

数论函数变换

Claris

Hangzhou Dianzi University

2019 年 1 月 11 日

线性筛

- 思想：用每个合数的最小质因子筛掉它。

线性筛

- 思想：用每个合数的最小质因子筛掉它。
- 从小到大考虑每个数 i ，将其乘以之前所有发现的质数 p_j ，标记 $i \times p_j$ 为合数。

线性筛

- 思想：用每个合数的最小质因子筛掉它。
- 从小到大考虑每个数 i ，将其乘以之前所有发现的质数 p_j ，标记 $i \times p_j$ 为合数。

```

1 for(i=2;i<=n;i++){
2     if(!v[i])p[tot++]=i;
3     for(j=0;j<tot&& i*p[j]<=n;j++){
4         v[i*p[j]]=1;
5         if(i%p[j]==0)break;
6     }
7 }

```

线性筛

- 思想：用每个合数的最小质因子筛掉它。
- 从小到大考虑每个数 i ，将其乘以之前所有发现的质数 p_j ，标记 $i \times p_j$ 为合数。

```

1 for(i=2;i<=n;i++){
2     if(!v[i])p[tot++]=i;
3     for(j=0;j<tot&& i*p[j]<=n;j++){
4         v[i*p[j]]=1;
5         if(i%p[j]==0)break;
6     }
7 }

```

- 当 $i \bmod p_j = 0$ 时 break，这是因为 $i \times p_k (k > j)$ 的最小质因子 $\leq p_j$ 。

线性筛

- 思想：用每个合数的最小质因子筛掉它。
- 从小到大考虑每个数 i ，将其乘以之前所有发现的质数 p_j ，标记 $i \times p_j$ 为合数。

```

1 for(i=2;i<=n;i++){
2     if(!v[i])p[tot++]=i;
3     for(j=0;j<tot&& i*p[j]<=n;j++){
4         v[i*p[j]]=1;
5         if(i%p[j]==0)break;
6     }
7 }
```

- 当 $i \bmod p_j = 0$ 时 break，这是因为 $i \times p_k (k > j)$ 的最小质因子 $\leq p_j$ 。
- 时间复杂度 $O(n)$ 。

积性函数

- 如果对于任意两个互质的正整数 a, b , 都有
$$f(ab) = f(a)f(b)$$
 , 且 $f(1) = 1$, 则 f 为积性函数。

积性函数

- 如果对于任意两个互质的正整数 a, b , 都有 $f(ab) = f(a)f(b)$, 且 $f(1) = 1$, 则 f 为积性函数。
- 若无视互质的条件仍然满足 $f(ab) = f(a)f(b)$, 则 f 为完全积性函数。

积性函数

- 如果对于任意两个互质的正整数 a, b , 都有 $f(ab) = f(a)f(b)$, 且 $f(1) = 1$, 则 f 为积性函数。
- 若无视互质的条件仍然满足 $f(ab) = f(a)f(b)$, 则 f 为完全积性函数。
- 如果 f 为积性函数 , $n = \prod_{i=1}^m p_i^{e_i}$, 则 $f(n) = \prod_{i=1}^m f(p_i^{e_i})$ 。

积性函数

- 如果对于任意两个互质的正整数 a, b , 都有 $f(ab) = f(a)f(b)$, 且 $f(1) = 1$, 则 f 为积性函数。
- 若无视互质的条件仍然满足 $f(ab) = f(a)f(b)$, 则 f 为完全积性函数。
- 如果 f 为积性函数 , $n = \prod_{i=1}^m p_i^{e_i}$, 则 $f(n) = \prod_{i=1}^m f(p_i^{e_i})$ 。
- 如果 f 是完全积性函数 , 则 $f(n) = \prod_{i=1}^m f(p_i)^{e_i}$ 。

常见积性函数

- 除数函数 $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, 表示 n 的因子的 k 次方和。

常见积性函数

- 除数函数 $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, 表示 n 的因子的 k 次方和。
- 约数个数函数 $d(n) = \sigma_0(n) = \sum_{d|n} 1$, 表示 n 的因子个数。

常见积性函数

- 除数函数 $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, 表示 n 的因子的 k 次方和。
- 约数个数函数 $d(n) = \sigma_0(n) = \sum_{d|n} 1$, 表示 n 的因子个数。
- 欧拉函数 $\varphi(n)$ 表示 $[1, n]$ 里和 n 互质的数个数。

常见积性函数

- 除数函数 $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, 表示 n 的因子的 k 次方和。
- 约数个数函数 $d(n) = \sigma_0(n) = \sum_{d|n} 1$, 表示 n 的因子个数。
- 欧拉函数 $\varphi(n)$ 表示 $[1, n]$ 里和 n 互质的数个数。
- 莫比乌斯函数 $\mu(n)$ 。

常见积性函数

- 除数函数 $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, 表示 n 的因子的 k 次方和。
- 约数个数函数 $d(n) = \sigma_0(n) = \sum_{d|n} 1$, 表示 n 的因子个数。
- 欧拉函数 $\varphi(n)$ 表示 $[1, n]$ 里和 n 互质的数个数。
- 莫比乌斯函数 $\mu(n)$ 。
- 元函数 $e(n) = [n = 1]$, 完全函数。

常见积性函数

- 除数函数 $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, 表示 n 的因子的 k 次方和。
- 约数个数函数 $d(n) = \sigma_0(n) = \sum_{d|n} 1$, 表示 n 的因子个数。
- 欧拉函数 $\varphi(n)$ 表示 $[1, n]$ 里和 n 互质的数个数。
- 莫比乌斯函数 $\mu(n)$ 。
- 元函数 $e(n) = [n = 1]$, 完全函数。
- 恒等函数 $I(n) = 1$, 完全积性。

常见积性函数

- 除数函数 $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, 表示 n 的因子的 k 次方和。
- 约数个数函数 $d(n) = \sigma_0(n) = \sum_{d|n} 1$, 表示 n 的因子个数。
- 欧拉函数 $\varphi(n)$ 表示 $[1, n]$ 里和 n 互质的数个数。
- 莫比乌斯函数 $\mu(n)$ 。
- 元函数 $e(n) = [n = 1]$, 完全函数。
- 恒等函数 $I(n) = 1$, 完全积性。
- 单位函数 $id(n) = n$, 完全积性。

积性函数的性质

- 两个函数的狄利克雷卷积 $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$, 满足交换律、结合律, 对加法满足分配律。

积性函数的性质

- 两个函数的狄利克雷卷积 $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$, 满足交换律、结合律, 对加法满足分配律。
- 两个积性函数的乘积 $f(n)g(n)$ 也是积性函数。

积性函数的性质

- 两个函数的狄利克雷卷积 $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$, 满足交换律、结合律, 对加法满足分配律。
- 两个积性函数的乘积 $f(n)g(n)$ 也是积性函数。
- 两个积性函数的狄利克雷卷积也是积性函数。

积性函数的性质

- 两个函数的狄利克雷卷积 $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$, 满足交换律、结合律, 对加法满足分配律。
- 两个积性函数的乘积 $f(n)g(n)$ 也是积性函数。
- 两个积性函数的狄利克雷卷积也是积性函数。
- $f * e = e * f = f$ 。

积性函数的性质

- 两个函数的狄利克雷卷积 $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$, 满足交换律、结合律, 对加法满足分配律。
- 两个积性函数的乘积 $f(n)g(n)$ 也是积性函数。
- 两个积性函数的狄利克雷卷积也是积性函数。
- $f * e = e * f = f$ 。
- $\mu * I = e$, 即 $[n = 1] = \sum_{d|n} \mu(d)$ 。

积性函数的性质

- 两个函数的狄利克雷卷积 $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$, 满足交换律、结合律, 对加法满足分配律。
- 两个积性函数的乘积 $f(n)g(n)$ 也是积性函数。
- 两个积性函数的狄利克雷卷积也是积性函数。
- $f * e = e * f = f$ 。
- $\mu * I = e$, 即 $[n = 1] = \sum_{d|n} \mu(d)$ 。
- $\varphi * I = id$, 即 $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ 。

积性函数的性质

- 两个函数的狄利克雷卷积 $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$, 满足交换律、结合律, 对加法满足分配律。
- 两个积性函数的乘积 $f(n)g(n)$ 也是积性函数。
- 两个积性函数的狄利克雷卷积也是积性函数。
- $f * e = e * f = f$ 。
- $\mu * I = e$, 即 $[n = 1] = \sum_{d|n} \mu(d)$ 。
- $\varphi * I = id$, 即 $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ 。
- 若 $f = g * I$, 则 $g = f * \mu$, 即若 $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$, 则 $g(n) = \sum_{d|n} \mu(d)f(\frac{n}{d})$ 。

Counting Divisors

设 $d(n)$ 表示 n 的因子个数，给定 l, r, k ，求 $\sum_{i=l}^r d(i^k)$ 。

Counting Divisors

设 $d(n)$ 表示 n 的因子个数，给定 l, r, k ，求 $\sum_{i=l}^r d(i^k)$ 。

- $r \leq 10^{12}$ 。

Counting Divisors

设 $d(n)$ 表示 n 的因子个数，给定 l, r, k ，求 $\sum_{i=l}^r d(i^k)$ 。

- $r \leq 10^{12}$ 。
- $r - l \leq 10^6$ 。

Counting Divisors

设 $d(n)$ 表示 n 的因子个数，给定 l, r, k ，求 $\sum_{i=l}^r d(i^k)$ 。

- $r \leq 10^{12}$ 。
- $r - l \leq 10^6$ 。
- Source : 2017 Multi-University Training Contest 4

Solution

- 设 $n = \prod_{i=1}^m p_i^{e_i}$, 则 $d(n^k) = \prod_{i=1}^m (e_i^k + 1)$ 。

Solution

- 设 $n = \prod_{i=1}^m p_i^{e_i}$, 则 $d(n^k) = \prod_{i=1}^m (e_i^k + 1)$ 。
- 只要将 $[l, r]$ 的数都分解质因数问题就做完了。

Solution

- 设 $n = \prod_{i=1}^m p_i^{e_i}$, 则 $d(n^k) = \prod_{i=1}^m (e_i^k + 1)$ 。
- 只要将 $[l, r]$ 的数都分解质因数问题就做完了。
- 每个数最多只有一个 $> \sqrt{r}$ 的质因子。

Solution

- 设 $n = \prod_{i=1}^m p_i^{e_i}$, 则 $d(n^k) = \prod_{i=1}^m (e_i^k + 1)$ 。
- 只要将 $[l, r]$ 的数都分解质因数问题就做完了。
- 每个数最多只有一个 $> \sqrt{r}$ 的质因子。
- 用 $[2, \sqrt{r}]$ 的所有质数去分解 $[l, r]$ 里对应的倍数 , 最后处理未被分解的部分。

Solution

- 设 $n = \prod_{i=1}^m p_i^{e_i}$, 则 $d(n^k) = \prod_{i=1}^m (e_i^k + 1)$ 。
- 只要将 $[l, r]$ 的数都分解质因数问题就做完了。
- 每个数最多只有一个 $> \sqrt{r}$ 的质因子。
- 用 $[2, \sqrt{r}]$ 的所有质数去分解 $[l, r]$ 里对应的倍数 , 最后处理未被分解的部分。
- 时间复杂度 $O(\sqrt{r} + (r - l) \log \log r)$ 。

$$|\mu(n)|$$

T 次询问，每次给定一个 n ，求 $|\mu(n)|$ 。

$$|\mu(n)|$$

T 次询问，每次给定一个 n ，求 $|\mu(n)|$ 。

- $n \leq 10^{18}$ 。

$$|\mu(n)|$$

T 次询问，每次给定一个 n ，求 $|\mu(n)|$ 。

- $n \leq 10^{18}$ 。
- $T \leq 1000$ 。

Solution

- 用 $[2, \sqrt[3]{n}]$ 的所有质数去分解 n 。

Solution

- 用 $[2, \sqrt[3]{n}]$ 的所有质数去分解 n 。
- 考虑剩下的部分 m ，最多包含两个质因子。

Solution

- 用 $[2, \sqrt[3]{n}]$ 的所有质数去分解 n 。
- 考虑剩下的部分 m ，最多包含两个质因子。
- 若 $m > 1$ ，那么 m 只能是 p ， p^2 或者 pq 。

Solution

- 用 $[2, \sqrt[3]{n}]$ 的所有质数去分解 n 。
- 考虑剩下的部分 m ，最多包含两个质因子。
- 若 $m > 1$ ，那么 m 只能是 p ， p^2 或者 pq 。
- 当 $m = p$ 或者 pq 时对答案的贡献都是 1，当 $m = p^2$ 时答案是 0，开根号判断 m 是否是完全平方数即可。

Solution

- 用 $[2, \sqrt[3]{n}]$ 的所有质数去分解 n 。
- 考虑剩下的部分 m ，最多包含两个质因子。
- 若 $m > 1$ ，那么 m 只能是 p ， p^2 或者 pq 。
- 当 $m = p$ 或者 pq 时对答案的贡献都是 1，当 $m = p^2$ 时答案是 0，开根号判断 m 是否是完全平方数即可。
- 时间复杂度 $O(\frac{\sqrt[3]{n}}{\log n})$ 。

Minimal power of prime

T 次询问，每次给定一个 n ，设 $n = \prod_{i=1}^m p_i^{e_i}$ ，求 e_i 的最小值。

Minimal power of prime

T 次询问，每次给定一个 n ，设 $n = \prod_{i=1}^m p_i^{e_i}$ ，求 e_i 的最小值。

- $n \leq 10^{18}$ 。

Minimal power of prime

T 次询问，每次给定一个 n ，设 $n = \prod_{i=1}^m p_i^{e_i}$ ，求 e_i 的最小值。

- $n \leq 10^{18}$ 。
- $T \leq 100000$ 。

Minimal power of prime

T 次询问，每次给定一个 n ，设 $n = \prod_{i=1}^m p_i^{e_i}$ ，求 e_i 的最小值。

- $n \leq 10^{18}$ 。
- $T \leq 100000$ 。
- Source : IX Open Cup GP of Kharkiv

Solution

- 用 $[2, \sqrt[n]{n}]$ 的所有质数去分解 n 。

Solution

- 用 $[2, \sqrt[5]{n}]$ 的所有质数去分解 n 。
- 考虑剩下的部分 m , 最多包含四个质因子。

Solution

- 用 $[2, \sqrt[n]{n}]$ 的所有质数去分解 n 。
- 考虑剩下的部分 m ，最多包含四个质因子。
- 若 $m > 1$ 且 $ans > 1$ ，那么 m 只能是 p^2 ， p^3 ， p^4 ， $p^2 q^2$ 。

Solution

- 用 $[2, \sqrt[n]{n}]$ 的所有质数去分解 n 。
- 考虑剩下的部分 m ，最多包含四个质因子。
- 若 $m > 1$ 且 $ans > 1$ ，那么 m 只能是 p^2 ， p^3 ， p^4 ， $p^2 q^2$ 。
- 对于 $m = p^3$ 或 p^4 的情况，可以通过开 3 次或者 4 次根来判断。

Solution

- 用 $[2, \sqrt[5]{n}]$ 的所有质数去分解 n 。
- 考虑剩下的部分 m ，最多包含四个质因子。
- 若 $m > 1$ 且 $ans > 1$ ，那么 m 只能是 p^2 ， p^3 ， p^4 ， p^2q^2 。
- 对于 $m = p^3$ 或 p^4 的情况，可以通过开 3 次或者 4 次根来判断。
- 对于 $m = p^2$ 或者 p^2q^2 的情况，可以通过开 2 次根来判断。

Solution

- 用 $[2, \sqrt[5]{n}]$ 的所有质数去分解 n 。
- 考虑剩下的部分 m ，最多包含四个质因子。
- 若 $m > 1$ 且 $ans > 1$ ，那么 m 只能是 p^2 ， p^3 ， p^4 ， $p^2 q^2$ 。
- 对于 $m = p^3$ 或 p^4 的情况，可以通过开 3 次或者 4 次根来判断。
- 对于 $m = p^2$ 或者 $p^2 q^2$ 的情况，可以通过开 2 次根来判断。
- 时间复杂度 $O(\frac{\sqrt[5]{n}}{\log n})$ 。

Solar Panels

T 次询问, 每次给定 a, b, c, d , 找一对 i, j 满足 $a \leq i \leq b, c \leq j \leq d$ 且 $\gcd(i, j)$ 最大。

Solar Panels

T 次询问, 每次给定 a, b, c, d , 找一对 i, j 满足 $a \leq i \leq b, c \leq j \leq d$ 且 $\gcd(i, j)$ 最大。

■ $a, b, c, d \leq 10^9$ 。

Solar Panels

T 次询问, 每次给定 a, b, c, d , 找一对 i, j 满足 $a \leq i \leq b, c \leq j \leq d$ 且 $\gcd(i, j)$ 最大。

- $a, b, c, d \leq 10^9$ 。
- $T \leq 1000$ 。

Solar Panels

T 次询问, 每次给定 a, b, c, d , 找一对 i, j 满足 $a \leq i \leq b, c \leq j \leq d$ 且 $\gcd(i, j)$ 最大。

- $a, b, c, d \leq 10^9$ 。
- $T \leq 1000$ 。
- Source : POI 2014

Solution

- 枚举答案 k , 若 $[a, b]$ 与 $[c, d]$ 都有 k 的倍数则可行。

Solution

- 枚举答案 k , 若 $[a, b]$ 与 $[c, d]$ 都有 k 的倍数则可行。
- 这等价于 $\lfloor \frac{b}{k} \rfloor > \lfloor \frac{a-1}{k} \rfloor$ 且 $\lfloor \frac{d}{k} \rfloor > \lfloor \frac{c-1}{k} \rfloor$ 。

Solution

- 枚举答案 k , 若 $[a, b]$ 与 $[c, d]$ 都有 k 的倍数则可行。
- 这等价于 $\lfloor \frac{b}{k} \rfloor > \lfloor \frac{a-1}{k} \rfloor$ 且 $\lfloor \frac{d}{k} \rfloor > \lfloor \frac{c-1}{k} \rfloor$ 。
- 随着 k 从小到大变化, 上式只有 $O(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d})$ 种不同的取值, 分段枚举即可。

Solution

- 枚举答案 k , 若 $[a, b]$ 与 $[c, d]$ 都有 k 的倍数则可行。
- 这等价于 $\lfloor \frac{b}{k} \rfloor > \lfloor \frac{a-1}{k} \rfloor$ 且 $\lfloor \frac{d}{k} \rfloor > \lfloor \frac{c-1}{k} \rfloor$ 。
- 随着 k 从小到大变化, 上式只有 $O(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d})$ 种不同的取值, 分段枚举即可。
- 时间复杂度 $O(T(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}))$ 。

Zap

T 次询问, 每次给定 n, m, d , 问有多少对 i, j 满足 $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ 且 $\gcd(i, j) = d$ 。

Zap

T 次询问, 每次给定 n, m, d , 问有多少对 i, j 满足 $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ 且 $\gcd(i, j) = d$ 。

■ $n, m, d \leq 50000$ 。

Zap

T 次询问, 每次给定 n, m, d , 问有多少对 i, j 满足 $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ 且 $\gcd(i, j) = d$ 。

- $n, m, d \leq 50000$ 。
- $T \leq 50000$ 。

Zap

T 次询问，每次给定 n, m, d ，问有多少对 i, j 满足 $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ 且 $\gcd(i, j) = d$ 。

- $n, m, d \leq 50000$ 。
- $T \leq 50000$ 。
- Source : POI 2007

Solution

- 将 n, m, d 都除以 d , 等价于统计有多少数互质。

Solution

- 将 n, m, d 都除以 d , 等价于统计有多少数互质。



$$ans = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [\gcd(i, j) = 1]$$

Solution

- 将 n, m, d 都除以 d , 等价于统计有多少数互质。



$$ans = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [\gcd(i, j) = 1]$$

- 利用 $[n = 1] = \sum_{d|n} \mu(d)$ 化简式子。

Solution



$$\begin{aligned}
 ans &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [\gcd(i, j) = 1] \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{d \mid \gcd(i, j)} \mu(d) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{d \mid i, d \mid j} \mu(d) \\
 &= \sum_d \mu(d) \sum_{1 \leq i \leq n, d \mid i} 1 \sum_{1 \leq j \leq m, d \mid j} 1 \\
 &= \sum_d \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor
 \end{aligned}$$

Solution

- $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor \lfloor \frac{m}{d} \rfloor$ 一共有 $O(\sqrt{n} + \sqrt{m})$ 段不同的取值，分段枚举即可。

Solution

- $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor \lfloor \frac{m}{d} \rfloor$ 一共有 $O(\sqrt{n} + \sqrt{m})$ 段不同的取值，分段枚举即可。
- 时间复杂度 $O(\sqrt{n} + \sqrt{m})$ 。

数列

问有多少正整数数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 满足 $1 \leq a_i \leq \lim_i$ 且 $\gcd(a_{i-1}, a_i) \leq k$ 。

数列

问有多少正整数数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 满足 $1 \leq a_i \leq \text{lim}_i$ 且 $\gcd(a_{i-1}, a_i) \leq k$ 。

- $n, k, \sum \text{lim}_i \leq 1000000$ 。

数列

问有多少正整数数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 满足 $1 \leq a_i \leq \text{lim}_i$ 且 $\gcd(a_{i-1}, a_i) \leq k$ 。

- $n, k, \sum \text{lim}_i \leq 1000000$ 。
- Source : BZOJ 5472

Solution

- 注意到 $\sum \lim_i \leq 1000000$, 设 $f_{i,j}$ 表示考虑了数列前 i 项 , 第 i 项的值为 j 的方案数。

Solution

- 注意到 $\sum \lim_i \leq 1000000$, 设 $f_{i,j}$ 表示考虑了数列前 i 项 , 第 i 项的值为 j 的方案数。
- 设 a_j 表示 $f_{i-1,j}$, b_j 表示 $f_{i,j}$, 则显然 $b_i = \sum_j a_j [\gcd(i,j) \leq k]$ 。

Solution



$$\begin{aligned}
 \sum_j a_j [\gcd(i, j) \leq k] &= \sum_{d=1}^k \sum_j a_j [\gcd(i, j) = d] \\
 &= \sum_{d|i, d \leq k} \sum_j a_{dj} [\gcd(\frac{i}{d}, j) = 1] = \sum_{d|i, d \leq k} \sum_j a_{dj} \sum_{t|\frac{i}{d}, t|j} \mu(t) \\
 &= \sum_{t|\frac{i}{d}} \mu(t) \sum_{d \leq k} \sum_{t|j} a_{dj} = \sum_{td|i} \mu(t) \sum_{d \leq k} \sum_{t|j} a_{dj}
 \end{aligned}$$

Solution



$$\begin{aligned}
 \sum_j a_j [\gcd(i, j) \leq k] &= \sum_{d=1}^k \sum_j a_j [\gcd(i, j) = d] \\
 &= \sum_{d|i, d \leq k} \sum_j a_{dj} [\gcd(\frac{i}{d}, j) = 1] = \sum_{d|i, d \leq k} \sum_j a_{dj} \sum_{t|\frac{i}{d}, t|j} \mu(t) \\
 &= \sum_{t|\frac{i}{d}} \mu(t) \sum_{d \leq k} \sum_{t|j} a_{dj} = \sum_{td|i} \mu(t) \sum_{d \leq k} \sum_{t|j} a_{dj}
 \end{aligned}$$

■ 设 $D = dt$, $d = \frac{D}{t}$ 继续化简。

Solution



$$\begin{aligned} & \sum_{td|i} \mu(t) \sum_{d \leq k} \sum_{t|j} a_{dj} \\ = & \sum_{D|i} \sum_{t|D} \mu(t) \left[\frac{D}{t} \leq k \right] \sum_{t|j} a_{\frac{D}{t}j} \\ = & \sum_{D|i} \sum_{t|D} \mu(t) \left[\frac{D}{t} \leq k \right] \sum_{D|j} a_j \end{aligned}$$

Solution



$$\begin{aligned}
 & \sum_{td|i} \mu(t) \sum_{d \leq k} \sum_{t|j} a_{dj} \\
 = & \sum_{D|i} \sum_{t|D} \mu(t) \left[\frac{D}{t} \leq k \right] \sum_{t|j} a_{\frac{D}{t}j} \\
 = & \sum_{D|i} \sum_{t|D} \mu(t) \left[\frac{D}{t} \leq k \right] \sum_{D|j} a_j
 \end{aligned}$$

■ 设 $c_j = a_j + a_{2j} + a_{3j} + \dots$ 继续化简。

Solution



$$\begin{aligned} & \sum_{D|i} \sum_{t|D} \mu(t) \left[\frac{D}{t} \leq k \right] \sum_{D|j} a_j \\ &= \sum_{D|i} \sum_{t|D} \mu(t) \left[\frac{D}{t} \leq k \right] c_D \\ &= \sum_{D|i} c_D h(D) \end{aligned}$$

Solution



$$\begin{aligned} & \sum_{D|i} \sum_{t|D} \mu(t) \left[\frac{D}{t} \leq k \right] \sum_{D|j} a_j \\ &= \sum_{D|i} \sum_{t|D} \mu(t) \left[\frac{D}{t} \leq k \right] c_D \\ &= \sum_{D|i} c_D h(D) \end{aligned}$$

- 其中 $h(D) = \sum_{t|D} \mu(t) \left[\frac{D}{t} \leq k \right]$, 可以 $O(n \log n)$ 预处理。

Solution



$$\begin{aligned}
 & \sum_{D|i} \sum_{t|D} \mu(t) \left[\frac{D}{t} \leq k \right] \sum_{D|j} a_j \\
 &= \sum_{D|i} \sum_{t|D} \mu(t) \left[\frac{D}{t} \leq k \right] c_D \\
 &= \sum_{D|i} c_D h(D)
 \end{aligned}$$

- 其中 $h(D) = \sum_{t|D} \mu(t) \left[\frac{D}{t} \leq k \right]$, 可以 $O(n \log n)$ 预处理。
- 而每个 b_i 的计算都可以通过枚举 i 的因子 D 来计算 , 时间复杂度 $O(\lim \log \lim)$ 。

数表

有一张 $n \times m$ 的数表, (i, j) 的值为 $f(\gcd(i, j))$ 。

数表

有一张 $n \times m$ 的数表, (i, j) 的值为 $f(\gcd(i, j))$ 。

给定 a , 求数表中所有不超过 a 的数的和。

数表

有一张 $n \times m$ 的数表, (i, j) 的值为 $f(\gcd(i, j))$ 。

给定 a , 求数表中所有不超过 a 的数的和。

- $n, m \leq 100000$ 。

数表

有一张 $n \times m$ 的数表, (i, j) 的值为 $f(\gcd(i, j))$ 。

给定 a , 求数表中所有不超过 a 的数的和。

- $n, m \leq 100000$ 。
- $T \leq 20000$ 。

数表

有一张 $n \times m$ 的数表, (i, j) 的值为 $f(\gcd(i, j))$ 。

给定 a , 求数表中所有不超过 a 的数的和。

- $n, m \leq 100000$ 。
- $T \leq 20000$ 。
- Source : SDOI 2014

Solution

- 先不管 a 的限制。

Solution

- 先不管 a 的限制。



$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\gcd(i, j)) &= \sum_d f(d) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [\gcd(i, j) = d] \\
 &= \sum_d f(d) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} [\gcd(i, j) = 1] = \sum_d f(d) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} \sum_{k|i, k|j} \mu(k) \\
 &= \sum_k \mu(k) \sum_d f(d) \lfloor \frac{n}{dk} \rfloor \lfloor \frac{m}{dk} \rfloor
 \end{aligned}$$

Solution

- 先不管 a 的限制。



$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\gcd(i, j)) &= \sum_d f(d) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [\gcd(i, j) = d] \\
 &= \sum_d f(d) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} [\gcd(i, j) = 1] = \sum_d f(d) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} \sum_{k|i, k|j} \mu(k) \\
 &= \sum_k \mu(k) \sum_d f(d) \lfloor \frac{n}{dk} \rfloor \lfloor \frac{m}{dk} \rfloor
 \end{aligned}$$

- 设 $D = dk$, $k = \frac{D}{d}$ 继续化简。

Solution



$$\begin{aligned} & \sum_k \mu(k) \sum_d f(d) \lfloor \frac{n}{dk} \rfloor \lfloor \frac{m}{dk} \rfloor \\ = & \sum_D \lfloor \frac{n}{D} \rfloor \lfloor \frac{m}{D} \rfloor \sum_{d|D} f(d) \mu(\frac{D}{d}) \\ = & \sum_D \lfloor \frac{n}{D} \rfloor \lfloor \frac{m}{D} \rfloor g(D) \end{aligned}$$

Solution



$$\begin{aligned}
 & \sum_k \mu(k) \sum_d f(d) \lfloor \frac{n}{dk} \rfloor \lfloor \frac{m}{dk} \rfloor \\
 = & \sum_D \lfloor \frac{n}{D} \rfloor \lfloor \frac{m}{D} \rfloor \sum_{d|D} f(d) \mu(\frac{D}{d}) \\
 = & \sum_D \lfloor \frac{n}{D} \rfloor \lfloor \frac{m}{D} \rfloor g(D)
 \end{aligned}$$

- 其中 $g(D) = \sum_{d|D} f(d) \mu(\frac{D}{d})$, 假设知道了 g , 则可以分段在 $O(\sqrt{n} + \sqrt{m})$ 的时间内回答一个询问。

Solution

- 现在考虑原问题：有 a 的限制怎么办？

Solution

- 现在考虑原问题：有 a 的限制怎么办？
- 离线询问，一边更新 g 一边回答，树状数组维护 g 的区间和。

Solution

- 现在考虑原问题：有 a 的限制怎么办？
- 离线询问，一边更新 g 一边回答，树状数组维护 g 的区间和。
- 加入一个 $f(d)$ 需要更新所有它的倍数的 D ，共 $O(n \log n)$ 次。

Solution

- 现在考虑原问题：有 a 的限制怎么办？
- 离线询问，一边更新 g 一边回答，树状数组维护 g 的区间和。
- 加入一个 $f(d)$ 需要更新所有它的倍数的 D ，共 $O(n \log n)$ 次。
- 总时间复杂度 $O(n \log^2 n + T \sqrt{n} \log n)$ 。

Just a Math Problem

设 $f(k)$ 表示 k 的不同质因子个数, $g(k) = 2^{f(k)}$ 。

Just a Math Problem

设 $f(k)$ 表示 k 的不同质因子个数, $g(k) = 2^{f(k)}$ 。

给定 n , 求 $\sum_{i=1}^n g(i)$ 。

Just a Math Problem

设 $f(k)$ 表示 k 的不同质因子个数, $g(k) = 2^{f(k)}$ 。

给定 n , 求 $\sum_{i=1}^n g(i)$ 。

■ $n \leq 10^{12}$ 。

Just a Math Problem

设 $f(k)$ 表示 k 的不同质因子个数, $g(k) = 2^{f(k)}$ 。

给定 n , 求 $\sum_{i=1}^n g(i)$ 。

- $n \leq 10^{12}$ 。
- Source : 2016 年中国大学生程序设计竞赛 (杭州)

Solution

- 一个数 n 是 square-free 的, 当且仅当 n 不是任何一个大于 1 的数的平方。

Solution

- 一个数 n 是 square-free 的, 当且仅当 n 不是任何一个大于 1 的数的平方。
- 显然 $g(k) = k$ 的 square-free 的因子个数。

Solution

- 一个数 n 是 square-free 的, 当且仅当 n 不是任何一个大于 1 的数的平方。
- 显然 $g(k) = k$ 的 square-free 的因子个数。
- square-free 的数可以用 $\mu^2(n)$ 表示。

Solution

- 一个数 n 是 square-free 的, 当且仅当 n 不是任何一个大于 1 的数的平方。
- 显然 $g(k) = k$ 的 square-free 的因子个数。
- square-free 的数可以用 $\mu^2(n)$ 表示。
-

$$ans = \sum_{i=1}^n g(i) = \sum_{i=1}^n \sum_{d|i} \mu^2(d)$$

Solution

- 一个数 n 是 square-free 的, 当且仅当 n 不是任何一个大于 1 的数的平方。
- 显然 $g(k) = k$ 的 square-free 的因子个数。
- square-free 的数可以用 $\mu^2(n)$ 表示。
-

$$ans = \sum_{i=1}^n g(i) = \sum_{i=1}^n \sum_{d|i} \mu^2(d)$$

- 利用 $\mu^2(n) = \sum_{d^2|n} \mu(d)$ 化简式子, 相当于枚举完全平方因子去容斥。

Solution



$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{d|i} \mu^2(d) &= \sum_{i=1}^n \sum_{d|i} \sum_{k^2|d} \mu(k) \\ &= \sum_{k=1}^n \mu(k) \sum_{k^2|d} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor = \sum_{k=1}^n \mu(k) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{k^2} \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{k^2 i} \right\rfloor \\ &= \sum_{k=1}^{\sqrt{n}} \mu(k) S\left(\left\lfloor \frac{n}{k^2} \right\rfloor\right) \end{aligned}$$

Solution



$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \sum_{d|i} \mu^2(d) &= \sum_{i=1}^n \sum_{d|i} \sum_{k^2|d} \mu(k) \\
 &= \sum_{k=1}^n \mu(k) \sum_{k^2|d} \lfloor \frac{n}{d} \rfloor = \sum_{k=1}^n \mu(k) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{k^2} \rfloor} \lfloor \frac{n}{k^2 i} \rfloor \\
 &= \sum_{k=1}^{\sqrt{n}} \mu(k) S(\lfloor \frac{n}{k^2} \rfloor)
 \end{aligned}$$

■ 其中

$$S(n) = \sum_{i=1}^n \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$$

Solution

- 枚举所有 k , 然后分段计算 S 即可 , 当 n 比较小的时候可以记忆化 $S(n)$ 。

Solution

- 枚举所有 k , 然后分段计算 S 即可 , 当 n 比较小的时候可以记忆化 $S(n)$ 。
- 时间复杂度

$$\begin{aligned} T(n) &= O(\sqrt{n} + \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n}{i^2}}) \\ &= O(\sqrt{n} \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} \frac{1}{i}) \\ &= O(\sqrt{n} \log n) \end{aligned}$$

Thank you!