_n \rightarrow \infty$ 使得 $f'(x_n) \leq -\delta$, 则考虑 x_n 右侧的区间, 同理可知矛盾, 综上得证

注: 本题证明方法不唯一, 比如使用泰勒公式也可以完成, 另外不用上下极限版本的洛必达法则, 单纯走“语文类性态分析”的方法, 一样可以证明本题, 算上前面这个, 至少有三种解法

7. 第一问, 根据条件可以看出来 $g(x)$ 良定义, 显然 $g(x)$ 单调递增, 如果不是左连续的, 设 $g(x_0) = A$ 并且 $g(x_0^-) = B < A$, 则意味着 $f(x)$ 在 $[0, x_0)$ 中恒成立 $f(x) \leq B$, 显然 $f(x_0) = A$, 至此可以看出 $f([0, x_0])$ 既不是单点集, 也不是闭区间, 矛盾, 至于不右连续, 可以考虑

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0] \\ \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0] \\ 1, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

第二问, 条件表明 $h(x)$ 良定义且显然单调递增, 如果不是左连续的, 则意味着上确界在某点“跳跃递增”, 比如设 $h(1) = 2, h(1^-) = 1$, 那么后者表明 $f(x)$ 在 $[0, 1)$ 中恒 ≤ 1 , 于是这意味着 $h(1)$ 也就是计算上确界, 也应该不超过 1, 矛盾

8. 考虑 $g(x) = f(x) - f(0)$, 则 $g(x), g(x^2)$ 也是连续周期函数且 $g(0) = 0$, 我们要证明 $g(x)$ 恒为零

记 $h(x) = g(x^2)$, 根据条件, 设 $g(x), h(x)$ 的周期分别为 T_1, T_2 , 这里 $T_1 > 0, T_2 > 0$

显然 $h(0) = 0$, 只需证 $h(x)$ 在 $x > 0$ 时恒为零, 进而 $g(x)$ 在 $x \geq 0$ 时恒为零, 利用周期性可知 $g(x)$ 恒为零

反证法, 设 $u > 0$ 使得 $h(u) \neq 0$, 因为 $h(x)$ 连续, 所以存在 u 的一个邻域 (a, b) 使得 $h(x)$ 在 (a, b) 中没有零点, 这里 $a, b > 0$, 根据周期性可知, 对任意正整数 m, n 有

$$h(\sqrt{mT_1} - nT_2) = h(\sqrt{mT_1}) = g(mT_1) = g(0) = 0$$

所以只需要证明存在正整数 m, n 使得

$$\sqrt{mT_1} - nT_2 \in (a, b) \Leftrightarrow m \in \left(\frac{(a + nT_2)^2}{T_1}, \frac{(b + nT_2)^2}{T_1} \right)$$

显然当 $n \rightarrow \infty$ 时, 区间长度

$$\frac{(b + nT_2)^2}{T_1} - \frac{(a + nT_2)^2}{T_1} = \frac{2nT_2(b - a) + b^2 - a^2}{T_1} \rightarrow \infty$$

因此取充分大的正整数 n 使得上述区间长度大于 1, 然后取 m 为这个区间内的正整数即可导出矛盾, 结论得证

9. 反证法, 则意味着存在正数 δ 以及充分大的 M , 使得任意 $x > M$ 都有 $|f(x+a) - f(x)| > \delta$ (可以这么理解: 所谓存在一个这样的子列, 就是说这个函数取绝对值之后, 下极限是零, 那么反证法, 下极限为正数, 自然就会在 $x > M$ 充分大时候有一个正的下界了), 然后累加, 显然 $f(x)$ 不会有界, 矛盾

12.5 第六章习题答案

1. 对应的积分方程是

$$\begin{aligned} f(t; t_0, x_0, \mu) &= \int_{t_0}^t \cos(\mu s f(s; t_0, x_0, \mu)) ds + x_0 \\ \frac{\partial f}{\partial t_0}(t; t_0, x_0, \mu) &= \int_{t_0}^t -\mu s \sin(\mu s f(s; t_0, x_0, \mu)) \frac{\partial f}{\partial t_0}(s; t_0, x_0, \mu) ds - \cos(\mu t_0 x_0) \\ z &= \frac{\partial f}{\partial t_0}, \frac{dz}{dt} = -\mu t \sin(\mu t f) z, z(t_0) = -\cos(\mu t_0 x_0) \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t_0} &= -\cos(\mu t_0 x_0) e^{-\mu \int_{t_0}^t s \sin(\mu s f(s; t_0, x_0, \mu)) ds} \end{aligned}$$

其余两个也是一样的做法, 最后解出来 $\frac{\partial f}{\partial x_0} = e^{-\mu \int_{t_0}^t s \sin(\mu s f(s; t_0, x_0, \mu)) ds}$ 以及

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = -e^{-\mu \int_{t_0}^t s \sin(\mu s f(s; t_0, x_0, \mu)) ds} \int_{t_0}^t s f(s; t_0, x_0, \mu) \sin(\mu s f(s; t_0, x_0, \mu)) e^{\mu \int_{t_0}^s r \sin(\mu r f(r; t_0, s_0, \mu)) dr} ds$$

代入, 最终结果为 $\frac{\partial f}{\partial t_0}|_{\mu=0} = -1, \frac{\partial f}{\partial x_0}|_{\mu=0} = 1, \frac{\partial f}{\partial \mu}|_{\mu=0} = 0$

2. 显然 $x(t; 0, 0) \equiv 0$ 是初值问题 $\frac{dx}{dt} = \sin(tx), x(0) = 0$, 的唯一解

求解初值问题 $\frac{dz}{dt} = tz, z(0) = 0$, 得 $\left. \frac{\partial x}{\partial t_0}(t; t_0, x_0) \right|_{t_0=0, x_0=0} = 0$.

求解初值问题 $\frac{dz}{dt} = tz, z(0) = 1$, 得 $\left. \frac{\partial x}{\partial x_0}(t; t_0, x_0) \right|_{t_0=0, x_0=0} = e^{\frac{t^2}{2}}$

求解初值问题 $\frac{dz}{dt} = t \cos(t\varphi(t, \eta))z, z(0) = 1$, 得 $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(t, \eta) = \exp\left(\int_0^t \tau \cos(\tau\varphi(\tau, \eta)) d\tau\right)$.

因此恒有 $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(t, \eta) > 0$.

3. 原方程等价于求解 $y' = \pm\sqrt{4-y^2}$.

在任何区间 $(a, b) \subseteq (-\infty, +\infty)$ 和任何常数 $C \in \mathbb{R}$, 易见 $y = \pm 2$ 以及 $y = 2\sin(x+C)$ 均满足 $y' = \pm\sqrt{4-y^2}$.

另一方面, 设 $x_0 \in \mathbb{R}$. 若 $|y(x_0)| = 2$, 则 $y'(x_0) = 0$. 若 $|y(x_0)| < 2$, 则由连续性, 有 $\delta > 0$, 使得在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内 $|y(x)| < 2$. 进而在该区间内 $y'(x) \neq 0$. 由微分 Darboux 定理, 可知 $y'(x)$ 在此区间内恒正或恒负. 进一步, 设 (α, β) 是包含 x_0 的使得 $y'(x)$ 恒正或恒负的最大区间 (不排除 α, β 有可能是 $(-\infty, +\infty)$). 若 $y'(x_0) > 0$, 则 $y'(x) = \sqrt{4-y^2}, x \in (\alpha, \beta)$.

解得 $\arcsin \frac{y}{2} = x - x_0 + \arcsin \frac{y(x_0)}{2}, x \in (\alpha, \beta)$. 从而 $y = 2\sin(x+C), x \in (\alpha, \beta)$,

其中 $C = \arcsin \frac{y(x_0)}{2} - x_0$. 由此可见 $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$. 此时由 (α, β) 的最大性, 必然有 $|y(\alpha)| = |y(\beta)| = 2$, 即 $y'(\alpha) = y'(\beta) = 0$. 结合 y' 在 (α, β) 内恒正得到 $\beta - \alpha = \pi$. 此时可以重写 y 的表达式为 $y(x) = -2\cos(x - \alpha), x \in (\alpha, \alpha + \pi)$.

类似地, 若 $y'(x_0) < 0$, 则有 $\beta = \alpha + \pi, y(x) = 2\cos(x - \alpha), x \in (\alpha, \alpha + \pi)$.

易见, y 的严格单增区间和严格单减区间是交替出现的. 一般地, 可得开集 $\{x \in \mathbb{R} | y(x) < 2\}$ 是一列两两不交的长度为 π 的区间的并, 其中 y 的严格单增区间和严格单减区间是交替出现. 为清晰起见, 按如下方式写出 y 所有可能的表达式.

情形 1: y 没有严格单调区间. 此时, $y \equiv 2$ 和 $y \equiv -2$. 情形 2: y 至少有一个严格单调区间. 此时, 有 $\varepsilon = \pm 1, -\infty \leq \ell \leq m \leq +\infty$ 以及相应的 $\{a_k\}_\ell^m$ 满足 $a_{k+1} - a_k \geq \pi (\ell \leq k \leq m-1)$, 使得

$$y(x) = 2\varepsilon \begin{cases} (-1)^{k+1} \cos(x - a_k), & x \in (a_k, a_k + \pi), \ell \leq k \leq m, \\ (-1)^k, & a_k + \pi \leq x \leq a_{k+1}, \ell \leq k \leq m-1, \\ (-1)^{\ell-1}, & x \leq a_\ell. \\ (-1)^m, & x \geq a_m + \pi, \end{cases}$$

其中, 上式中的后两种情形分别对应 $\ell > -\infty$ 和 $m < +\infty$ 时出现.

另一方面, 上述给出的函数满足题设条件. 因此我们找到了满足题设条件的所有函数.

注: 本题是 14 届 CMC 决赛压轴题, 核心想法就是只要导数在某点非零, 那么就会在邻域内恒正或者恒负, 则邻域内可以准确解出来 $y'(x)$, 并且端点值也是一个 2 一个 -2, 因为单调, 进而在这个区间 (长度也是定的) 内, $y(x)$ 表达式就解出来了, 于是得到全部解, 注意导数为零的时候可能是一点为零也可能是一个区间内恒为零, 所以才会有多种情况, 当然还有一些细节需要说明

本题千万不能形式求解得到常值函数和三角函数两个答案, 这样做考试 10 分当年只给了 1 分

4. 反证法, 则某点 $x_0 \in (a, b]$ 满足 $z(x_0) > y(x_0)$, 考虑这个不等式关系恒成立的最大区间, 则不妨设对任意 $x \in (a, x_0)$ 都有 $z(x) > y(x)$, 于是 $y'(x) = f(x, y(x)) \geq f(x, z(x)) = z'(x)$, 说明 $y - z$ 单调递增, 显然是矛盾的

5. 根据条件, $f(x)$ 单调递增并且非负, 反证法, 设某个 x_0 使得 $f(x_0) > 0$, 则对任意 $x \geq x_0$ 都有 $f'(x) = f(f(x)) \geq f(f(x_0))$, 先证明 $f(f(x_0)) > 0$

若不然, $f(f(x_0)) = 0$, 因为 $f(x_0) > 0$ 以及单调性, 所以 $f(x_0) < x_0$, 故存在 $y \in (f(x_0), x_0)$ 使得 $f'(y) > 0$ (中值定理), 则 $f'(y) = f(f(y)) \leq f(f(x_0)) = 0$ 矛盾

设 $a = f(f(x_0)) > 0$, 则 $x \geq x_0$ 时 $f'(x) \geq a$, 所以 $f(x)$ 单调递增趋于正无穷, 并且 $x \geq x_0$ 时有 $f(x) \geq f(x_0) + a(x - x_0)$, 显然存在 $M > x_0$ 使得 $x \geq M$ 时恒有 $f(x) \geq x_0$, 于是 $x \geq M$ 时有 $f'(x) = f(f(x)) \geq f(x_0) + a(f(x) - x_0)$, 进而当 $x > M$ 充分大时有 $f'(x) > \frac{a}{2}f(x)$, 这表明 $f(x)$ 的增长速度至少是指数级的

但是从 $f'(x) = f(f(x)), x \geq M$, 除过来积分可知, $\int_{f(M)}^{+\infty} \frac{1}{f(x)} dx = +\infty$, 矛盾

6. 容易看出 x_n 严格单调递增, 若 x_n 有界, 则极限存在, 对应的方程是 $x = x + g(x)$, 于是 $g(x) = 0$ 与 $g(x)$ 恒正矛盾, 所以 x_n 严格单调递增趋于正无穷

根据条件, 显然 $\frac{1}{g(x)}$ 单调递增, 考虑几何意义有

$$\int_n^{n+1} \frac{p'(x)}{g(p(x))} dx = \int_{p(n)}^{p(n+1)} \frac{1}{g(u)} du = 1, 1 = \frac{x_{n+1} - x_n}{g(x_n)} \leq \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{1}{g(u)} du$$

所以如果 $p(n) \leq x_n$, 则 (几何意义) 一定有 $p(n+1) \leq x_{n+1}$, 因为初值成立 $p(0) \leq x_0$ 所以 $p(n) \leq x_n$ 恒成立 进一步由单调性得到 $x_{n+1} = x_n + g(x_n) \leq x_n + g(p(n))$, 所以

$$\begin{aligned} x_n - x_0 &\leq g(p(0)) + g(p(1)) + \dots + g(p(n-1)) \leq g(x_0) + \int_0^{n-1} g(p(x)) dx \\ &= g(x_0) + \int_0^{n-1} p'(x) dx = g(x_0) + p(n-1) - p(0) \leq p(n) + g(x_0) - x_0 \end{aligned}$$

这说明 $p(n) \leq x_n \leq p(n) + g(x_0)$, 结论得证

7. 首先, 如果区间 $[a, b] \subset [0, 1]$ 满足 $g(a) = g(b) = 0$ 且 $g(x)$ 在 (a, b) 中没有零点, 则根据条件可知存在常数 k 使得 $f(x) = kg(x)$ 对任意 $x \in [a, b]$ 恒成立, 进而 $f'(x) = kg'(x)$, 于是 $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$, 因此一旦 $g'(a) = 0$ 或者 $g'(b) = 0$, 那么 a 或者 b 即为所求

考虑集合 $A = \{x \in (0, 1) | g(x) = 0\}$, 下面开始分类讨论

如果存在 $x_0 \in A$ 使得在 x_0 右端的任一小区间 $(x_0, x_0 + \delta) \subset (0, 1)$ 中, $g(x)$ 都既有等于零的点也有不等于零的点, 则可以证明 x_0 为所求:

这是因为, 条件表明 x_0 是 $g(x)$ 零点的聚点, 并且可导, 所以 $g(x_0) = g'(x_0) = 0$, 然后看 $f(x)$, 注意 $g(x)$ 一会取零一会非零, 对任何一个非零点 (夹在两个零点之间), 考虑最大的非零区间, 则这个区间的两个端点都是 $f(x)$ 的零点 (理由同前面), 进而 x_0 也是 $f(x)$ 零点的聚点, 所以 x_0 满足要求

至此我们得到: 如果 $g(x_0) = 0$, 并且在任一邻域 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内 $g(x)$ 都一会取零一会不取零, 或者在任一邻域 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内 $g(x)$ 都一会取零一会不取零, 则 x_0 为所求

现在采用反证法, 假设题中的 a 不存在, 则意味着只要 $g(x_0) = 0$, 便存在 $\delta > 0$ 使得 $g(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 中恒为零或没有零点, 同时 $g(x)$ 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 中也是恒为零或没有零点

排列组合一下一共四种情况, 如果 $g(x)$ 在 x_0 两端小区间内, 一个是恒为零的一个是恒非零的, 那么显然 $g(x_0) = g'(x_0) = 0$, 然后看那个恒非零的区间, 显然存在 k 使得 $f(x) = kg(x), f'(x) = kg'(x)$, 代入 $x = x_0$ 便有 $f(x_0) = f'(x_0) = 0$, 故 x_0 满足题目条件, 矛盾

因此只要 $x_0 \in (0, 1)$ 使得 $g(x_0) = 0$, 则要么 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 的某一邻域内恒为零, 要么 x_0 是孤立的零点, 换句话说: 对任意 $x_0 \in A$, 要么 x_0 是内点, 要么是孤立点, 然后分类讨论:

(i). 显然 A 非空, 否则由最开始的讨论知道 $f(x) = kg(x)$ 线性相关, 矛盾

(ii). 如果集合 A 只有孤立点, 则 A 是有限点集也即 $g(x)$ 只有有限个零点, 因此可以将 $[0, 1]$ 划分为有限个 (至少两个) 闭区间 $[0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{n-1}, a_n], [a_n, 1]$, 其中 $g(a_1) = \dots = g(a_n) = 0$ 使得每个区间内都有 k_i 使得 $f(x) = k_i g(x)$, 注意条件线性无关, 则不可能这些 k 都相同, 故存在某两个相邻的闭区间, 使得它们对应的 k 不同, 不妨

$$\begin{aligned} f(x) &= k_1 g(x), x \in [0, a_1], f'(x) = k_1 g'(x) \\ f(x) &= k_2 g(x), x \in [a_1, a_2], f'(x) = k_2 g'(x) \\ \Rightarrow f'(a_1) &= k_1 g'(a_1) = k_2 g'(a_1), k_1 \neq k_2 \end{aligned}$$

由此可见 a_1 满足题目要求, 导致矛盾

(iii). 如果集合 A 有内点 x_0 , 则考虑在 x_0 附近使得 $g(x)$ 恒为零的最大区间, 我们记为 $[r, s]$, 显然不能 $r = 0, s = 1$ (这样的话 $g(x)$ 恒为零, 线性相关, 矛盾), 于是不妨设 $s < 1$, 则 $s \in A$ 并且很明显 s 既不是内点也不是孤立点, 矛盾

综上, 结论得证

8. 反证法, 假设解向右不能延拓到 b , 设最大存在区间 (向右) 为 $b_0 < b$, 则区间内 (注意是闭区间) $A(x), B(x)$ 都有界, 设上界为 M , 于是 $|y'(x)| = |f(x, y(x))| \leq A(x)|y(x)| + |B(x)| \leq M|y(x)| + M$, 这个条件就表明了 $y(x)$ 有界, 故矛盾 (因为解不能延拓到区间端点, 就意味着在 b_0 左侧附近一定无界)

有界可以这样子证:

$$\begin{aligned} |y'(x)| &\leq M(|y(x)| + 1), |y(x)y'(x)| \leq My^2(x) + M|y(x)| \\ (e^{-2Mx}y^2(x))' &= 2e^{-2Mx}(y(x)y'(x) - My^2(x)) \leq 2Me^{-2Mx}|y(x)| \\ u(x) = e^{-2Mx}y^2(x) &\geq 0, u'(x) \leq 2Me^{-Mx}\sqrt{u(x)} \leq 2Me^{-Mb}\sqrt{u(x)} \end{aligned}$$

这说明 $\sqrt{u(x)}$ 的增长速度是受限制的, 容易看出 $u(x)$ 有界, 所以 $y(x)$ 有界

12.6 第七章习题答案

1. 将 $f(x_1, \dots, x_n)$ 看成关于 x_1 的一元多项式, 利用带余除法有

$$f(x_1, \dots, x_n) = k(x_1, \dots, x_n)(x_1 - x_2) + r(x_2, \dots, x_n)$$

根据反对称性, 令 $x_1 = x_2$ 则 $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ 恒成立, 于是 $r(x_2, \dots, x_n) = 0$, 这说明 $x_1 - x_2 | f(x_1, \dots, x_n)$, 同理可知任意 $x_i - x_j$ 都整除 $f(x_1, \dots, x_n)$, 故存在多项式 $g(x_1, \dots, x_n)$ 使得

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

显然 $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$ 是反对称多项式, 根据定义可知 $g(x_1, \dots, x_n)$ 是对称多项式

2. 同例题可知, 只有 $x^5 + x + 1$ 可以因式分解, 其余的都不行

3. 如果证明了对任意 k , 当 $f_k(x) = x^k$ 时结论都成立, 也即存在次数不超过 $k+1$ 的多项式 $F_k(x)$ 使得 $F_k(n) = f_k(0) + f_k(1) + \dots + f_k(n-1)$, 那么对于一般的 $f(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$, 自然的 $F(x) = a_m F_m(x) + \dots + a_1 F_1(x) + a_0 F_0(x)$ 就满足要求, 因为从定义看出其次数不超过 $m+1$

现在只需说明: 对任意 m , $1^m + 2^m + \dots + n^m$ 可以写成关于 n 的次数不超过 $m+1$ 的多项式

采用归纳法, 显然 $m=0, 1$ 时结论成立 (等差数列求和公式), 假设对于 $0, 1, \dots, m-1$ 时结论都成立, 则 m 时

$$\begin{aligned} (n+1)^{m+1} - n^{m+1} &= C_{m+1}^1 n^m + C_{m+1}^2 n^{m-1} + \dots + C_{m+1}^{m+1} \\ \Rightarrow (n+1)^{m+1} - 1^{m+1} &= \sum_{k=1}^n (C_{m+1}^1 k^m + C_{m+1}^2 k^{m-1} + \dots + C_{m+1}^{m+1}) \\ &= C_{m+1}^1 F_m(n) + C_{m+1}^2 F_{m-1}(n) + \dots + F_0(n), \deg F_i(x) \leq i+1 \end{aligned}$$

因此

$$F_m(x) = \frac{(x+1)^{m+1} - 1 - (C_{m+1}^2 F_{m-1}(x) + \dots + F_0(x))}{m+1}$$

满足要求, 得证

4. 如果可约, 则存在整系数多项式 $g(x), h(x)$ 使得

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) + 1 = g(x)h(x) \Rightarrow g(a_i)h(a_i) = 1$$

所以对任意 a_i 都有 $g(a_i) = h(a_i)$, 也即多项式 $g(x) - h(x)$ 在 $a_1, \dots, a_n$ 处均为零, 注意 $g(x) - h(x)$ 的次数不超过 $n-1$, 所以 $g(x) = h(x)$

也就是说, 如果可约, 则一定是某个多项式的平方, 故此时 $n = 2m$ 是偶数, 并且 $f(x) = g(x)^2, g(x)$ 在 $a_1, \dots, a_{2m}$ 这些点中, 有 m 个点取值 1 也有 m 个点取值 -1

注意 $a_i - a_j | g(a_i) - g(a_j), g(a_i) - g(a_j) = 0, \pm 2$, 因此只要 $g(a_i) \neq g(a_j)$, 就一定有 $|a_i - a_j| \leq 2$, 所以当 $m \geq 3$ 时枚举, 排列组合容易看出不管 a_i 怎样取, 都会有矛盾

综上, 可约当且仅当 $n = 2, 4$, 此时容易验证确实是能因式分解为完全平方的

5. 不妨设 $k = \frac{1}{2}$, 则 $f(x)$ 所有的复根实部都小于零, 因此可以设

$$f(x) = (x + x_1)^{r_1} \dots (x + x_k)^{r_k} (x^2 + a_1 x + b_1)^{s_1} \dots (x^2 + a_m x + b_m)^{s_m}, x_i, a_i > 0$$

如果看到对于每一个因子, 在 $\frac{1}{2}$ 处的取值都会比 $-\frac{1}{2}$ 处的大, 所以不等式成立

6. 等价于问什么时候 $x^4 + x^2 + 1 | (x^6 + x^4)^n - x^{4n} - x^6$, 也就是说只要 $x^6 = 1, x \neq \pm 1$ 就有

$$(x^6 + x^4)^n - x^{4n} - x^6 = (-1)^n x^{2n} - x^{4n} - 1 = 0$$

按照 mod 6 分类, 容易得到当且仅当 $n = 6k \pm 1$ 时候满足条件, 所以 n 最小值是 2021

7. 根据条件, $f(10) = p$ 是素数, 如果可约, 设 $f(x) = g(x)h(x)$, 则不妨 $|g(10)| = 1, |h(10)| = p$, 这里 $g(x), h(x)$ 都是整系数多项式

条件给出了系数的约束, 所以自然对根有约束, 希望证明 $f(x)$ 所有根都是 $|z - 10| = 1$ 这个圆外面, 那么 $|g(10)| > 1$ 导出矛盾

但是对任何一个根 x , 自然的放缩

$$|x|^n \leq |a_n x^n| = |a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0| \leq 9(1 + |x| + \dots + |x|^{n-1}) = 9 \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1}$$

只能得到 $|x| \leq 10$, 没什么用处, 所以考虑配对, 估计的更精确一些, 如果 $Re|x| \geq 9$ 是根, 则

$$\begin{aligned} |a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1}| &= |a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0| \leq 9(1 + |x| + \dots + |x|^{n-2}) = 9 \frac{|x|^{n-1} - 1}{|x| - 1} \\ |x| \leq |a_n x + a_{n-1}| &\leq \frac{9}{|x|^{n-1}} \frac{|x|^{n-1} - 1}{|x| - 1} < \frac{9}{|x| - 1} \Rightarrow |x|(|x| - 1) < 9 \end{aligned}$$

这显然矛盾, 结论得证

12.7 第八章习题答案

1.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \mathbf{I}_2^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

由降阶公式得到

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= |\mathbf{I}_2|^{-1} \begin{vmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{I}_2 + \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \end{vmatrix} \\ &= (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i \begin{vmatrix} 1 - \frac{n}{2} & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \\ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i & 1 - \frac{n}{2} \end{vmatrix} \\ &= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left((n-2)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \right). \end{aligned}$$

注：实际上不需要 a_i 非零的条件，因为左右都是多项式，可以摄动法

2. 相邻行作差有

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} (n-1) 2^{n-2}. \end{aligned}$$

3. 矩阵分解并利用降阶公式有

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_n & \end{vmatrix} \left| I + \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \vdots \\ \frac{n}{a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right| = a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{i}{a_i} \right)$$

4. 矩阵可以分解为 $xI - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$, 由此易知答案为 $x^n + \frac{n^4 - n^2}{12}x^{n-2}$

5. 设 $n = 2020$, $f(x)$ 的根为 $x_1, \dots, x_n$, 则对每一个 x_k , 相应的 $g(x), h(x)$ 是剩下 $n-1$ 个根中选取若干个, 对应的一次式子 $x - x_i$ 的乘积, 因此它们的第二项系数, 都是这些根中若干个根的求和, 也就是说对每一个 x_k , 都可以把剩下的根分为两组, 使得这两组之和相等

移项, 则等价于线性方程组 $Ax = 0$, 这里 A 的对角线全是 0, 其余位置均为 ± 1 , x 就是各个 x_k 构成的向量, 模 2 考虑, 显然 $|A|$ 盒对角线全 0, 其余位置全是 1 的矩阵的行列式同奇偶, 而 $n = 2020$ 是偶数, 所以用降阶公式可知, 那个矩阵的行列式是奇数, 因此 A 可逆, 故 $x = 0$, 也即所有根均为零, 得到 $f(x) = x^n$

6. 根据定义, 一直算下去有

$$A_1\alpha_1 = 0, A_2\alpha_2 = \begin{pmatrix} A_1 \\ \alpha_1^T \end{pmatrix} \alpha_2 = 0 \Rightarrow A_1\alpha_2 = 0, \alpha_1^T \alpha_2 = 0$$

$$A_3\alpha_3 = \begin{pmatrix} A_1 \\ \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \end{pmatrix} \alpha_3 = 0 \Rightarrow A_1\alpha_3 = \alpha_1^T \alpha_3 = \alpha_2^T \alpha_3 = 0, \dots$$

可以看出这些向量之间是两两垂直的, 如果把 A_1 也看成一个向量 α_0 , 则假如 $r \geq n+1$, 就是说 $A_n\alpha_n = 0, \alpha_n \neq 0$, 这样就会导致出现 $n+1$ 个两两垂直的非零向量, 注意这种向量肯定是线性无关的, 因此就出现了 $n+1$ 个线性无关的向量, 矛盾

7. 将 A, B 换成 $A+tI, B+tI$, 则特征多项式依旧相同, 并且 $(A+tI)M = M(B+tI)$, 因此利用摄动法, 可以不妨设 A, B 均可逆, 于是

$$|A - MX| = |A| |I - A^{-1}MX| = |B| |I - MB^{-1}X| = |I - XMB^{-1}| |B| = |B - XM|$$

8. 当 A 是可逆矩阵时, 可设 $A^{-1}BA = C$, 则 $BA = AC$, 容易得到 $\det(A_1, \dots, BA_i, \dots, A_n) = c_{ii} \det A$ 因此

$$\det(BA_1, A_2, \dots, A_n) + \dots + \det(A_1, A_2, \dots, BA_n) = \det(A) \cdot \text{tr}(C) = \det(A) \cdot \text{tr}(B)$$

若 A 不可逆, 采用摄动法. $\det(A+tE)$ 的零点只有有限个, 于是 $\exists \delta > 0$ 使得 $A+tE$ 在 $t \in (0, \delta)$ 时为可逆矩阵, 于是

$$\det(B(A+tE)_1, (A+tE)_2, \dots, (A+tE)_n) + \dots + \det((A+tE)_1, (A+tE)_2, \dots, B(A+tE)_n) = \det(A+tE) \cdot \text{tr}(B)$$

两边是关于 t 的多项式, 它们无穷多个点上相等, 故是同一多项式, 所以 $t=0$ 时也相等, 即

$$\det(BA_1, A_2, \dots, A_n) + \dots + \det(A_1, A_2, \dots, BA_n) = \det(A) \cdot \text{tr}(B)$$

9. 容易看出 (设 $A = PD_1Q, B = RD_1S$ 代入, 化简), 可以不妨设 A, B 均为相抵标准型, 因此在条件

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}, r \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = r + s$$

之下, 证明 $AX + YB = C$ 有解即可, 初等变换有

$$r \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} I_r & 0 & C_1 & C_2 \\ 0 & 0 & C_3 & C_4 \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = r + s \Rightarrow C_4 = 0$$

然后解方程

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X_1 + Y_1 = C_1, X_2 = C_2, Y_3 = C_3$$

显然是有解的, 结论得证, 另一边的结论代入然后初等变换显然成立

10. 条件 $A^2B = A$ 表明 $r(A) \leq r(A^2)$, 所以只能 $r(A) = r(A^2)$, 这就是说 A 的幂零部分全是零

同时相似变换不改变条件和结论, 所以不妨设 $A = \begin{pmatrix} P & \\ & 0 \end{pmatrix}$, 其中 P 是可逆阵, 分块设 $B = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$,

代入条件有

$$\begin{pmatrix} P^2 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^2X & P^2Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $Y = 0, X = P^{-1}$, 也即 $B = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ Z & W \end{pmatrix}$

然后看看结论, 要证明的 $B^2A = B$ 就等价于

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ Z & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ Z & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & \\ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{-2} & 0 \\ ZP^{-1} + WZ & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & \\ & 0 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ Z + WZP & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ Z & W \end{pmatrix} \Leftrightarrow W = 0 \end{aligned}$$

需要推出 $W = 0$, 注意条件 $r(A) = r(B)$, 以及

$$r(B) = r \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ Z & W \end{pmatrix} \geq r(P^{-1}) + r(W) = r(A) + r(W)$$

所以 $r(W) = 0, W = 0$, 结论得证

11. 根据条件可知 $AJ = 2J$, 利用 $A^2 + 2A = 2J$ 可知 $8J = 2nJ$ 所以 $n = 4$, 下面来计算 A

条件是 A 的每一行都恰有两个 1, 我们先来说明 A 的每一列也都恰有两个 1

如果某一列全是零, 会导致 $A^2 + 2A$ 这一列全是零, 矛盾

如果某一列只有 1 个 1, 这个元素设为 $a_{ij} = 1$, 对 $k \neq i$ 考虑 (k, j) 位置, 则 $a_{kj} = 0$ 表明 $A^2(k, j) = 2$, 这是 A 的 k 行与 j 列乘积, 但是第 j 列只有一个 1, 这不可能, 矛盾

如果某一列有三个 1, 则 A^2 在这三个位置处都是零, 任选一个位置来看, 注意 A 每行有两个 1, 所以这个位置至少是 1, 不可能是零, 矛盾

如果某一列全是 1, 同理可知相应位置 A^2 至少是 2, 矛盾

现在已经知道 A 每行每列都恰有两个 1, 关注 A 的第一行, 则一共有 6 种可能性, 注意如果 $a_{ij} = 1$, 则 $A^2(i, j) = 0$ 也即 A 的第 i 行和第 j 列, 它们 1 的位置刚刚好是错开的, 因此 $a_{11} = 0$, 这下只有三种情况了, 恰

好这三种情况都能够成立, 并且在第一行确定后, 后面所有的元素均可确定下来, 得到

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & * & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & \\ & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & * & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & & 0 \\ & & & \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & * & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这就是一切矩阵 A

12. 随便考虑一个数字, 比如 1, 设 1 在对角线上出现了 m 次, 在非对角线的位置处出现了 n 次, 因为矩阵是对称的, 所以非对角线位置一定成对出现, 也就是说 n 为偶数, 因为每一行都是 $1, 2, \dots, 2021$ 的排列, 所以 1 总共有 2021 个也即 $m + n = 2021$ 是奇数, 所以 m 是奇数, 从而每一个数字都一定会在对角线上出现, 则所求的和为 $1 + 2 + \dots + 2021 = 1011 \times 2021$

13. 对于秩相同的矩阵 A, B , 则有可逆阵 P, Q 使得 $B = PAQ$, 所以 $f(B) \leq f(A)$, 当然反向的不等式也会成立, 于是 f 这个映射, 只要矩阵秩相同, 那么 f 的值也一样, 显然矩阵的秩取值是 $0, 1, \dots, n$, 因此只需考虑 $n + 1$ 个相抵标准型, 计算 f 在它们上面的作用结果

显然, 秩较大的相抵标准型, 可以乘个对角阵变成秩较小的相抵标准型, 于是 f 这个映射, 关于矩阵的秩是单调递增的, 它又是满射, 所以只能 f 把秩为 r 的相抵标准型映射为 r , 也即 $f(X) = r(X)$

14. 待定系数 $x \neq y$ 考虑

$$\begin{aligned} A &= U + V, B = xU + yV \\ A^2 &= U^2 + V^2 + UV + VU \\ B^2 &= x^2U^2 + y^2V^2 + xy(UV + VU) \\ AB &= xU^2 + yV^2 + yUV + xVU \\ BA &= xU^2 + yV^2 + xUV + yVU \end{aligned}$$

代入条件得到

$$U^2(x^2 - x + 1) + V^2(y^2 - y + 1) + UV(xy + 1 - y) + VU(xy + 1 - x) = 0$$

所以自然取 x, y 为方程 $t^2 - t + 1 = 0$ 的两个不同的根, 也就是单位根 $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, y = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}, x + y = 1, xy = 1$, 进而

$$\begin{aligned} UV &= -\frac{2-x}{2-y}VU = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}VU \\ AB - BA &= (y - x)(UV - VU) = 3\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}VU \end{aligned}$$

根据条件, 所以 U, V 可逆, 然后第一个方程里面取行列式得到

$$|UV| = \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^n |VU| \Rightarrow \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^n = 1$$

注意这是单位根, 所以 $3|n$, 得证

15. 这两个行列式都可以拆分为 $n+1$ 个行列式之和, 这些又可以互相正负抵消, 最终

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{\beta_1} + 1 & \alpha_1^{\beta_2} + 1 & \cdots & \alpha_1^{\beta_n} + 1 \\ \alpha_2^{\beta_1} + 1 & \alpha_2^{\beta_2} + 1 & \cdots & \alpha_2^{\beta_n} + 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^{\beta_1} + 1 & \alpha_n^{\beta_2} + 1 & \cdots & \alpha_n^{\beta_n} + 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1^{\beta_1} - 1 & \alpha_1^{\beta_2} - 1 & \cdots & \alpha_1^{\beta_n} - 1 \\ \alpha_2^{\beta_1} - 1 & \alpha_2^{\beta_2} - 1 & \cdots & \alpha_2^{\beta_n} - 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^{\beta_1} - 1 & \alpha_n^{\beta_2} - 1 & \cdots & \alpha_n^{\beta_n} - 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \alpha_1^{\beta_1} & \alpha_1^{\beta_2} & \cdots & \alpha_1^{\beta_n} \\ \alpha_2^{\beta_1} & \alpha_2^{\beta_2} & \cdots & \alpha_2^{\beta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^{\beta_1} & \alpha_n^{\beta_2} & \cdots & \alpha_n^{\beta_n} \end{vmatrix}$$

要证明其大于零, 这就是例题 8.7.3

16. 先提取公因式, 有

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1(x_1 - a) & x_1^2(x_1 - a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1 - a) \\ 1 & x_2(x_2 - a) & x_2^2(x_2 - a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2 - a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n(x_n - a) & x_n^2(x_n - a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - a) \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (x_i - a) \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1 - a} & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \frac{1}{x_2 - a} & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n - a} & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

然后我们按照第一列展开, 则需要计算这样的一些式子

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x_1 - a} \begin{vmatrix} x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \frac{x_2 x_3 \cdots x_n}{x_1 - a} \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ & = \frac{1}{x_1(x_1 - a)} \prod_{i=1}^n x_i \prod_{2 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{x_1(x_1 - a)} \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1)} \\ & \frac{-1}{x_2 - a} \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{x_2(x_2 - a)} \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2) \cdots (x_n - x_2)} \end{aligned}$$

以此类推, 还有剩下 $n-2$ 个, 将这些结果代入可知

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^n (x_i - a) \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1 - a} & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \frac{1}{x_2 - a} & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n - a} & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ & = \prod_{i=1}^n (x_i - a) \prod_{i=1}^n x_i \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i(x_i - a)} \prod_{j \neq i} \frac{1}{x_j - x_i} \\ & = \prod_{i=1}^n x_i \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \prod_{j \neq i} \frac{x_j - a}{x_j - x_i} \end{aligned}$$

现在进行化简, 很明显那个求和长得像拉格朗日插值公式, 所以类似处理, 则有

$$f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \prod_{j \neq i} \frac{a - x_j}{x_i - x_j}, \deg f \leq n-1, f(x_i) = \frac{1}{x_i}, 1 \leq i \leq n$$

考虑多项式 $g(a) = af(a) - 1, \deg g \leq n$, 则有 $g(x_1) = \dots = g(x_n) = 0$, 于是

$$af(a) - 1 = C(a - x_1)(a - x_2) \dots (a - x_n)$$

然后代入 $a = 0$ 求出 $C = \frac{-1}{(-1)^n x_1 x_2 \dots x_n}$, 这样就求出来了

$$f(a) = \frac{1 - \left(1 - \frac{a}{x_1}\right) \left(1 - \frac{a}{x_2}\right) \dots \left(1 - \frac{a}{x_n}\right)}{a}$$

代入回去得到要计算的行列式为

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \prod_{i=1}^n x_i \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) f(a) \\ &= \frac{1}{a} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \left(\prod_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n (x_i - a) \right) \end{aligned}$$

其他方法见谢启鸿白皮书, 是加边行列式的思想, 可能不容易想到

12.8 第九章习题答案

1. 第一问: 最直接的构造是把所有对角线全为零的上三角矩阵放在一起, 显然满足要求, 维数 $\frac{n(n-1)}{2}$

下面证明最大, 只需要找一个与 V 不能相交并且维数 $\frac{n(n+1)}{2}$ 的空间, 实对称矩阵空间 (记为 W) 就满足这个要求, 因为一旦相交, 则意味着 “实对称的幂零矩阵”, 这显然是零, 结论得证

第二问: 同样, V 里面如果有某个实对称矩阵, 则 $\text{tr}(A^2) = 0$, 意味着 A 特征值全为零, 从而 $A = 0$, 这说明维数不超过 $\frac{n(n-1)}{2}$, 另一方面, 显然所有对角线全为零的上三角矩阵构成的集合满足条件, 因此维数最大值是 $\frac{n(n-1)}{2}$

注意: 本题必须是实矩阵, 复对称矩阵不一定可对角化, 也不一定特征值平方和非负!

2. 设 M 中有一个非零矩阵 A , 条件 3 表明左乘和右乘矩阵这个运算是封闭的, 所以左右乘可逆阵, 可以把 A 变成相抵标准型 (也在 M 中), 显然可以乘个对角阵把它变成 E_{11} , 于是 $E_{11} \in M$, 显然所有 E_{ij} 之间是相抵的关系, 于是利用条件 3, 左右乘可逆阵可知所有 E_{ij} 都在 M 中, 当然它的任意倍数也是在 M 中的, 再用条件 2, 表明 M 对加法封闭, 于是 M 是线性空间, 进而 M 包含了所有的矩阵

3. 用反证法. 假设存在同时满足题设四个条件的五个子空间 $W_1, W_2, \dots, W_5$, 则由条件 (3) 知 $W_2 + W_4 \subseteq W_3 + W_4$. 由条件 (4) 知 $W_4 \not\subseteq W_2 + W_4, W_4 \not\subseteq W_3 + W_4$. 再由条件 (2) 和 (3) 可知 $W_2 + W_4 = W_3 + W_4 = W_5$. 根据维数公式, 得

$$\dim W_2 + \dim W_4 - \dim(W_2 \cap W_4) = \dim W_3 + \dim W_4 - \dim(W_3 \cap W_4)$$

另一方面, 再由条件 (4) 有

$$W_2 \cap W_4 \not\subseteq W_2, \quad W_2 \cap W_4 \not\subseteq W_4; \quad W_3 \cap W_4 \not\subseteq W_3, \quad W_3 \cap W_4 \not\subseteq W_4.$$

因此, 由条件 (2) 知 $W_2 \cap W_4 = W_3 \cap W_4 = W_1$, 从而 $\dim W_2 = \dim W_3, W_2 = W_3$, 此与条件 (1) 矛盾. 故不存在满足题设条件的五个子空间.

4. 观察条件, 意思是分解 $v = v_1 + v_2$ 之后, 需要 $f(v_1) = 0, g(v_2) = 0$, 所以考虑是否成立 $V = \ker f + \ker g$, 注意 f, g 线性无关, 上课例题证明了 $\ker f, \ker g$ 互不包含并且显然都是 $n-1$ 维空间, 于是这个拆分成立, 结论得证

5. 迹零矩阵空间, 就是要求 n 个对角元之和为零, 这是一个方程, 而矩阵总共有 n^2 个变量, 所以还剩下 $n^2 - 1$ 个自由变量, 也即维数 $n^2 - 1$ (当然你也可以直接把一组基写出来然后说明问题)

还需要证明: $AB - BA$ 可以等于任何一个迹为零的矩阵, 熟知迹为零的矩阵可以相似于一个对角线全为零的矩阵, 并且同时相似变换对问题没有影响, 于是只需检查 $AB - BA = C$, 这里 C 对角线全为零是否有解, 事实上对任意的非常值多项式 $f(x)$ 以及任意对角线全为零 (或者说迹零矩阵) 的矩阵, 都存在 A, B 使得 $C = f(AB) - f(BA)$, 只需要设 B 是对角元互不相同的对角阵然后代入计算直接把 A 解出来, 问题解决

6. 设 X 的一组基为 $p_1(x), \dots, p_n(x)$, 则一列函数

$$f_k(x) = c_{k1}p_1(x) + c_{k2}p_2(x) + \dots + c_{kn}p_n(x), k = 1, 2, \dots$$

如果可以证明每一个系数对应的数列都是收敛的, 也就是说 $c_{k1} \rightarrow c_1, \dots, c_{kn} \rightarrow c_n$ 都是有限数, 则显然 $f_k(x)$ 收敛过程是一致的 (这一步用到了每一个函数 $p_i(x)$ 的有界性), 并且极限函数 $f(x) = c_1p_1(x) + \dots + c_np_n(x)$

在 $[0, 1]$ 中取 n 个分点 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 则有

$$\begin{aligned} f_k(x_1) &= c_{k1}p_1(x_1) + c_{k2}p_2(x_1) + \dots + c_{kn}p_n(x_1) \rightarrow f(x_1) \\ f_k(x_2) &= c_{k1}p_1(x_2) + c_{k2}p_2(x_2) + \dots + c_{kn}p_n(x_2) \rightarrow f(x_2) \\ &\dots \\ f_k(x_n) &= c_{k1}p_1(x_n) + c_{k2}p_2(x_n) + \dots + c_{kn}p_n(x_n) \rightarrow f(x_n) \end{aligned}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} p_1(x_1) & \cdots & p_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ p_1(x_n) & \cdots & p_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{k1} \\ \vdots \\ c_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_k(x_1) \\ \vdots \\ f_k(x_n) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{k1} \\ \vdots \\ c_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(x_1) & \cdots & p_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ p_1(x_n) & \cdots & p_n(x_n) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_k(x_1) \\ \vdots \\ f_k(x_n) \end{pmatrix}$$

令 $k \rightarrow \infty$ 就知道每一个系数对应的数列都是收敛的, 结论得证

中间我们还需说明那个矩阵可逆, 也就是说对于 n 个线性无关的函数 $p_1(x), \dots, p_n(x)$, 可以找到 n 个点 $x_1, \dots, x_n$ 使得矩阵可逆, 这件事情可以将行列式按照某一行或者某一列展开, 然后配合归纳完成证明, 这部分同时也是某年的 CMC 数学类真题, 自行完成

注: 本题事先并未假设极限函数在 X 中, 或者极限函数连续, 是证明出来在 X 中的

7. 本题的核心想法是怎样能把四个抽象的空间运用各种不妨设化简和变的具体

注意到同时对每一个空间里面的向量做相同的初等行变换 (也就是同时给每一个空间左乘可逆阵), 对问题的条件与结论均没有影响, 所以我们可以反复使用同时初等行变换简化问题

首先看 V_1 , 对 V_1 的一组基也就是四个列向量, 做初等行变换, 可以变成 e_1, e_2, e_3, e_4 , 对 V_2, V_3, V_4 也做相同的初等行变换, 这样就化简了 V_1 , 此时 $V_1 = (x, 0)$, 这里 x 是任意四维向量

然后看 V_2 , 因为 $V_1 \cap V_2 = 0$, 所以 V_2 中的向量只要后四个分量全是零, 那么这个向量就必须是零, 现在看 V_2 的一组基也就是四个列向量 (线性无关), 它们后四个分量对应的四个向量 (4 维列向量) 一定是线性无关的, 因此对它们的后四个分量做初等行变换 (前四行不动), 则后四个分量会变成 I_4 (四阶单位阵), 接着把后四行往前四行加 (消元), 此时 V_2 的基变成 e_5, e_6, e_7, e_8 , 对 V_1, V_3, V_4 做同样的变换, 过程中 V_1 不动

至此, $V_1 = (x, 0), V_2 = (0, y)$, 其中 x, y 是任取的四维向量, 然后去调整 V_3, V_4

设 V_3 的一组基是 $(p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3), (p_4, q_4)$, 则 p_1, p_2, p_3, p_4 线性无关 (理由和前面一样, 如果线性相关, 会导致 $V_3 \cap V_2 \neq 0$), 同样 q_1, q_2, q_3, q_4 线性无关, 注意这两个都是四维的线性无关的向量组, 所以有可逆阵 A 使得 $A(p_1, p_2, p_3, p_4) = (q_1, q_2, q_3, q_4)$, 现在对 V_1, V_2, V_3, V_4 的前四个分量都统一的按照可逆阵 A 做初等行变换, 则 V_1, V_2 不动 (看 V_1 的基向量, 基向量显然变了, 但是空间不变), V_3 的基变成 $(q_1, q_1), (q_2, q_2), (q_3, q_3), (q_4, q_4)$, 也就是说 $V_3 = (z, z)$, 其中 z 是任意四维向量

最后来处理 V_4 , 与前面同理, 看 V_4 的一组基, 这组基的前四个分量对应的是四阶可逆阵, 后四个分量对应的也是四阶可逆阵, 于是同样的会有一个过渡矩阵, 将其设出来, 最终经过前面一系列操作, 不妨设

$$V_1 = \{(x, 0) | x \in R^4\}, V_2 = \{(0, y) | y \in R^4\}, V_3 = \{(z, z) | z \in R^4\}, V_4 = \{(w, Bw) | w \in R^4\}, B \text{ 可逆}$$

根据这些空间两两不交, 所以 B 没有特征值 1

实际上最后还可以不妨设 B 是实数域上的相似标准型, 这就是我们不妨设可以导出的最强结果, 也是利用的最充分的情况了, 标准型的理由是: 对前四个分量和后四个分量对应的部分, 同时乘以一个相同的可逆阵 (各自做相同的初等行变换), 则 V_1, V_2, V_3 不动, 结构和前面一样, 而 V_4 从 (w, Bw) 变成 (Pw, PBw) 满足 $PBw = (PBP^{-1})Pw$, 矩阵化为 PBP^{-1} 这样的相似矩阵, 因此最强的可以不妨设 B 是标准型

换句话说, 设

$$\begin{aligned} V_1 &= \text{span}(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}), V_2 = \text{span}(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{24}) \\ V_3 &= \text{span}(\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, \alpha_{34}), V_4 = \text{span}(\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}, \alpha_{44}) \end{aligned}$$

其中各个 α_{ij} 都是八维列向量, V_1, V_2, V_3, V_4 是两两交集为零的四维线性空间, 则存在八阶可逆阵 A 使得

$$\begin{aligned} A(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}) &= \begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \end{pmatrix}, A(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{24}) = \begin{pmatrix} 0 \\ P_2 \end{pmatrix} \\ A(\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, \alpha_{34}) &= \begin{pmatrix} P_3 \\ P_3 \end{pmatrix}, A(\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}, \alpha_{44}) = \begin{pmatrix} P_4 \\ BP_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

这里 P_1, P_2, P_3, P_4, B 均为可逆阵, 且 B 没有特征值 1, B 是某个实矩阵在实数域上的相似标准型 (与前面构造的等价命题, 不过最后 B 是否标准型也不重要, 知道可逆即可)

若能找到 B 的一个二维不变子空间 W_0 , 则取 $W = \{(x, y) | x \in W_0, y \in W_0\}$ 是四维线性空间, 并且显然有

$$W \cap V_1 = \{(x, 0) | x \in W_0\}, W \cap V_2 = \{(0, y) | y \in W_0\}, W \cap V_3 = \{(x, x) | x \in W_0\}, W \cap V_4 = \{(x, Bx) | x \in W_0\}$$

容易看出每一个都是二维线性空间, 结论就会成立

下面说明对于四阶实方阵 B , 可以找到 B 的二维不变子空间

如果 B 有虚特征值, 则成对出现 $a + bi, a - bi, b \neq 0$, 考虑 $B(x + yi) = (a + bi)(x + yi)$ 然后对比实部, 虚部, 可知 x, y 张成了二维不变子空间

如果 B 没有虚特征值, 则 B 的特征值都是实数, 此时如果有两个不同的实特征值 a, b , 则考虑 $Bx = ax, By = by$, 这里 x, y 是非零的特征向量, 故显然 x, y 线性无关, x, y 张成二维不变子空间

最后一种情况, B 的特征值全是实数并且都相同, 记为 λ , 此时假如有两个线性无关的特征向量 (也就是说几何重数至少为 2), 则结论成立, 若不然, 则几何重数是 1, 故只能

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow Be_2 = e_1 + \lambda e_2, Be_1 = \lambda e_1$$

于是 e_1, e_2 对应着二维不变子空间, 综上结论得证

8. 第一问只需要考虑所有与 W 交为零的线性空间, 这些线性空间构成一个偏序集, 然后用 Zorn 引理找到极大元, 即为所求的 W_0

第二问: 要证明 A 是单射也是满射, 考虑平凡的分解 $V = 0 \oplus V$, 根据条件有 $V = 0 \oplus AV$, 所以 A 是满射

下面证明单射, 反证法, 则 $\dim \ker A \geq 1$, 且存在补空间 W , 也即 $V = \ker A \oplus W$, 任取一个 $\alpha \in W$, 则 $A\alpha \neq 0$, 再取 $x \in \ker A, x \neq 0$, 便有 $A(x + \alpha) = A(2x + \alpha)$ 且显然 $x + \alpha$ 与 $2x + \alpha$ 线性无关

同样道理, 可以取补空间 W_0 , 使其包含 $2x + \alpha$ 并且成立 $V = (x + \alpha) \oplus W_0$, 根据条件就会成立 $V = A(x + \alpha) \oplus AW_0 = A(2x + \alpha) \oplus AW_0$, 因为 $2x + \alpha \in W_0$ 所以 $A(2x + \alpha) \in AW_0$, 也就是说它同时在两个空间里面, 根据直和可知 $A(2x + \alpha) = 0$, 由 $Ax = 0$ 知 $A\alpha = 0$, 导出矛盾

12.9 第十章习题答案

1. 这样的直线可以看做是过 l_1 的平面和过 l_2 的平面的交线, 利用直线束来做比较方便, 设两个平面束为 $x - 1 + a(y - z) = 0, b(x + 1) + y + z = 0$, 则 $l: \begin{cases} x - 1 + a(y - z) = 0 \\ b(x + 1) + y + z = 0 \end{cases}$ 与直线 $\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+2}{5}$ 共面

考虑 l 上的点 $(1, -b, -b)$, l_3 上的点 $(2, -1, -2)$, l 的方向向量是 $\vec{v} = (1, a, -a) \times (b, 1, 1) = (2a, -1 - ab, 1 - ab)$, l_3 的方向向量是 $(-3, 4, 5)$, 根据共面条件可知

$$\begin{vmatrix} 1 & b-1 & b-2 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2a & -1-ab & 1-ab \end{vmatrix} = 6(a+b) = 0$$

由此消元得到 $a = \frac{x-1}{z-y} = -b = \frac{y+z}{x+1} \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = 1$

此外还有一种完全不用动脑子的暴力方法, 唯一美中不足的一点就是超级难算, 也是代价:

方法二: 设与 l_1, l_2, l_3 同时共面的直线 l 的方程为

$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}.$$

l_1 的点向式方程为 $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$, 从而 l_1 经过点 $M_1(1, 0, 0)$, l_1 的一个方向向量为 $(0, 1, 1)$ 。

l_2 的点向式方程为 $\frac{x+1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$, 从而 l_2 经过点 $M_2(-1, 0, 0)$, l_2 的一个方向向量为 $(0, 1, -1)$ 。

l_3 经过点 $M_3(2, -1, -2)$, l_3 的一个方向向量为 $(-3, 4, 5)$ 。由于 l 与 l_1, l_2, l_3 同时共面, 因此

$$\begin{vmatrix} x_0-1 & 0 & v_1 \\ y_0 & 1 & v_2 \\ z_0 & 1 & v_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_0+1 & 0 & v_1 \\ y_0 & 1 & v_2 \\ z_0 & -1 & v_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_0-2 & -3 & v_1 \\ y_0+1 & 4 & v_2 \\ z_0+2 & 5 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

于是有

$$\begin{cases} (y_0 - z_0)v_1 - (x_0 - 1)v_2 + (x_0 - 1)v_3 = 0, \\ (-y_0 - z_0)v_1 + (x_0 + 1)v_2 + (x_0 + 1)v_3 = 0, \\ (5y_0 - 4z_0 - 3)v_1 - (5x_0 - 10 + 3z_0 + 6)v_2 + (4x_0 - 8 + 3y_0 + 3)v_3 = 0. \end{cases}$$

由于 v_1, v_2, v_3 不全为 0, 因此相应的 3 元齐次线性方程组有非零解, 从而它的系数行列式等于 0, 于是有

$$\begin{vmatrix} y_0 - z_0 & -(x_0 - 1) & x_0 - 1 \\ -y_0 - z_0 & x_0 + 1 & x_0 + 1 \\ 5y_0 - 4z_0 - 3 & -(5x_0 - 10 + 3z_0 + 6) & 4x_0 - 8 + 3y_0 + 3 \end{vmatrix} = 0.$$

计算左边的行列式等于 $6x_0 + y_0^2 - z_0^2 - 1$, 因此与 l_1, l_2, l_3 同时共面的直线所产生的的曲面的方程为

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

这是单叶双曲面。

2. 显然截线是二次曲线并且只可能是椭圆或者双曲线, 不可能是抛物线的, 而椭圆和双曲线最本质的区别就是是否有界, 所以我们关注投影曲线是否有界也即 $x^2 + y^2$ 在一个二次方程的约束下是否就最大值就行了

如果 $m = 0$, 则显然是双曲线, 以下考虑 $m \neq 0$, 代入 $z = \frac{x+y}{m}$ 到 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 可得

$$m^2(x^2 + y^2 - 1) = (x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$$

于是当 $m^2 > 2$ 时 $x^2 + y^2$ 有界所以是椭圆, $m^2 < 2$ 是 $x^2 + y^2$ 无界所以是双曲线, 而 $m^2 = 2$ 时上面的方程是两条直线, 所以相应的交线肯定不满足要求, 故结论为: 双曲线等价于 $m^2 < 2$, 椭圆等价于 $m^2 > 2$

3. 注意同族异面异族共面, 所以两条正交直母线一定是不同族的, 设

$$l_1: \frac{x-au}{a} = \frac{y-bu}{-b} = \frac{z}{2u}, l_2: \frac{x-av}{a} = \frac{y+bv}{b} = \frac{z}{2v}$$

解方程得到 (恰好是参数方程)
$$\begin{cases} x = au + av \\ y = bu - bv \\ z = 2uv \end{cases}, \text{ 所以轨迹方程是}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = a^2 - b^2 \\ z = \frac{a^2 - b^2}{2} \end{cases}$$

4. 来自 14 届 CMC, 你有很多方法解决本题, 这里写一个我现在第一反应想到的做法:

设过点 P 且在 S 上的直线方程为 $\frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z-c}{C}$, 代入到 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 中, 则各个系数应当恒为零, 所以有

$$\begin{cases} A^2 + B^2 - C^2 = 1 \\ Aa + Bb = Cc \\ a^2 + b^2 - c^2 = 1 \end{cases}$$

注意直线与平面平行, 所以方向向量 (A, B, C) 垂直于法向量 $(1, 1, -1)$, 故 $C = A + B$, 代入可知

$$A^2 + B^2 = 1 + (A+B)^2 \Rightarrow AB = -\frac{1}{2}$$

进而这条直线的方向向量为 $(A, -\frac{1}{2A}, A - \frac{1}{2A})$ 同时还满足

$$Aa - \frac{b}{2A} = c \left(A - \frac{1}{2A} \right) \Rightarrow A^2(a-c) = \frac{b-c}{2}$$

因为过该点的两条直线都在 S 上且平行于平面 $x+y-z=0$, 所以另一条直线的方向向量是 $(A_0, -\frac{1}{2A_0}, A - \frac{1}{2A_0})$, 因为每个分量都是关于 A_0 的奇函数并且这是两条不同的直线, 所以 $A_0^2 \neq A^2$

同上我们还有方程 $A_0^2(a-c) = \frac{b-c}{2}$, 对比可知 $a = b = c$, 于是所求的 P 为 $(1, 1, 1), (-1, -1, -1)$ 两个点

5. 设马鞍面的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, a > 0, b > 0$. 它的两族直母线为

$$(I) \begin{cases} x = au + av, \\ y = bu - bv, \\ z = 2uv, \end{cases} \text{ 及 } (II) \begin{cases} x = av + au, \\ y = -bv + bu, \\ z = 2vu, \end{cases}$$

(1) 在 (I) 族中任取两条直母线 l_1, l_2 , 对应的参数为 $u_1, u_2, u_1 \neq u_2, l_1, l_2$ 分别经过点 $M_1(au_1, bu_1, 0), M_2(au_2, bu_2, 0)$ 方向向量是 $v_1 = (a, -b, 2u_1), v_2 = (a, -b, 2u_2)$, 显然两方向不共线, 计算混合积

$$(\overline{M_1 M_2}, v_1, v_2) = \begin{vmatrix} a(u_2 - u_1) & b(u_2 - u_1) & 0 \\ a & -b & 2u_1 \\ a & -b & 2u_2 \end{vmatrix} = -4ab(u_2 - u_1)^2 \neq 0.$$

所以 (I) 中任意两条直母线 l_1, l_2 异面。同理可得 (II) 中任意两条直母线也异面。

(2) 在两族直母线中分别任取一条, 记为 l_1, l_2 , 对应的参数为 u_1, v_2, l_1, l_2 分别经过点 $M_1(au_1, bu_1, 0), M_2(av_2, -bv_2, 0)$, 方向向量是 $v_1 = (a, -b, 2u_1), v_2 = (a, b, 2v_2)$ 。显然两方向不共线, 即它们不可能平行。

计算混合积

$$(\overline{M_1 M_2}, v_1, v_2) = \begin{vmatrix} a(v_2 - u_1) & -b(v_2 + u_1) & 0 \\ a & -b & 2u_1 \\ a & b & 2v_2 \end{vmatrix} = 0.$$

所以异族中的任意两条直母线 l_1, l_2 相交。

(3) 由于 (I) 中任意直母线的方向向量为 $v_1 = (a, -b, 2u)$, 它平行于平面 $bx + ay = 0$, 所以 (I) 中所有直母线平行于平面 $bx + ay = 0$ 。

由于 (II) 中任意直母线的方向向量为 $v_2 = (a, b, 2v)$, 它平行于平面 $bx - ay = 0$, 所以 (II) 中所有直母线平行于平面 $bx - ay = 0$

(4) 因式分解后, 和上课例题一样看系数矩阵, 其行列式为零且矩阵非零, 故得证

6. 对于第一问, 同上课例题一样, 代入后检查二次项部分, 便可得到完全一致的结论 (注意唯一区别是右端的 1 这里改成了 -1, 但是这对于二次项部分没有影响, 所以粗略判断结论完全一致)

第二问: 类似可知, 最终结论见本章开头知识梳理部分的链接

第十三章 补充题

这些题目讲义中不提供答案, 仅供感兴趣的同学自己练手, 需要答案可以自行搜索或者来新一届答疑群问, 以下题目在之后的课程中会讲解, 不过不是下一期, 而是在 2025-2026 新一轮的全年班中上课讲, 答案会在那时发布。

13.1 正经习题

题 13.1.1 设函数 $f(x)$ 定义在 $[0, 1]$ 中, 定义 $A = \left\{x \in (0, 1) \mid \lim_{t \rightarrow x} f(t) = \infty\right\}$, 证明: A 是至多可数集且无处稠密 (也即 $\bar{A}$ 没有内点)。

题 13.1.2

设 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上, 并且在有理点取正数, 在无理点取零, 证明: $f(x)$ 的全体不可导点构成的集合是不可数集。

题 13.1.3

证明: 在区间 $\left[\frac{16}{3}, \frac{17}{3}\right]$ 内存在一点 a , 使得 a^n 的小数部分 $\{a^n\} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ 对任意正整数 n 恒成立。

题 13.1.4

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{x \geq 0} \left| e^{-x} - \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}} \right| \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$.

题 13.1.5

设正数列 a_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n < +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = 1$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = 1$.

题 13.1.6

将正整数集划分为 A, B 两个不相交的集合, 并且 A, B 都是无限集, 对任意 $c > 0$, 证明: 存在序列 $a_n \in A, b_n \in B$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$

题 13.1.7

设 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 求 a 的最大值使得 $\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^a} < +\infty$.

题 13.1.8

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续, 证明: 存在连续, 递增, 上凸的函数 $w(x): [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 使得 $w(0) = 0$ 且 $|f(x) - f(y)| \leq w(|x - y|)$ 恒成立.

题 13.1.9

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, $M > 0$ 是常数, 对任意实数 x 和 t , 有 $|f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)| \leq Mt^2$, 求证: $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导且对任意实数 x 和 t , 有 $|f'(x+t) - f'(x)| \leq M|t|$.

题 13.1.10

设 n 是大于 1 的整数, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上 n 次可导, 记 $M_k = \sup \{ |f^{(k)}(x)| \mid x \in \mathbb{R} \}$, $k = 0, 1, \dots, n$. 证明: 若 $f(x)$ 和 $f^{(n)}(x)$ 都在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 则有 $M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

题 13.1.11

设 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 单调递增且下凸, n 是大于 1 的整数, 记 $a_k = f\left(\frac{k}{n}\right)$, $k = 1, 2, \dots, n$, 证明:

$$\frac{1}{3n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^3 (a_{k+1} - a_k)^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^2 \leq \frac{1}{3n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^3 (a_{k+1} - a_k)^2.$$

题 13.1.12

设 $f(x): \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ 是双射, 证明: $f(x)$ 有无穷个间断点.

题 13.1.13

对多项式 $f(x)$, 用 $d(f)$ 表示其最大和最小实根之间的距离, 给定正整数 $n \geq 2$, 求最大的常数 C , 使得对任意所有根都是实数的 n 次多项式 $f(x)$, 均有 $d(f') \geq Cd(f)$.

题 13.1.14

设 $\cos \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{8}$, 证明: x 是 π 的无理数倍.

题 13.1.15

设 n 阶整数方阵 A 的所有元素是 $1, 2, \dots, n^2$ 的排列, 证明: $r(A)$ 的取值范围是 $2, 3, \dots, n$.

题 13.1.16

设 m 为正整数, Ω 是由一些 n 阶方阵构成的集合, 满足对任意 $A, B \in \Omega$ 都有 $(AB)^m = BA \in \Omega$, 证明: 对任意 $A, B \in \Omega$ 都有 $AB = BA$, 并且对任意 $A \in \Omega$, 要么 $|A| = 0$, 要么 $|A|^{m-1} = 1$.

题 13.1.17

设 $a_i = i$, 计算下列 n 阶方阵的逆矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1^2 + 1 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 + 2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & a_n^2 + n \end{pmatrix}$$

题 13.1.18

设 $P(x_1, \dots, x_n)$ 是实系数 n 元多项式, 满足 $x_1^2 + \dots + x_n^2 |P(x_1, \dots, x_n)|$ 并且 $\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 P}{\partial x_n^2} = 0$, 证明: P 恒为零

题 13.1.19

设 $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$, 满足 $|f(0)| < 1, f'(x) = f^2(x) - 2 + \sin x$, 证明: $|f(x)| < \sqrt{3}$.

题 13.1.20

设 $p_1(x), \dots, p_r(x)$ 分别为 $n_1, \dots, n_r$ 次多项式且 $n_1 + \dots + n_r < \frac{r(r-1)}{2}$, 证明: $p_1(x), \dots, p_r(x)$ 线性相关.

13.2 野题

注：下面几个题，大多数题能做但是非常困难，少数问题不能做，也有少数问题能做并且不是很难

题 13.2.1

设 a_n 为整数序列且 $0 \leq a_{n-1} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n + a_{n+1} < 1$, 证明: a_n 是周期数列.

题 13.2.2

证明:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin x - \cos y - \sin x \cos y}{(2(\sin x - \cos y - \sin x \cos y) + 3)^{\frac{3}{2}}} dx dy = -4\pi.$$

题 13.2.3

设 $r \in (0, 1), n \geq 2$, 记 $w_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ 为 n 维单位球的表面积, 证明:

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{n-2} x}{(r^2 - 2r \cos x + 1)^{\frac{n}{2}}} dx = \frac{w_n}{w_{n-1}(1-r^2)}.$$

题 13.2.4

给定 $n \geq 2$, 设 $p > 0$, 对 n 个正数 $a_1, \dots, a_n$, 定义幂平均 $M_p = \left(\frac{a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}}$, 记

$$D = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \mid x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \leq 1, x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n-1\}$$

并定义对数平均

$$L = (n-1)! \int_D a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_{n-1}^{x_{n-1}} a_n^{x_n} dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1}, x_n = 1 - (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})$$

若对一切正数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 都有 $L \leq M_p$ 成立, 证明: p 的最小值是 $\frac{1}{n+1}$.

题 13.2.5

证明: 存在严格单调递增的自然数数列 a_k , 使得任意 $t \in \mathbb{Q}$, 只要 $t + a_k \neq 0, \forall k \geq 1$ 就有 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t + a_k} \in \mathbb{Q}$.

题 13.2.6

证明双叶双曲面 $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{24} - \frac{z^2}{81} = 1$ 上有无穷多条抛物线, 并求出它们的焦点构成的曲面的方程.

题 13.2.7

设 $n \geq 1$ 为固定的正整数. 记 $P = \mathbb{R}_{n-1}[x]$, $F = \left\{ f \mid f = \sum_{k=n}^{\infty} c_k x^k, \text{ 其中 } c_k \geq 0 (\forall k \geq n) \text{ 且 } \sum_{k=n}^{\infty} c_k = 1 \right\}$.

计算 $\inf_{\substack{p \in P \\ f \in F}} \left\{ \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - p(x)| \right\}$.

题 13.2.8

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续可微, 对任意实数 x , 有 $f'(x) > f(f(x))$, 求证: 对任意 $x \geq 0$, 有 $f(f(f(x))) \leq 0$.

题 13.2.9

设 $f(x) : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 有一阶连续导数且为双射, 满足 $f'(x) = f^{-1}(x)$, 求 $f(x)$.