

2024-2025 竞赛班讲义 (非数学类) 上

柯西永远爱你

2025 年 5 月 21 日

[illegible]

年轻人，你渴望力量吗？

目录

第一章 前言	2
第二章 数列与极限	3
2.1 基本极限运算	4
2.2 单调有界原理应用	10
2.3 求通项方法	13
2.4 stolz 公式应用	18
2.5 递推数列性态分析	21
2.6 综合问题	25
2.7 练习题	30
第三章 函数极限与导数	31
3.1 基本概念与题目	32
3.2 函数方程问题	41
3.3 求导法则与高阶导数计算	43
3.4 综合问题	46
3.5 练习题	52
第四章 中值定理	53
4.1 基础题目	54
4.2 K 值法与插值方法	58
4.3 微分方程方法	61
4.4 性态分析方法	64
4.5 综合问题	66
4.6 命题方法与原理介绍	73
4.7 练习题	76
第五章 积分计算	77
5.1 不定积分计算	78
5.2 付汝兰尼积分	84
5.3 常见的定积分计算方法	86
5.4 几何应用	90
5.5 综合问题	94

5.6 练习题	102
第六章 积分不等式初步	103
6.1 基础题目	105
6.2 几何意义类型	108
6.3 被积函数放缩法	109
6.4 柯西不等式与配方	110
6.5 综合问题	114
6.6 练习题	121
第七章 微分方程问题	122
7.1 各类标准类型的微分方程	123
7.2 综合问题	129
7.3 练习题	137
第八章 决赛线性代数	138
8.1 矩阵基本问题	139
8.2 分块矩阵	144
8.3 特征值与相似对角化	147
8.4 二次型与实对称矩阵	149
8.5 综合问题	152
8.6 练习题	158
第九章 16 届决赛非数学类	159
第十章 习题答案	167
10.1 第二章习题答案	167
10.2 第三章习题答案	172
10.3 第四章习题答案	174
10.4 第五章习题答案	178
10.5 第六章习题答案	183
10.6 第七章习题答案	187
10.7 第八章习题答案	189
第十一章 补充题	191

第一章 前言

这是 2024-2025 第一期竞赛班的非数学类讲义，全部内容和答案均已经更新完毕，此即最终版（细节和排版错误如果比较多，影响理解，后续会再发修正版）。本期讲义主要以微积分课本上册内容为主，除此以外还有针对决赛的线性代数内容。

目录所列出的是本期课程将会讲解的全部内容，并且依次为微积分，线性代数，实际上课顺序会有所调整，顺应大一学生的学习进度。

数学类讲义与非数讲义完全不会重复，对于非数学生来说，将非数讲义吃透就足够用了，除非你确实很感兴趣，想多学一些，否则完全可以不看数学类的讲义。但是对于数学类学生来说则不一样，部分基础内容数学类是不讲的（在非数讲解），所以数学类基础不好的，看数学类费劲的学生，有必要看我们非数的课程。

讲义细分了大专题和每个专题下的具体小节，必要的（课本没有的）知识点会在专题中补充并列出，相应的定理也会有证明过程，部分例题或练习题有一定难度，觉得吃力可以跳过部分题目；练习题是针对这一大专题而给出的，并非针对其中某个特定小专题；练习题答案在最后一章，以对应章节的习题 + 答案形式呈现。

大家应该掌握 mathematica（手机端对应的是简易版 wolfram alpha）、几何画板（手机端对应 geogebra）的使用方法，并下载安装好，平时很多极限、积分、级数计算问题，函数图像问题，递推数列问题，微分方程问题等等都可以利用这些软件快速解决，而且操作很简便。特别是面对钓鱼题时，会用软件可以帮你快速鉴别出来；对于平时拿不准的计算问题，鼓励大家用软件辅助检查，效率比发到群里让大家帮你验算和检查一遍要高很多。

第二章 数列与极限

数列与极限是微积分课本的第一章,也是整个微积分的基础,主要涉及的就是数列极限计算,递推数列分析(往往是单调有界原理和蛛网图方法),stolz 公式求极限,高考不等式这些内容,它可以与很多其他知识结合在一起考察,包括泰勒公式,积分,级数等等,因此可以玩出很多花样,综合性也能够很强,不过本章我们的重点还是数列极限问题本身,大部分题目不会涉及后面章节的内容,少数综合题确实无可避免要借用一点后面的知识点。

我们需要知道的知识点就是课本上面的基本公式:单调有界原理, stolz 公式, 泰勒公式, 还有估算阶乘最好用的公式也就是斯特林公式, 在任何一本微积分教材中均有

关于递推数列问题,其实可以总结一下函数递增时数列会是什么情况,函数递减时候又有哪些可能性,一阶不动点,二阶不动点又会带来哪些影响,但是总结这些东西并没有什么用处,因为没有任何一个结果是深刻的定理,而且你也记不住或者容易记混

下面这些简单的总结大致看看就行,不用记,都是显然的且可以快速现推出来,需要什么证什么即可

结论 2.0.1

设数列 $\{x_n\}$ 满足递推公式 $x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbf{N}_+$. 若有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$, 同时又成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\xi)$ 则极限 ξ 一定是方程 $f(x) = x$ 的根 (这时称 ξ 为函数 f 的不动点).

结论 2.0.2

设 $\{x_n\}$ 满足关系 $x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbf{N}_+$, 其中的函数 f 在区间 I 上单调, 同时数列 $\{x_n\}$ 的每一项都在区间 I 中, 则只有两种可能: (1) 当 f 为单调增加时, $\{x_n\}$ 为单调数列; (2) 当 f 为单调减少时, $\{x_n\}$ 的两个子列 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 分别为单调数列, 且具有相反的单调性.

结论 2.0.3

设 a 是 $f(x)$ 的不动点, 函数 f 在 a 处连续, 在点 a 的邻域 $(a-r, a+r)$ 中严格单调增加, 并且在区间 $(a-r, a)$ 上有 $f(x) > x$, 而在区间 $(a, a+r)$ 上有 $f(x) < x$, 那么由迭代生成的数列只要第一项在 $(a-r, a+r)$ 内, 且不等于 a , 则以后就不会越出这个区间, 而且是以 a 为极限的严格单调数列.

一句话概括下来就是递增时候通常单调有界就能解决问题, 递减时候二次复合递增, 于是奇偶两个子列通常具有单调性, 再一个就是看见递推数列问题一定要去考虑不动点, 并画蛛网图分析数列的走势, 当你看见了数列的某种变化规律之后, 去把它证明一下就可以了, 往往就是简单的归纳法验证, 语文或者高考数学内容

这一章的内容只要高考数学掌握的好, 就能轻松解决问题, 因为几乎全是初等不等式放缩以及配凑, 所以在面对各种各样的数列极限问题时候, 千万不要忘记高中所学的内容, 很多时候解决大学数学的问题, 就是仅仅需要高中知识和高考技巧

2.1 基本极限运算

例题 2.1.1 对正整数 v , 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \dots (k+v)}$

证明. 直接裂项

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \dots (k+v)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{v} \left(\frac{1}{k(k+1) \dots (k+v-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2) \dots (k+v)} \right) \\ &= \frac{1}{v} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{v!} - \frac{1}{(n+1)(n+2) \dots (n+v)} \right) = \frac{1}{v \cdot v!} \end{aligned}$$

□

例题 2.1.2 设 $|x| < 1$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2) \dots (1+x^{2^n})$

证明. 平方差公式即可:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2) \dots (1+x^{2^n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2) \dots (1+x^{2^n})}{1-x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x^2)(1+x^2) \dots (1+x^{2^n})}{1-x} = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} = \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

□

注释 2.1.1: 如果把幂次 $1, 2, 2^2, \dots$ 改成 $1, 2, 3, \dots$, 那么显然极限存在, 但是并不能求出来, 要引入别的特殊函数, 省流就是: 钓鱼题

通常，带着一堆 $\ln$ 的极限算起来都非常烦人，并不是简单的一个泰勒就秒杀的，比如这种题

例题 2.1.3 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2x^2 + 3x + 1) \ln x}{x \ln(1+x)} \arctan x - \pi x \right)$.

证明. 根据洛必达法则，显然 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}} = 1$ ，拆分一下有

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2x^2 + 3x + 1) \ln x}{x \ln(1+x)} \arctan x - \pi x \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((2x + 3) \frac{\ln x}{\ln(1+x)} \arctan x - \pi x \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x \ln(1+x)} \arctan x \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x \ln x}{\ln(1+x)} \arctan x - \pi x \right) + 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(1+x)} \arctan x \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{\ln(1+x)} \arctan x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{3}{2} \pi \\
 &= 2 \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{\ln(1+x)} \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{\ln(1+x)} - 1 \right) \right) + \frac{3}{2} \pi \\
 &= 2 \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(1+x)} \right) + \frac{3}{2} \pi \\
 &= 2 \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} - \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(1+x)} \right) + \frac{3}{2} \pi \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} + \frac{3}{2} \pi = \frac{3}{2} \pi - 2
 \end{aligned}$$

□

注释 2.1.2: 做这种题一定要严格处理余项，不要想当然，比如下面的做法就是错的（过程和答案都不对）

$$\frac{(2x^2 + 3x + 1) \ln x}{x \ln(1+x)} \arctan x - \pi x \approx (2x + 3) \frac{\ln x}{\ln(1+x)} \arctan x - \pi x \approx (2x + 3) \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi x = \frac{3\pi}{2}$$

另外这种题不建议用泰勒，很多时候等价无穷小替换以及拆项会方便不少

幂指函数的极限问题, 一律写成 $e^{\ln}$ 形式, 并利用等价无穷小替换去解决, 方便

例题 2.1.4 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\sin x} - (\sin x)^x}{x^3 \ln x}$.

证明. 先说明写成 $e^{\ln}$ 形式后, 指数部分都是趋于零的, 然后等价无穷小替换即可

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\sin x} - (\sin x)^x}{x^3 \ln x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin x)^x e^{\sin x \ln x - x \ln \sin x} - 1}{x^3 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sin x \ln x - x \ln \sin x} - 1}{x^3 \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x \ln x - x \ln \sin x}{x^3 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x \ln x - x \ln x + x \ln x - x \ln \sin x}{x^3 \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - \ln \sin x}{x^2 \ln x} = -\frac{1}{6} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2 \ln x}, \quad \frac{\sin x}{x} \sim 1 - \frac{1}{6}x^2 \\ &= -\frac{1}{6} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \frac{\sin x - x}{x})}{x^2 \ln x} = -\frac{1}{6} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x^3 \ln x} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

□

注释 2.1.3: 不要用泰勒做这个题, 因为你需要分别展开好几项直到余项是高阶无穷小才可以, 等价无穷小替换则只需要看第一项并且是严谨的, 泰勒则至少需要展开三项, 计算量爆炸, 大致如下

$$\begin{aligned} x^{\sin x} &= e^{\sin x \ln x} = 1 + \sin x \ln x + \frac{1}{2} \sin^2 x \ln^2 x + \frac{1}{6} \sin^3 x \ln^3 x + O(x^4 \ln^4 x) \\ (\sin x)^x &= e^{x \ln \sin x} = 1 + x \ln \sin x + \frac{1}{2} x^2 \ln^2 \sin x + \frac{1}{6} x^3 \ln^3 \sin x + O(x^4 \ln^4 \sin x) \end{aligned}$$

然后你不仅要看第一项, 还要检查并验证平方项, 三次方项作差后对应的极限是零, 麻烦

例题 2.1.5 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(e^{(1+\frac{1}{x})^x} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{e^x} \right)$.

证明.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} ex \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = e \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(e^{(1+\frac{1}{x})^x} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{e^x} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ex} \left(e^{(1+\frac{1}{x})^x - ex \ln(1+\frac{1}{x})} - 1 \right) \\ &= e^e \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(e^{(1+\frac{1}{x})^x - ex \ln(1+\frac{1}{x})} - 1 \right) = e^e \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - ex \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) \\ &= e^e \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(e^{x \ln(1+\frac{1}{x})} - ex \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) = e^{e+1} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(e^{x \ln(1+\frac{1}{x})-1} - x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) \\ &= e^{e+1} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \frac{1}{2} \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \right)^2 = \frac{e^{e+1}}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - x \right)^2 = \frac{e^{e+1}}{8} \end{aligned}$$

□

分段放缩方法是处理极限证明题的一个很好的工具, 本题称为 Toeplitz 定理, 虽然没什么用, 但是思想重要

例题 2.1.6 设对 $n, k \in \mathbf{N}_+$, 有 (二元数列) $t_{nk} \geq 0$. 又有 $\sum_{k=1}^n t_{nk} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} = 0$. 若已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 定义

$$x_n = \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k, n \in \mathbf{N}_+. \text{ 证明: } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

几种变型: (1) 将条件 $\sum_{k=1}^n t_{nk} = 1$ 改为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} = 1$;

(2) 不要求 t_{nk} 非负, 将 (1) 中的条件改为存在 $M > 0$, 使得对每个 n , 成立不等式 $|t_{n1}| + \cdots + |t_{nn}| \leq M$. 则结论对 $a = 0$ 仍成立.

证明. 显然 (1) 强于原题, 直接看 (1)

根据条件可知, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得 $n > N$ 时恒有 $|a_n - a| < \varepsilon$, 于是 $n > N$ 时

$$\begin{aligned} |x_n - a| &\leq \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} (a_k - a) \right| + \left| \sum_{k=N+1}^n t_{nk} (a_k - a) \right| + |a| \left| \sum_{k=1}^n t_{nk} - 1 \right| \\ \left| \sum_{k=N+1}^n t_{nk} (a_k - a) \right| &\leq \sum_{k=N+1}^n t_{nk} |a_k - a| \leq \varepsilon \sum_{k=N+1}^n t_{nk} \leq \varepsilon \sum_{k=1}^n t_{nk} \end{aligned}$$

注意 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} = 1$ 极限存在, 所以数列 $t_{n1} + \cdots + t_{nn}$ 是有界的, 故存在 M 使得 $\left| \sum_{k=1}^n t_{nk} \right| < M$ 恒成立
因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} (a_k - a) \right| = \sum_{k=1}^N \lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} (a_k - a) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n t_{nk} - 1 \right| = 0$$

所以存在 $N_0 > N$ 使得 $n > N_0$ 时恒有 $\left| \sum_{k=1}^N t_{nk} (a_k - a) \right| < \varepsilon, \left| \sum_{k=1}^n t_{nk} - 1 \right| < \varepsilon$, 进而

$$|x_n - a| \leq \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} (a_k - a) \right| + \left| \sum_{k=N+1}^n t_{nk} (a_k - a) \right| + |a| \left| \sum_{k=1}^n t_{nk} - 1 \right| \leq \varepsilon + M\varepsilon + |a|\varepsilon, \forall n > N_0$$

这就证明了 (1)

对于 (2), 采用上述同样的放缩有

$$|x_n| \leq \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} a_k \right| + \left| \sum_{k=N+1}^n t_{nk} a_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} a_k \right| + \varepsilon \sum_{k=N+1}^n |t_{nk}| \leq \varepsilon M + \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} a_k \right|$$

注意 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^N t_{nk} a_k \right| = 0$, 结论得证

□

例题 2.1.7 对 $x \geq 0$, 定义 $y_n(x) = \sqrt[n]{x[x \dots [x] \dots]}$, 这里一共 n 层取整, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$.

证明. 显然 $x \in [0, 1)$ 时 $y_n(x) = 0$, $x \in [1, 2)$ 时 $y_n(x) = 1$ (一层一层看, 是“不变”的), 这两个式子对任意 n 都成立, 下面来看 $x \geq 2$ 时的极限, 结合 $[x]$ 的基本不等式可知

$$\begin{aligned} u_n(x) &= y_n(x)^n = [x[x \dots [x] \dots]] \geq 2^n \rightarrow \infty \\ xu_{n-1}(x) - 1 &\leq u_n(x) = [xu_{n-1}(x)] \leq xu_{n-1}(x) \\ 1 - \frac{1}{u_{n-1}(x)} &\leq \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \leq x \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} = x, \forall x \geq 2 \end{aligned}$$

再根据 stolz 公式有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)^{\frac{1}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln u_n(x)}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln u_n(x) - \ln u_{n-1}(x)}{1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} = x$$

$$\text{因此 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \in [1, 2) \\ x, & x \geq 2 \end{cases}$$

□

注释 2.1.4: 这里求极限运用了递推的想法找关系, 如果直接对取整函数用不等式放缩, 只能得到 $x - 1 < y_n(x) \leq x$, 这没什么用处, 因为放缩太粗糙了

例题 2.1.8 对正整数 n , 方程 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+t} = e$ 的解记为 $t = t(n)$, 证明 $t(n)$ 关于 n 递增并求极限 $t(+\infty)$.

证明. 解方程得到

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+t} &= e \Leftrightarrow (n+t) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n \\ f(x) &= \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} - x, f'(x) = \frac{1}{\ln^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \frac{1}{x^2 + x} - 1 > 0 \\ \Leftrightarrow \ln^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) &< \frac{1}{x^2 + x} \Leftrightarrow \ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}, x > 0 \end{aligned}$$

最后的不等式显然成立, 于是单调递增得证, 再来求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}$$

□

有些求和的极限, 注意 n, k 不同阶, 因此直接泰勒就完事了

例题 2.1.9 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{k}} \right)$.

证明. 泰勒展开, 一致的有 $\frac{1}{n + \sqrt{k}} = \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{k}}{n}} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\sqrt{k}}{n} + \frac{k}{n^2} + \dots \right)$, 所以考虑拟合

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{k}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sqrt{k}}{n} \right) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{1 + \frac{\sqrt{k}}{n}} - 1 + \frac{\sqrt{k}}{n} \right) \right) \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{1 + \frac{\sqrt{k}}{n}} - 1 + \frac{\sqrt{k}}{n} \right) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{k}}{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{k}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sqrt{k}}{n} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

最后一步可以用 stolz 公式, 也可以直接用定积分定义

□

例题 2.1.10 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$.

证明. 注意 n, k 不同阶, 因此有理化然后直接把无穷小量放缩掉即可

$$\frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \leq \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 = \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} + 1} \leq \frac{k}{2n^2}$$

所以

$$\frac{n+1}{2n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)} = \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \leq \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2} = \frac{n+1}{4n}$$

根据夹逼准则可知所求极限是 $\frac{1}{4}$

□

2.2 单调有界原理应用

例题 2.2.1 设 $a_n, b_n \geq 0$ 且 $a_{n+1} < a_n + b_n$ 同时 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 证明: a_n 也收敛.

证明. 根据条件

$$a_{n+1} - a_n < b_n \Rightarrow a_{n+1} - a_1 < b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

所以 a_n 是有界的, 则存在一个收敛子列 $a_{n_k} \rightarrow A$, 要证明 $a_n \rightarrow A$

反证法, 则存在 $\delta > 0$ 和一系列 a_{m_k} 使得 $|a_{m_k} - A| \geq \delta$ 对任意 k 恒成立, 并且可以假设 $m_k > n_k$

分两种情况, 如果有无穷个 k 使得 $a_{m_k} - A \geq \delta$, 则对这些 k 都有

$$\begin{aligned} a_{m_k} - a_{n_k} &= a_{m_k} - a_{m_k-1} + \dots + a_{n_k+1} - a_{n_k} < b_{n_k} + b_{n_k+1} + \dots + b_{m_k-1} \\ a_{m_k} - a_{n_k} &= (a_{m_k} - A) + (A - a_{n_k}) \geq \delta - |a_{n_k} - A| \end{aligned}$$

当 k 充分大时, 因为级数收敛, 则第一个式子右端和 $|a_{n_k} - A|$ 都趋于零, 不等式矛盾

如果有无穷个 k 使得 $a_{m_k} - A \leq -\delta$, 则可以取 a_{n_k} 的一个子列 a_{t_k} 使得 $t_k > m_k$ 恒成立 (也就是在每一个 a_{m_k} 后面, 去找 a_{n_k} 这个数列里面的项), 相应的有

$$\begin{aligned} a_{t_k} - a_{m_k} &= a_{t_k} - a_{t_k-1} + \dots + a_{m_k+1} - a_{m_k} < b_{m_k} + b_{m_k+1} + \dots + b_{t_k-1} \\ a_{t_k} - a_{m_k} &= (a_{t_k} - A) + (A - a_{m_k}) \geq \delta - |a_{t_k} - A| \end{aligned}$$

同样道理可知矛盾, 结论得证

□

例题 2.2.2 设 $p > 1$, 令 $a_n = \sqrt[p]{b_1 + \sqrt[p]{b_2 + \dots + \sqrt[p]{b_n}}}$, $b_n > 0$, 证明: 数列 a_n 收敛等价于数列 $\frac{\ln b_n}{p^n}$ 有界.

证明. 设若 $\{a_n\}$ 收敛, 则将有 $a_n \geq \sqrt[p]{0 + \sqrt[p]{0 + \dots + \sqrt[p]{b_n}}} = (b_n)^{\frac{1}{p^n}}$,

因为 $\{a_n\}$ 有界, 则 $\{(b_n)^{\frac{1}{p^n}}\}$ 也有界, 取对数后也就相当于 $\left\{\frac{\ln b_n}{p^n}\right\}$ 有界, 得证

设若 $\left\{\frac{\ln b_n}{p^n}\right\}$ 有界, 也即 $\{(b_n)^{\frac{1}{p^n}}\}$ 有界, 则存在 $M > 0$ 使得对所有 n 都有 $(b_n)^{\frac{1}{p^n}} \leq M$, 于是 $b_n \leq (M)^{p^n}$ 如此, 则有

$$a_n \leq \sqrt[p]{M^p + \sqrt[p]{M^{p^2} + \dots + \sqrt[p]{M^{p^n}}}} = M \sqrt[p]{1 + \sqrt[p]{1 + \dots + \sqrt[p]{1}}}$$

现在说明最后一个式子有界, 考虑数列 $x_1 = 1, x_{n+1} = (x_n + 1)^{\frac{1}{p}}$ 则显然 $x_n > 0$, 记 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{p}}$ 则

$$f'(x) = \frac{1}{p}(1+x)^{\frac{1}{p}-1} < \frac{1}{p}, x > 0$$

显然 $f(x) = x$ 有唯一解 $a > 1$, 则

$$|x_{n+1} - a| = |f(x_n) - f(a)| = f'(\xi)|x_n - a| < \frac{1}{p}|x_n - a| < \dots < \frac{1}{p^n}|x_1 - a| \rightarrow 0$$

显然 x_n 单调递增, 故 x_n 递增收敛于 a , 也就是说 a_n 是有界的, 而递增性显然, 单调有界可知 $\{a_n\}$ 收敛

□

注: 这个看着很抽象的结果叫做 Herschfeld 判别法, 但是证明起来只需要单调有界

斯特林公式是处理阶乘的万能工具，但是在没有它的时候，一些定性分析问题可以用高考方法代替

例题 2.2.3 设 $a_n = \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1}$, 证明: 数列 a_n 收敛到一个正数.

证明. 直接做商看大小:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+3}}{\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1}} = \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} = 1 + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

所以 a_n 单调递增, 再证明有界即可

$$\begin{aligned} \ln a_{n+1} - \ln a_n &= \ln \left(1 + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \right) < \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \\ \Rightarrow \ln a_n &< \ln a_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} \right) < \ln a_1 + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

由此可见数列有界, 结论得证

□

例题 2.2.4 设 $a_{n+1} = \ln \left(\frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \right)$, $a_1 = 1$, 证明: 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n$ 存在.

证明. 先直观分析, 画图发现 a_n 递减趋于零, 然后在 $x = 0$ 泰勒展开估计一下收敛速度

$$a_{n+1} = \ln \left(\frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \right) = \ln \left(1 + \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{6}a_n^2 + \dots \right) = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{24}a_n^2 + \dots \approx \frac{1}{2}a_n$$

由此推测题目的极限存在, 并考虑

$$a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = \ln \left(\frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \right) - \frac{1}{2}a_n \Rightarrow 2^{n+1}a_{n+1} - 2^n a_n = 2^{n+1} \left(\ln \left(\frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \right) - \frac{1}{2}a_n \right)$$

现在可以裂项相消, 于是说明极限存在, 只要证明右边的求和收敛, 容易发现右边是恒正的, 问题转化为估计通项的阶, 直观的等价替换表明如果证明了 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \lambda$ 或者说 $a_n < \lambda^n$, 这里 $\lambda < 1$, 则

$$\ln \left(\frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \right) - \frac{1}{2}a_n \sim \frac{1}{24}a_n^2 < C\lambda^{2n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} \in (0, C(2\lambda^2)^n)$$

只要 $2\lambda^2 < 1$ 就能够完成证明, 思路已经梳理清晰, 下面正式开始证明

设 $f(x) = \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$, $f(0) = 0$, 则

$$f(x) < x \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{x} < e^x \Leftrightarrow \ln x > 1 - \frac{1}{x}$$

显然成立, 由此可见 a_n 单调递减, 结合 $e^x > 1 + x$ 可知 a_n 恒正, 于是 a_n 极限存在, 由于 $f(x) = x$ 只有 $x = 0$ 唯一解, 所以 a_n 单调递减趋于零, 下面做进一步估计

先证明两个不等式: $f(x) > \frac{1}{2}x$, $f''(x) > 0, \forall x > 0$

$$\begin{aligned} f(x) > \frac{1}{2}x &\Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{x} > e^{\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow \frac{t^2 - 1}{2 \ln t} > t \Leftrightarrow \ln t < \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right), t > 1 \\ f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x}, f''(x) &= \frac{1}{x^2} - \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln^2 t} > \frac{t}{(t - 1)^2} \Leftrightarrow \ln t < \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}, t > 1 \end{aligned}$$

最后的不等式都是熟知的高考放缩, 所以这两个不等式成立, 进而

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n &= \ln \left(\frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \right) - \frac{1}{2}a_n \Rightarrow 2^{n+1}a_{n+1} - 2^n a_n = 2^{n+1} \left(\ln \left(\frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \right) - \frac{1}{2}a_n \right) \\ &\Rightarrow 2^{n+1}a_{n+1} = 2a_1 + \sum_{k=1}^n 2^{k+1} \left(\ln \left(\frac{e^{a_k} - 1}{a_k} \right) - \frac{1}{2}a_k \right), \ln \left(\frac{e^{a_k} - 1}{a_k} \right) - \frac{1}{2}a_k > 0 \end{aligned}$$

因为 $a_1 = 1$ 且 $f''(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 下凸, $f(x)$ 在割线 $(0, 0), (1, \ln(e - 1))$ 的下方, 故

$$f(x) < x \ln(e - 1) = \lambda x, x \in (0, 1) \Rightarrow a_{n+1} = f(a_n) < \lambda a_n, a_n < \lambda^{n-1} a_1 = \lambda^{n-1}, \lambda = \ln(e - 1)$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - \frac{1}{2}x}{x^2} = \frac{1}{24}$, 所以存在 $\delta > 0$ 使得 $x \in (0, \delta)$ 时恒有 $0 < f(x) - \frac{1}{2}x < x^2$

注意 a_n 单调递减趋于零, 所以存在 N 使得任意 $n > N$ 都有 $a_n \in (0, \delta)$, 此时

$$0 < 2^{n+1} \left(\ln \left(\frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \right) - \frac{1}{2}a_n \right) < 2^{n+1}a_n^2 < 2^{n+1}\lambda^{2n-2} = \frac{2}{\lambda^2}(2\lambda^2)^n, n > N$$

容易验证 $2\lambda^2 < 1$ (高考不等式), 由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k+1} \left(\ln \left(\frac{e^{a_k} - 1}{a_k} \right) - \frac{1}{2}a_k \right) = C \in (0, +\infty)$$

极限存在, 得证 (注意很明显这个极限不是 2, 要比 2 大)

□

2.3 求通项方法

这是算术调和平均数列，与算术几何平均不同，这个通项以及极限值都可以求出来，很简单

例题 2.3.1 设 $a > b > 0$ ，定义 $a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

证明.

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} = \frac{a_nb_n}{a_{n+1}} \Rightarrow a_{n+1}b_{n+1} = a_nb_n = \dots = a_0b_0 = ab \\
 a_{n+1} &= \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{ab}{a_n} \right), a_n = \sqrt{ab}x_n \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right), x_0 = \sqrt{\frac{a}{b}} > 1 \\
 \frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1} + 1} &= \frac{\frac{x_n^2 + 1}{2x_n} - 1}{\frac{x_n^2 + 1}{2x_n} + 1} = \frac{(x_n - 1)^2}{(x_n + 1)^2} = \dots = \left(\frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} \right)^{2^{n+1}} \Rightarrow \frac{x_n - 1}{x_n + 1} = C^{2^n}, C = \frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} \in (0, 1) \\
 x_n &= \frac{1 + C^{2^n}}{1 - C^{2^n}}, a_n = \sqrt{ab} \frac{1 + C^{2^n}}{1 - C^{2^n}} \rightarrow \sqrt{ab}, b_n = \frac{ab}{a_n} \rightarrow \sqrt{ab}, n \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

□

这是几何-调和平均数列, 通项也能求出来, 自然求极限就没有任何问题

例题 2.3.2 设 $a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}, b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}, a_1, b_1 > 0$, 证明: a_n, b_n 收敛到同一极限, 并且在 $a_1 = 2\sqrt{3}, b_1 = 3$ 时, 上述极限值为 π .

证明. 这里先不讨论初值问题, 因为有欧拉公式可以统一起来, 所以部分过程按复数理解

设 $b_n = a_n c_n$ 代入有

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} = \frac{2a_nc_n}{c_n+1}, a_{n+1}c_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}a_nc_n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{c_n}{c_{n+1}^2} = \frac{2c_n}{c_n+1} \Rightarrow c_{n+1} = \sqrt{\frac{c_n+1}{2}}$$

进行三角换元, 设 $c_n = \cos x_n$ 则

$$\cos x_{n+1} = \sqrt{\frac{\cos x_n + 1}{2}} = \cos \frac{x_n}{2} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n = \dots = \frac{1}{2^n}x_1, c_n = \cos\left(\frac{x_1}{2^{n-1}}\right)$$

这里初值为 $\cos x_1 = c_1 = \frac{b_1}{a_1}$, 代入回去求 a_n, b_n 有

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{b_n}{a_n} = \cos\left(\frac{x_1}{2^{n-1}}\right), b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}, b_{n+1}^2 = a_{n+1}b_n = \frac{b_{n+1}}{c_{n+1}}b_n \Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{\cos\left(\frac{x_1}{2^n}\right)} \\ \frac{b_{n+1}}{b_1} &= \frac{1}{\cos\left(\frac{x_1}{2}\right)\cos\left(\frac{x_1}{2^2}\right)\dots\cos\left(\frac{x_1}{2^n}\right)} = \frac{2^n \sin \frac{x_1}{2^n}}{\sin x_1} \Rightarrow b_n = b_1 \frac{2^{n-1} \sin \frac{x_1}{2^{n-1}}}{\sin x_1} \\ a_n &= \frac{b_n}{c_n} = \frac{b_1 \frac{2^{n-1} \sin \frac{x_1}{2^{n-1}}}{\sin x_1}}{\cos \frac{x_1}{2^{n-1}}} = 2^{n-1} \frac{b_1}{\sin x_1} \tan \frac{x_1}{2^{n-1}}, \cos x_1 = c_1 = \frac{b_1}{a_1} \end{aligned}$$

由此可见

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{b_1 x_1}{\sin x_1} = \frac{b_1 \arccos \frac{b_1}{a_1}}{\sqrt{1 - \frac{b_1^2}{a_1^2}}} = \frac{a_1 b_1 \arccos \frac{b_1}{a_1}}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}$$

所以收敛到同一极限

对于 $a_1 = 2\sqrt{3}, b_1 = 3$ 的情况有

$$\cos x_1 = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, x_1 = \frac{\pi}{6}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{b_1 x_1}{\sin x_1} = \pi$$

结论得证

□

注释 2.3.1: 有关复数的问题和例子见例题 2.3.6, 考试时应当分类讨论, 但是实际上视为复函数(定义域不再是实数, 而是全体复数, 此时极限理论, 等价替换之类的依旧成立)并不需要单独讨论初值大小, 推导和结论是统一的

注意通项表达式中如果某一部分出现了复数, 这并不意味着通项最后代入具体值化简完不是实数! 只不过是借用复数来表达而已

例题 2.3.3 设 $a_n = 2^{n-1} - 3a_{n-1}, n \geq 1$, 求 a_0 的所有可能值, 使得 a_n 严格单调递增.

证明. 直接裂项, 求通项即可

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{(-3)^{n+1}} &= \frac{a_n}{(-3)^n} + \frac{2^n}{(-3)^{n+1}}, \frac{a_{n+1}}{(-3)^{n+1}} - \frac{a_n}{(-3)^n} = \frac{2^n}{(-3)^{n+1}} \\ \frac{a_{n+1}}{(-3)^{n+1}} &= \frac{a_0}{(-3)^0} - \frac{1}{3} \left(1 + \left(-\frac{2}{3}\right) + \dots + \left(-\frac{2}{3}\right)^n \right) = a_0 - \frac{1}{3} \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{5}{3}} \\ \frac{a_n}{(-3)^n} &= a_0 - \frac{1}{5} \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n \right), a_n = \left(a_0 - \frac{1}{5} \right) (-3)^n + \frac{1}{5} 2^n\end{aligned}$$

由此可见 $a_0 = \frac{1}{5}$ 是唯一解

□

例题 2.3.4 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

证明. 采用不动点方法求通项即可, 解方程 $x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - \lambda_1}{x_{n+1} - \lambda_2} &= \frac{1 + \frac{1}{x_n} - \lambda_1}{1 + \frac{1}{x_n} - \lambda_2} = \frac{(1 - \lambda_1)x_n + 1}{(1 - \lambda_2)x_n + 1} = \frac{\lambda_2 x_n + 1}{\lambda_1 x_n + 1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{x_n + \frac{1}{\lambda_2}}{x_n + \frac{1}{\lambda_1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{x_n - \lambda_1}{x_n - \lambda_2} \\ \Rightarrow \frac{x_{n+1} - \lambda_1}{x_{n+1} - \lambda_2} &= \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \frac{x_1 - \lambda_1}{x_1 - \lambda_2} \rightarrow 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

□

例题 2.3.5 设 $a_1 = 1, a_n = n(a_{n-1} + 1), x_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_k}\right)$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

证明.

$$\begin{aligned} x_n &= \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{a_k + 1}{a_k} = \prod_{k=1}^n \frac{a_{k+1}}{(k+1)a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_1} \frac{1}{(n+1)!} = \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} \\ a_n &= n(a_{n-1} + 1), \frac{a_n}{n!} = \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \rightarrow e \end{aligned}$$

□

例题 2.3.6 设 $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$, 求 a_n 的通项公式.

证明. 设 $a_n = 2b_n$ 则转化为例 2.3.2, 立即得到 $a_n = 2 \cos \frac{\theta_1}{2^{n-1}}, \cos \theta_1 = \frac{1}{2}a_1$

□

注释 2.3.2: 如果初值大于 1 以至于无法用三角函数怎么办, 我们演示一下欧拉公式是如何解决问题的

例如 $b_1 = 3, b_{n+1} = \sqrt{\frac{b_n + 1}{2}}$, 要求通项公式, 我们依旧用三角函数

$$b_n = \cos x_n, \cos x_{n+1} = \sqrt{\frac{\cos x_n + 1}{2}} = \cos \frac{x_n}{2} \Rightarrow x_n = \frac{x_1}{2^{n-1}}, b_n = \cos \frac{x_1}{2^{n-1}}, \cos x_1 = b_1$$

很明显实数范围内是无解的, 现在用欧拉公式去进一步化简这个通项, 使其全是实数

$$\begin{aligned} b_1 = \cos x_1 &= \frac{e^{ix_1} + e^{-ix_1}}{2} \Rightarrow e^{2ix_1} - 2b_1 e^{ix_1} + 1 = 0, e^{ix_1} = b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 1} \\ b_n = \cos \frac{x_1}{2^{n-1}} &= \frac{e^{i\frac{x_1}{2^{n-1}}} + e^{-i\frac{x_1}{2^{n-1}}}}{2} = \frac{(e^{ix_1})^{\frac{1}{2^{n-1}}} + (e^{ix_1})^{-\frac{1}{2^{n-1}}}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(b_1 + \sqrt{b_1^2 - 1} \right)^{\frac{1}{2^{n-1}}} + \left(b_1 + \sqrt{b_1^2 - 1} \right)^{-\frac{1}{2^{n-1}}} \right) = \frac{1}{2} \left(\left(3 + 2\sqrt{2} \right)^{\frac{1}{2^{n-1}}} + \left(3 - 2\sqrt{2} \right)^{-\frac{1}{2^{n-1}}} \right) \end{aligned}$$

可见 b_n 的极限依旧是 1, 是否引入复数对求极限并无影响, 因此例 2.3.2 同样道理, 确实是可以不单独分类讨论的 (当然作为考试, 书写过程时应当分类)

例题 2.3.7 设 $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = 2a_n^2 + 2a_n$, 求 a_n 的通项公式.

证明.

$$\begin{aligned} a_{n+1} = 2a_n^2 + 2a_n &= 2 \left(a_n + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow 2a_{n+1} + 1 = (2a_n + 1)^2 = \dots = (2a_1 + 1)^{2^n} \\ \Rightarrow a_n &= \frac{(2a_1 + 1)^{2^{n-1}} - 1}{2} = \frac{2^{2^{n-1}} - 1}{2} \end{aligned}$$

□

2.4 stolz 公式应用

stolz 公式非常好用, 许多复杂的极限问题都可以用它快速解决

例题 2.4.1 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+1}{2^k(n+1-k)}$

证明.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+1}{2^k(n+1-k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+1}{2^{n+1-k}k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}}{\frac{2^{n+1}}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n}{n}}{\frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n+1} - \frac{1}{n}} = 1$$

□

注释 2.4.1: 注意不能直接用 stolz 公式, 需要先变形一下

所谓的估阶题, 其实用简单的 stolz 公式也会有奇效

例题 2.4.2 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(H_n - \ln n - \gamma)$, 其中 γ 为欧拉常数, $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

证明.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n(H_n - \ln n - \gamma) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n - \ln n - \gamma}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln n}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1} - \ln(1 + \frac{1}{n})}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

注释 2.4.2: 类似的, 你可以继续计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n(H_n - \ln n - \gamma) - \frac{1}{2} \right)$, 并且仅用 stolz 公式就能证明存在一列 $c_1, \dots, c_k$ 使得

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \dots + \frac{c_k}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), n \rightarrow \infty$$

同样是使用公式，但是直接使用和变形后再使用带来的效果却不一样，直接用可能做不出来

例题 2.4.3 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\sqrt{nx_n}}$ ，求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{1}{4}} x_n$.

证明. 显然 x_n 单调递增，如果有界则 $x_n \leq A$ ，代入可知 $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{nx_n}} \geq \frac{1}{A\sqrt{n}}$ ，求和知右边发散，矛盾，所以 x_n 单调递增趋于无穷，下面用 stolz 公式求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{nx_n}} \left(2x_n + \frac{1}{\sqrt{nx_n}} \right)}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{nx_n^2}} \right) = 4$$

因此所求的极限是 2

□

注释 2.4.3: 直接用 stolz 会做不出来:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^{\frac{1}{4}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\frac{1}{4}n^{-\frac{3}{4}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\frac{1}{\sqrt{nx_n}}}{n^{-\frac{3}{4}}} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-\frac{1}{4}}}{x_n}$$

注意我们事先并没有论证极限存在，所以不可以“解方程”得到所求极限为 2

我们也可以待定系数自己探索出数列的阶并算出来这样的结果:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^a}{n^b} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}^a - x_n^a}{bn^{b-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(x_n + \frac{1}{\sqrt{nx_n}}\right)^a - x_n^a}{bn^{b-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^a \left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{nx_n^2}}\right)^a - 1 \right)}{bn^{b-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^a \frac{a}{\sqrt{nx_n^2}}}{bn^{b-1}} = \frac{a}{b} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^{a-2}}{n^{b-\frac{1}{2}}} \Rightarrow a = 2, b = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^a}{n^b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{\sqrt{n}} = \frac{a}{b} = 4 \end{aligned}$$

本题可以用定积分做，但是也可以采用 stolz 公式解决

例题 2.4.4 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}}$

证明.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{n+i}}{n\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n+2} - \sqrt{n+1}}{\frac{3}{2}\sqrt{n}} = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

□

例题 2.4.5 设 $k \geq 2, a_0 > 0, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt[k]{a_n}}$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{k+1}}{n^k}$.

证明. 显然 a_n 单调递增趋于正无穷, 根据 stolz 公式有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{1+\frac{1}{k}}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_{n+1}^{1+\frac{1}{k}} - a_n^{1+\frac{1}{k}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(a_n + a_n^{-\frac{1}{k}} \right)^{1+\frac{1}{k}} - a_n^{1+\frac{1}{k}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1+\frac{1}{k}} \left(\left(1 + a_n^{-\frac{1}{k}-1} \right)^{1+\frac{1}{k}} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1+\frac{1}{k}} \left(\left(1 + x^{-(1+\frac{1}{k})} \right)^{1+\frac{1}{k}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1+\frac{1}{k}} \left(1 + \frac{1}{k} \right) x^{-(1+\frac{1}{k})} = 1 + \frac{1}{k} \end{aligned}$$

因此所求极限是 $\left(1 + \frac{1}{k} \right)^k$

□

例题 2.4.6 设 k 为正整数, 正数列 x_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n (x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k) = 1$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n^{k+1} = \frac{1}{k+1}$.

证明. 设 $S_n = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$ 则 S_n 单调递增, 如果 S_n 有界, 则 x_n 趋于零, $x_n S_n \rightarrow 0$ 与条件矛盾, 所以 S_n 单调递增趋于正无穷, 进一步结合条件有 x_n 趋于零, 下面运用等价无穷小替换和 stolz 公式来求极限

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n^{k+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx_n^{k+1} S_n^{k+1}}{S_n^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{S_n^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_{n+1}^{k+1} - S_n^{k+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(S_{n+1} - S_n) (S_{n+1}^k + S_{n+1}^{k-1} S_n + \dots + S_{n+1} S_n^{k-1} + S_n^k)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_{n+1}^{k+1} (S_{n+1}^k + S_{n+1}^{k-1} S_n + \dots + S_{n+1} S_n^{k-1} + S_n^k)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(x_{n+1} S_{n+1})^k + (x_{n+1} S_{n+1})^{k-1} (x_{n+1} S_n) + \dots + (x_{n+1} S_{n+1}) (x_{n+1} S_n)^{k-1} + (x_{n+1} S_n)^k} \\ &= \frac{1}{k+1}, \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} S_{n+1} S_n}{S_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}} = 1 \right) \end{aligned}$$

□

2.5 递推数列性态分析

如果递推函数是单调递增的, 则蛛网图分析起来非常方便, 往往单调有界就能解决问题

例题 2.5.1 设 $u_1 = b, u_{n+1} = u_n^2 + (1 - 2a)u_n + a^2$, 求 a, b 的值使得 u_n 收敛, 并求极限.

证明. 几何上看, 递推函数 $f(x) = x^2 + (1 - 2a)x + a^2 = (x - a)^2 + x$ 是一个开口向上的二次函数, 并且与 $y = x$ 相切, 唯一切点是 (a, a) , 这意味着数列如果收敛则极限必须是 a

再注意到 $f(x) \geq x$ 恒成立所以数列是单调递增的, 因此如果要收敛, 则必须每一项都不超过 a , 一旦有一项严格大于 a , 则数列会单调递增趋于正无穷, 反之如果数列的每一项都不超过 a , 则 u_n 单调递增有上界, 因此收敛

换句话说, 数列收敛的充要条件是 $u_n \leq a$ 恒成立, 且收敛时极限是 a

画蛛网图, 用 $y = a$ 去截二次函数, 可以看到另一个交点是 $x = a - 1$, 至此容易看出结论就是: 收敛当且仅当 $b \in [a - 1, a]$, 下面证明

方法一: 由 $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2au_n + u_n + a^2 - u_n = (u_n - a)^2 \geq 0$, 知 $\{u_n\}$ 为单调增数列.

若 $\{u_n\}$ 收敛, 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$ 为有限数. 由 $u_{n+1} = u_n^2 + (1 - 2a)u_n + a^2$ 的关系式得 $x = x^2 + (1 - 2a)x + a^2 = (x - a)^2 + x$, 所以 $x = a$. 即若 $\{u_n\}$ 收敛, 其极限值必为 a .

因为 $\{u_n\}$ 单调增, 所以 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq a$. 特别 $u_1 = b \leq a$. 由此知若 $b > a$, $\{u_n\}$ 必发散.

(i) 若 $u_1 = b = a$, 则 $u_2 = u_3 = \cdots = u_n = a$. 数列收敛.

(ii) 考虑 $u_1 = b < a$ 的情形. $u_2 = (b - a)^2 + b$

当 $u_1 = b = a - 1$ 时, $u_2 = b + 1 = a$, 于是当 $n \geq 2$ 时, $u_n = a$, 数列也收敛. 当 $u_1 = b < a - 1$ 时, $u_2 - a = (b - a)^2 + b - a = (b - a)(b - a + 1) > 0, u_2 > a$, 与 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq a$ 矛盾. 此时, $\{u_n\}$ 发散.

当 $a - 1 < u_1 = b < a$ 时, 有 $-1 < u_1 - a < 0$, 递推得 $\forall n \in \mathbb{N}, a - 1 < u_n < a$, 数列收敛.

综上所述, 当 $b \in [a - 1, a]$ 时, $\{u_n\}$ 收敛于 a . 否则发散.

方法二: 结合前面的分析知数列收敛等价于 $u_n \leq a$ 恒成立, 解不等式 $u_2 = b^2 + (1 - 2a)b + a^2 \leq a$ 得到 $b \in [a - 1, a]$, 这就是充要条件

□

注释 2.5.1: 如果是考试, 采用方法二, 应当补充细节, 写完整

有些递推数列极限问题，可以直接减去不动点看收敛速度，也可以考虑单调有界方法，两种方法

例题 2.5.2 设 $x_1 > 0, x_1 \neq 1, x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2(x_n - 1)}$ ，证明 x_n 收敛并求极限。

证明. 分析一下：递推函数 $f(x) = \frac{x^2}{2(x-1)} = \frac{1}{2} \left(x - 1 + \frac{1}{x-1} \right) + 1$ 是高中常见的对勾函数，性质是知道的，解方程 $f(x) = x$ 可知 $x = 0, 2$ ，有两个不动点，画图容易看出当 $x_1 \in (0, 1)$ 时极限是 0，而 $x_1 > 1$ 时极限是 2，并且 $x > 1$ 时 $f(x) \geq 2$ ， $x < 1$ 时 $f(x) \leq 0$ ，而且不论哪种情况数列都是单调的，因此下面我们对初值分类讨论

1. 如果 $x_1 > 1$ ，则 $x_n \geq 2, \forall n \geq 2$ ，所以

$$|x_{n+1} - 2| = \left| \frac{x_n^2}{2(x_n - 1)} - 2 \right| = \frac{(x_n - 2)^2}{2(x_n - 1)} = |x_n - 2| \left| \frac{x_n - 2}{2(x_n - 1)} \right| \leq \frac{1}{2} |x_n - 2| \leq \dots \leq \frac{1}{2^n} |x_1 - 2|$$

由此可知极限是 2

2. 如果 $x_1 \in (0, 1)$ ，则 $x_n \leq 0, \forall n \geq 2$ ，所以

$$|x_{n+1}| = \left| \frac{x_n^2}{2(x_n - 1)} \right| = |x_n| \left| \frac{x_n}{2(x_n - 1)} \right| \leq \frac{1}{2} |x_n| \leq \dots \leq \frac{1}{2^n} |x_1|$$

由此可知极限是 0

□

注释 2.5.2: 上面我们运用了分式 $\frac{ax+b}{cx+d}$ 的单调性与取值范围，这种都是可以分离常数然后自己画出草图并得到范围的（高考基本功）

还有一个方法就是单调有界，比如证明 $x_1 > 1$ 时 x_n 从 $n = 2$ 开始是单调递减且有下界 2 的， $x_1 \in (0, 1)$ 时 x_n 从 $n = 2$ 开始是单调递增且有上界 0 的，然后解方程 $f(x) = x$ 得到结论，自行完成

递推函数递减时候, 意味着奇偶两个子列具有相反的单调性, 本题没有产生新的不动点, 是容易的

例题 2.5.3 设 $S_1 = 1, S_{n+1} = S_n + \frac{1}{S_n} - \sqrt{2}$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$

证明. 画图分析表明递推函数 (在 $(0, 1)$ 内) 是递减的, 所以数列不单调, 但是奇偶子列分别单调, 并且 (这一步只能说 “似乎”, 因为对于不同的递减的递推式, 可能结论是不一样的, 取决于二次复合有没有新的不动点) 奇子列单调递增趋于 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 偶子列单调递减趋于 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 数列的范围自然是在 $[S_1, S_2]$ 之间, 显然不动点只有 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 一个, 因此证明单调有界即可解决问题, 下面是证明

$S_1 = 1, S_2 = 2 - \sqrt{2}$, 先证明 $S_n \in [2 - \sqrt{2}, 1]$ 恒成立, 采用归纳法

$n = 1, 2$ 时显然成立, 如果 n 时成立, 则 $n + 1$ 时, 注意 $f(x) = x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}$ 在区间 $(0, 1)$ 中单调递减, 所以

$$2 - \sqrt{2} \leq S_{n+1} \leq 2 - \sqrt{2} + \frac{1}{2 - \sqrt{2}} - \sqrt{2} = 2 - 2\sqrt{2} + \frac{2 + \sqrt{2}}{2} = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{2} \leq 1$$

这就证明了 S_n 是有界数列, 且 $S_3 \leq S_1, S_4 \geq S_2$, 下面证明 S_{2n-1} 递减, S_{2n} 递增:

注意函数 $f(x) = x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}$ 在区间 $(0, 1)$ 中单调递减, 所以如果已知 $S_{2n+1} \leq S_{2n-1}, S_{2n+2} \geq S_{2n}$, 则

$$S_{2n+3} = f(S_{2n+2}) \leq f(S_{2n}) = S_{2n+1}, S_{2n+4} = f(S_{2n+3}) \geq f(S_{2n+1}) = S_{2n+2}$$

根据归纳法可得单调性, 这说明 S_{2n-1}, S_{2n} 都是单调有界的, 因此极限存在, 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = a, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = b, a, b \in [2 - \sqrt{2}, 1]$$

在递推式 $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{S_n} - \sqrt{2}$ 中分别让 n 取奇数, 偶数, 然后令 $n \rightarrow \infty$ 取极限, 可得关于极限 a, b 的方程组 $a = b + \frac{1}{b} - \sqrt{2}, b = a + \frac{1}{a} - \sqrt{2}$, 希望证明 $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 为了解这个方程组, 三种方法

方法一: 直接硬算, 将其中一个式子代入到另一个中

$$\begin{aligned} a &= b + \frac{1}{b} - \sqrt{2} = a + \frac{1}{a} - \sqrt{2} + \frac{1}{a + \frac{1}{a} - \sqrt{2}} - \sqrt{2} = \frac{1 - 3\sqrt{2}a + 7a^2 - 3\sqrt{2}a^3 + a^4}{a(1 - \sqrt{2}a + a^2)} \\ 1 - 3\sqrt{2}a + 7a^2 - 3\sqrt{2}a^3 + a^4 - a^2(1 - \sqrt{2}a + a^2) &= -(\sqrt{2}a - 1)^3 = 0 \end{aligned}$$

由此可知 $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 所以数列 S_n 收敛于 $\frac{1}{\sqrt{2}}$

方法二: 上面硬算起来实在太麻烦了, 我们可以先对递推式变形化简, 减小计算量

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \frac{1}{S_n} - \sqrt{2} = \frac{S_n^2 - \sqrt{2}S_n + 1}{S_n} = \frac{\left(S_n - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}{S_n} \\ S_{n+1} - \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{\left(S_n - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}S_n}{S_n} = \frac{\left(S_n - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(S_n - \sqrt{2})}{S_n} \end{aligned}$$

然后对奇偶子列 (代入递推式) 分别取极限可得方程组

$$a - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\left(b - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(b - \sqrt{2})}{b}, b - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(a - \sqrt{2})}{a}$$

如果 a, b 之中有一个是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 则另一个也是, 显然数列 S_n 收敛于 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 如果都不是则

$$\begin{aligned} a - \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{\left(b - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(b - \sqrt{2})}{b} = \frac{\left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(a - \sqrt{2})(b - \sqrt{2})}{ab} \\ \left(a - \sqrt{2}\right)(b - \sqrt{2}) - ab &= 2 - \sqrt{2}(a + b) = 0 \Rightarrow a + b = \sqrt{2} \\ \Rightarrow a - \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{\sqrt{2}}{2} - b = \frac{\left(b - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(b - \sqrt{2})}{b} \Rightarrow b - \sqrt{2} = -b, b = \frac{\sqrt{2}}{2} = a \end{aligned}$$

导致矛盾

方法三 (最快的方法, 比上课的算法要好): 如果 $a \neq b$, 则根据方程组有

$$\begin{aligned} ab &= b^2 - \sqrt{2}b + 1 = a^2 - \sqrt{2}a + 1 \Rightarrow a + b = \sqrt{2} \\ b &= a + \frac{1}{a} - \sqrt{2} = \sqrt{2} - a \Rightarrow 2\sqrt{2} = 2a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{2a \cdot \frac{1}{a}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

由此可知 $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 矛盾

□

注释 2.5.3: 一般来说, 递推函数递减时候是否收敛完全取决于递推函数二次复合之后在区间内 (这个数列的最大, 最小值对应的区间) 是否会有新的不动点, 如果没有就收敛, 如果有, 则通常奇偶子列收敛到不同极限, 于是数列不收敛

可以看到核心是二次复合后是否有新的不动点, 也即解方程 $f(f(x)) = x$, 一般不建议硬算, 尤其是多项式或者分式类型, 往往化为两个方程 $a = f(b), b = f(a)$ 然后作差会比较方便, 只有出现超越函数时候, 才有必要真的把二次复合化简算出来, 然后硬解方程, 或者求导研究问题, 这样“迫不得已”的例子见最后一个练习题。

2.6 综合问题

本题方法很多, 来自于早年的数学类决赛, 但是只要学过数列极限基本知识就能做出来, 不难

例题 2.6.1 用单调有界原理计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n, S_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$.

证明. 因为

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \\ S_{n+1} &= \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1} + \dots + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

所以证明 $\left(\frac{k}{n}\right)^n \leq \left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1}, 1 \leq k \leq n-1$ 即可, 这等价于 $\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \leq \frac{(k+1)^{n+1}}{k^n}$

实际上 $a_k = \frac{(k+1)^{n+1}}{k^n}, 1 \leq k \leq n$ 是单调递减数列, 因为

$$\begin{aligned} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{k^n(k+2)^{n+1}}{(k+1)^{2n+1}} = \frac{(x-1)^n(x+1)^{n+1}}{x^{2n+1}} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{x}\right), x = k+1 \in [2, n] \\ n \ln \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) &\leq -\frac{n}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-n}{x^2} \leq 0 \Rightarrow a_{k+1} \leq a_k \end{aligned}$$

于是 $\frac{(k+1)^{n+1}}{k^n} = a_k \geq a_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$, 也即 S_n 单调递增

注意

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^{n-1} e^{n \ln(1 - \frac{k}{n})} \leq \sum_{k=1}^{n-1} e^{-k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} = \frac{1}{e-1}$$

所以单调有界, 极限一定存在, 设为 S

对任意正整数 $n > m$, 先固定 m , 对 n 取极限有

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \geq \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq \sum_{k=1}^m \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^m e^{-k}$$

这对任意正整数 m 均成立, 再令 $m \rightarrow \infty$ 有 $S \geq \frac{1}{e-1}$, 从而所求极限为 $\frac{1}{e-1}$

□

注释 2.6.1: 后面设两个变量 m, n 的技巧或许看上去感觉很秀, 其实本题实际上可以用级数版本的控制收敛定理直接换序秒杀 (当然考试时候不要这么干), 而那个定理的证明不需要任何高级技术与背景知识, 同样就是什么这样子设一个 m, n 然后类似操作下就证出来了, 所以本质上这个“秀”的做法是证明了那个换序定理

关于递推数列问题, 之前说过如果递推函数是单调递减的, 则奇偶两个子列通常会具备单调性, 于是自然要考虑二阶不动点, 在定量分析时蛛网图方法将会失效, 该怎么办呢? 来看一个曾经的数学类决赛题, 对非数不困难

例题 2.6.2 设 $c, x_1 \in (0, 1)$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = c(1 - x_n^2)$, $x_2 \neq x_1$, 证明 x_n 收敛当且仅当 $c \in (0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$.

证明. 方法一: 根据题目显然有 $x_n \in (0, 1)$, 考虑函数 $f(x) = c(1 - x^2)$, 则 $f(x)$ 单调递减, 并且 $f(x) = x$ 在区间 $(0, 1)$ 中有唯一解 $t_0 = \frac{\sqrt{1+4c^2}-1}{2c}$, 则 $x_1 \neq t_0$, 不妨设 $x_1 \in (0, t_0)$ (若不然 $x_1 > t_0$, 则 $x_2 = f(x_1) < f(t_0) = t_0$, 从 x_2 开始考虑即可), 所以 $x_2 > t_0, x_3 < t_0, \dots$ 也即 $x_{2n-1} < t_0, x_{2n} > t_0$ 恒成立

为了研究奇偶子列的单调性, 考虑二次复合, 计算有

$$f(f(x)) - x = c(1 - c^2(1 - x^2)^2) - x = (-cx^2 - x + c)(c^2x^2 - cx + 1 - c^2)$$

两个因子都是二次函数, 前者开口向下, 在 $(0, 1)$ 区间中与 $y = x$ 的唯一交点(横坐标)是 $t_0 = \frac{\sqrt{1+4c^2}-1}{2c}$, 后者开口向上, 解方程有(形式上) $x = \frac{1 \pm \sqrt{4c^2-3}}{2c}$

因此我们应该以 $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 分类, 当 $c \in (0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ 时, $c^2x^2 - cx + 1 - c^2 \geq 0$ 也即当 $x \in (0, t_0)$ 时 $f(f(x)) \geq x$, $x \in (t_0, 1)$ 时 $f(f(x)) \leq x$, 代入可知

$$x_1 \leq x_3 \leq x_5 \leq \dots \leq t_0, x_2 \geq x_4 \geq x_6 \geq \dots \geq t_0$$

也即奇子列单调递增有上界 t_0 , 偶子列单调递减有下界 t_0 , 所以奇偶子列分别都收敛, 解方程 $f(f(x)) = x$ 可知其在 $(0, 1)$ 中有唯一解 $t_0 = \frac{\sqrt{1+4c^2}-1}{2c}$, 所以奇偶子列收敛到同一值, 数列收敛

当 $c > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 显然有 $\frac{1 - \sqrt{4c^2-3}}{2c} < \frac{\sqrt{1+4c^2}-1}{2c} < \frac{1 + \sqrt{4c^2-3}}{2c}$, 从左至右依次记为 $t_1 < t_0 < t_2$

采用反证法, 如果 x_n 收敛, 则解方程 $f(x) = x$ 可知 $x_n \rightarrow t_0$, 注意 $x_{2n-1} \in (0, t_0), x_{2n} \in (t_0, 1)$ 并且反证法表明这两个子列也都收敛到 t_0 , 则存在 N 使得 $n > N$ 时恒有 $x_{2n-1} \in (t_1, t_0), x_{2n} \in (t_0, t_2)$

注意

$$f(f(x)) - x = (-cx^2 - x + c)(c^2x^2 - cx + 1 - c^2)$$

因此在区间 (t_1, t_0) 中 $f(f(x)) < x$, 区间 (t_0, t_2) 中 $f(f(x)) > x$, 所以 $n > N$ 时奇子列单调递减, 偶子列单调递增, 根据单调有界, 只能奇子列收敛到 t_1 , 偶子列收敛到 t_2 , 这与 $x_n \rightarrow t_0$ 矛盾

方法二: 这个方法可以快速说明 $c > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时数列一定不收敛, 但是剩下一半似乎用不了

显然 $f(x) = x$ 的解是 $t_0 = \frac{\sqrt{1+4c^2}-1}{2c}$, 如果 $c > \frac{\sqrt{3}}{2}$, 求导有 $f'(x) = -2cx, |f'(t_0)| = \sqrt{1+4c^2} - 1 > 1$

所以在 t_0 附近的一个邻域内都有 $|f'(x)| \geq 1 + \delta > 1$, 而如果此时 x_n 收敛, 则必然收敛到 t_0 , 也就是说存在 x_N 落入 t_0 附近一个去心邻域内(条件 $x_2 \neq x_1$ 保证了 $x_n \neq t_0$ 恒成立), 于是

$$|x_{N+1} - t_0| = |f(x_N) - f(t_0)| = |f'(\xi)| |x_N - t_0| \geq (1 + \delta) |x_N - t_0|$$

以此类推下去, 显然 x_n 与 t_0 的距离只会越来越远, 因此不可能收敛到 t_0 导致矛盾

□

注释 2.6.2: 方法一是标准方法也是通用的, 注意多项式时候一定有整除关系 $f(x) - x | f(f(x)) - x$ 所以必定能因式分解

方法二则是回忆之前讲过的“极限点处导数大于等于 1 时候就不可能压缩映射”, 利用这个原理我们很快能发现 c 的分界线, 同时也能快速说明 $c > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时数列一定不收敛

对于阶乘来说, 最好用的估计工具莫过于斯特林公式, 与组合数相关的极限问题, 我们可以尝试将其全部转化为阶乘然后估计大小, 但是斯特林公式作为等价量的一个估计, 需要在 n 很大时候才成立, 因此组合数上下标之间的关系直接影响着用斯特林公式估算组合数是否准确, 我们给出一个定量估计的具体问题

例题 2.6.3 设 n, v 为正整数且 $1 < v < n$, 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}} = \lambda > 0$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} C_n^v = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2\lambda^2}$.

证明. 根据条件, 显然在 $n \rightarrow \infty$ 时 v 也会趋于无穷, 设 $v = \frac{n}{2} + w\sqrt{n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} w = \lambda > 0$, 则有

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{n}}{2^n} C_n^v &= \frac{\sqrt{n}}{2^n} \frac{n!}{v!(n-v)!}, n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} C_n^v &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi v} \left(\frac{v}{e}\right)^v \sqrt{2\pi(n-v)} \left(\frac{n-v}{e}\right)^{n-v}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{2^n v^v (n-v)^{n-v}} \frac{n}{\sqrt{v(n-v)}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2\lambda^2} \\
 &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{2^n \left(\frac{n}{2} + w\sqrt{n}\right)^v \left(\frac{n}{2} - w\sqrt{n}\right)^{n-v} \frac{n}{2\sqrt{v(n-v)}}} = e^{-2\lambda^2} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{2^n \sqrt{v(n-v)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{2^n \sqrt{\left(\frac{n}{2} + w\sqrt{n}\right) \left(\frac{n}{2} - w\sqrt{n}\right)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4w^2}{\sqrt{n}}}} = 1 \\
 &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n + 2w\sqrt{n})^{\frac{n}{2} + w\sqrt{n}} (n - 2w\sqrt{n})^{\frac{n}{2} - w\sqrt{n}}} = e^{-2\lambda^2} \\
 &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{2w}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n}{2} + w\sqrt{n}} \left(1 - \frac{2w}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n}{2} - w\sqrt{n}}} = e^{-2\lambda^2} \\
 &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n}{2} + w\sqrt{n}\right) \ln \left(1 + \frac{2w}{\sqrt{n}}\right) + \left(\frac{n}{2} - w\sqrt{n}\right) \ln \left(1 - \frac{2w}{\sqrt{n}}\right) \right) = 2\lambda^2 \\
 &\quad \left(\frac{n}{2} + w\sqrt{n}\right) \ln \left(1 + \frac{2w}{\sqrt{n}}\right) + \left(\frac{n}{2} - w\sqrt{n}\right) \ln \left(1 - \frac{2w}{\sqrt{n}}\right) \\
 &= \left(\frac{n}{2} + w\sqrt{n}\right) \left(\frac{2w}{\sqrt{n}} - \frac{2w^2}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right) + \left(\frac{n}{2} - w\sqrt{n}\right) \left(-\frac{2w}{\sqrt{n}} - \frac{2w^2}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right) \\
 &= w\sqrt{n} + w^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - w\sqrt{n} + w^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2w^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
 \end{aligned}$$

结论得证

□

这是一个综合性较强的分段放缩问题

例题 2.6.4 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\ln k \ln(n-k) \ln(n+k) \sqrt{n+k}}$.

证明. 注意到 $\frac{\ln n}{\ln(2n)} \rightarrow 1$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\ln k \ln(n-k) \ln(n+k) \sqrt{n+k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\ln k \ln(n-k) \sqrt{n+k}}$$

显然

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{n+k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = 2\sqrt{2} - 2$$

我们用上面的东西来拟合, 所以尝试证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \left(\frac{\ln^2 n}{\ln k \ln(n-k)} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} \left(\frac{\ln^2 n}{\ln k \ln(n-k)} - 1 \right) = 0$$

注意求和里面的每一项都是正的, 并且 $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right]$, 所以只需证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n-2} \left(\frac{\ln^2 n}{\ln k \ln(n-k)} - 1 \right) = 0$$

注意对称性, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\ln^2 n}{\ln k \ln(n-k)} - 1 \right) = 0$ 即可, 待定一个 m 来分段放缩

首先容易看出数列 $\ln k \ln(n-k)$ 在 $2 \leq k \leq \frac{n}{2}$ 时是单调递增的, 这是因为

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x \ln(n-x), f'(x) = \frac{\ln(n-x)}{x} - \frac{\ln x}{n-x} > 0 \\ &\Leftrightarrow (n-x) \ln(n-x) > x \ln x, \forall x \in \left(2, \frac{n}{2}\right) \end{aligned}$$

显然成立, 所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^m \left(\frac{\ln^2 n}{\ln k \ln(n-k)} - 1 \right) &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=2}^m \left(\frac{\ln^2 n}{\ln 2 \ln(n-2)} - 1 \right) = \frac{m}{n} \left(\frac{\ln^2 n}{\ln 2 \ln(n-2)} - 1 \right) \\ \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\ln^2 n}{\ln k \ln(n-k)} - 1 \right) &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\ln^2 n}{\ln m \ln(n-m)} - 1 \right) \leq \frac{\ln^2 n}{\ln m \ln(n-m)} - 1 \end{aligned}$$

为了让第一个趋于零, 可以取 $m = \frac{n}{2\ln^2 n}$, 然后代入检查第二个极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{\ln m \ln(n-m)} - 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{\ln \frac{n}{2\ln^2 n} \ln \left(n - \frac{n}{2\ln^2 n}\right)} - 1 = 0$$

所以结论得证 (过程中严格来讲应补上取整符号, 这里方便起见省略了)

□

递推数列求极限通常我们习惯于直接算不动点，然后减去不动点看收敛速度，但是如果是二阶的递推，便没有这么简单，最好用的方法其实是上下极限，但是有时我们也能采用同样的不动点思想，配合待定系数解决

例题 2.6.5 设 $x_1 = a > 0, x_2 = b > 0, x_{n+2} = 3 + \frac{1}{x_{n+1}^2} + \frac{1}{x_n^2}$ ，证明：数列 x_n 收敛.

证明. 根据条件显然 $n \geq 3$ 时 $x_n \geq 3$ ，代入进而 $n \geq 5$ 时 $x_n \in [3, 4]$ ，于是

$$\begin{aligned} |x_{n+2} - x_{n+1}| &= \left| \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \right| \leq \left| \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \right| + \left| \frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_{n-1}^2} \right| = \frac{|x_{n+1}^2 - x_n^2|}{x_{n+1}^2 x_n^2} + \frac{|x_n^2 - x_{n-1}^2|}{x_n^2 x_{n-1}^2} \\ &= \frac{1}{x_{n+1} x_n} \left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_n} \right) |x_{n+1} - x_n| + \frac{1}{x_n x_{n-1}} \left(\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n-1}} \right) |x_n - x_{n-1}| \\ &\leq \frac{2}{27} |x_{n+1} - x_n| + \frac{2}{27} |x_n - x_{n-1}|, \forall n \geq 4 \end{aligned}$$

记 $u_n = |x_n - x_{n-1}|$ ，则 $u_{n+2} \leq \frac{2}{27}(u_{n+1} + u_n)$ ，类比二阶线性递推数列方法，希望找到 $\lambda > 0, q \in (0, 1)$ 使得 $u_{n+2} + \lambda u_{n+1} \leq q(u_{n+1} + \lambda u_n)$ 恒成立，这样一直递推下去就有 $u_{n+2} + \lambda u_{n+1} \leq Cq^n, C > 0$ ，说明 $|x_{n+1} - x_n|$ 是以等比数列速度趋于零的，根据柯西收敛准则显然 x_n 收敛，结论成立

而对比已知不等式 $u_{n+2} \leq \frac{2}{27}(u_{n+1} + u_n)$ 和目标 $u_{n+2} \leq (q - \lambda)u_{n+1} + q\lambda u_n$ ，只需要 $q - \lambda \geq \frac{2}{27}, q\lambda \geq \frac{2}{27}$ ，这明显有很多可以的取法，例如 $q = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{3}$ ，因此得证

□

注释 2.6.3: 你也可以设不动点，然后两边减去不动点，类似的去构造一个二阶线性递推数列，然后待定系数放缩一下说明收敛，自行尝试

2.7 练习题

习题 2.7.1 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$

习题 2.7.2 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left((1+x)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x}}\right) (x \ln x)^2}{x^{\frac{1}{x}} - x}$.

习题 2.7.3 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 常数 K 使得 $|y_1| + \dots + |y_n| \leq K$ 对任意正整数 n 恒成立, 令 $z_n = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

习题 2.7.4 设 $a, b > 0$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} \sum_{k=2}^n n^{\frac{1}{\ln k}} = b$, 求 a, b 的值.

习题 2.7.5 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=2}^{n-2} \frac{\ln C_n^k}{\ln k}}{\sum_{k=2}^{n-2} \frac{n-k}{\ln k}}$

注意: 上面这个分段估计的练习题有一定难度与综合性, 基础不好的同学可以先跳过

习题 2.7.6 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k a_k = a$

上题直观非常显然, 但是证明也并非一句话完事, 非数同学可以借此训练一下如何书写过程

习题 2.7.7 设正数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n+2}} = 0$, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 无界.

习题 2.7.8 设 $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}}, |a_1| < 1$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n (1 - a_n)$.

习题 2.7.9 设 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n^2 + a_n + 1}$, 求 a_n 的通项公式和等价无穷大量.

习题 2.7.10 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \prod_{k=1}^n \frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{(1+\frac{1}{k})^k}$.

习题 2.7.11 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + n + k}} \right)^n$.

习题 2.7.12 设 $x_1 = \sqrt{7}, x_2 = \sqrt{7 - \sqrt{7}}, x_{n+2} = \sqrt{7 - \sqrt{7 + x_n}}$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

习题 2.7.13 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \sqrt{x^2 + k}$.

习题 2.7.14 设 $x_n = \sqrt[n]{\sqrt{2!} \cdot \sqrt[3]{3!} \dots \sqrt[n]{n!}}$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^2}{x_{n+1}} - \frac{n^2}{x_n} \right) = e^2$.

习题 2.7.15 设正整数 p 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = \lambda$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{p}$

第三章 函数极限与导数

这部分基本概念很多，初学时也容易犯错误，尤其是可导，连续，导函数连续等等相关的问题，千万不能想当然，应该严格按照定义执行，确保每一步有理有据。此外要掌握常见的反例： $f(x) = x^m \sin \frac{1}{x^n}$ ，很多时候判断题的反例都与它有关，当你拿不准某个猜想对不对时候（实际上，这部分的猜想如果不能简单的证明出来，基本就是错的），这个结构的函数通常也能否定你的猜测。

关于基本概念的判断题虽然在 CMC 中不会考，但是考研时经常会遇到相关的选择题，而且概念不清很容易导致做解答题时候出现伪证（比如分明条件不支持你洛必达，但是你直接无脑洛必达搞出来了一个正确的答案；又比如“该点的导数”和“导函数在该点的极限”，尽管有时可能数字是相同的，但是它们的定义本来就不一样，如果你不能明确区分用哪个算，考试时候就很危险）。

本节需要强调的公式就是各种各样的求导法则，包括：反函数求导，隐函数求导，复合函数求导，高阶导数。面对高阶导数问题，除去课本上明确的几个基本结果以及莱布尼茨公式之外，剩下的问题大多依赖于数学归纳法或者递推方法，通常可以先算几个找规律然后证明，对着正确的式子用归纳法验证一定是没有任何难度的！

基本的高阶导公式包括 e^{ax} , $\frac{1}{ax+b}$, $\ln x$, $\sin(ax+b)$, x^a 这些函数的 n 阶导结果，都是简单而直接的，面对两个函数相乘求导的问题，则很多时候要用莱布尼茨公式

结论 3.0.1: 莱布尼茨公式

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

函数方程问题一定要搞清楚最基本的柯西方程，它是很多其余函数方程问题的基础或者说基本模型，另外很多时候单从一个函数方程并不能锁定出目标函数，往往需要加上连续性，可导性之类的辅助条件（以排除比较逆天的反例），那么给了你这样的条件就暗示着你肯定要用，比如尽管方程里面没有出现导数，但是函数可导，那就要尝试对其中一个变量求导，看能不能得到有用的东西。

3.1 基本概念与题目

例题 3.1.1 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3)$ 同时存在或不存在, 而当它们存在时必相等, 又问 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2)$ 是否一定同时存在或不存在?

证明. 如果 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3) = \lim_{u \rightarrow 0} f(u) = A$

如果 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3\right) = \lim_{u \rightarrow 0} f(u^3) = A$

由此可知前半部分结论成立

对于后半部分则结论显然不对, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2)$ 存在只能反应 $x > 0$ 的性质, 无法刻画 $x < 0$ 的部分

□

例题 3.1.2 设 $f \in C(\mathbb{R})$, 且有 $f(-\infty) = A < B = f(+\infty)$, 证明: 对每个 $c \in (A, B)$, 存在 ξ , 使得 $f(\xi) = c$.

证明. 根据极限保号性可知, 存在充分小的 x_1 和充分大的 x_2 使得 $f(x_1) < \frac{c+A}{2} < c, f(x_2) > \frac{c+B}{2} > c$

注意连续函数在 $[x_1, x_2]$ 区间中的介值性, 可知结论成立

□

例题 3.1.3 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{|x|(x^2 - 1)}, & x \neq 0, \pm 1 \\ 1, & x = 0, \pm 1 \end{cases}$, 求 $f(x)$ 的间断点及其类型.

证明. 首先将 $f(x)$ 在各个区间上的表达式化简, 显然有

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x > 0, x \neq 1 \\ -\frac{1}{x+1}, & x < 0, x \neq -1 \\ 1, & x = 0, \pm 1 \end{cases}$$

由此可知

$$f(1^+) = f(1^-) = \frac{1}{2}, f(0^+) = 1, f(0^-) = -1, f(-1^+) = -\infty, f(-1^-) = +\infty$$

结合条件, 故 $x = 1$ 是可去间断点, $x = 0$ 是跳跃间断点, $x = -1$ 是无穷间断点

□

例题 3.1.4 设 $f(x)$ 定义在 $[0, 1]$ 中且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(x\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right)\right) = 0$, 证明: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

证明. 用 $\{x\}$ 表示 x 的小数部分, 则 $x\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right) = x\left\{\frac{1}{x}\right\}$

对任意 $\varepsilon > 0$, 依据极限定义, 存在 $\delta > 0$ 使得任意 $x \in (0, \delta)$ 都有 $\left|f\left(x\left\{\frac{1}{x}\right\}\right)\right| < \varepsilon$

取充分大的正整数 N 使得 $\frac{1}{N} < \delta$, 则任意 $x \in \left(\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N}\right)$ 都有 $\left|f\left(x\left\{\frac{1}{x}\right\}\right)\right| < \varepsilon$

考虑函数 $x\left\{\frac{1}{x}\right\}$ 在区间 $\left(\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N}\right)$ 中的值域, 也就是连续函数

$$g(u) = \frac{u - [u]}{u} = \frac{u - N}{u}, u \in (N, N+1)$$

的值域, 考虑端点处的极限可知 $g(u)$ 的值域是 $\left(0, \frac{1}{N+1}\right)$, 所以对任意 $y \in \left(0, \frac{1}{N+1}\right)$, 都存在 $x \in \left(\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N}\right) \subset (0, \delta)$ 使得 $y = x\left\{\frac{1}{x}\right\}$, 故 $|f(y)| = \left|f\left(x\left\{\frac{1}{x}\right\}\right)\right| < \varepsilon$

也就是说, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得任意 $y \in \left(0, \frac{1}{N+1}\right)$, 都有 $|f(y)| < \varepsilon$, 结论得证

□

例题 3.1.5 设 $f(x)$ 定义在 $(0, +\infty)$ 中, $a > 0, a \neq 1$ 使得 $f(ax) = f(x)$ 恒成立, 若存在有限极限 $f(0^+)$ 或者 $f(+\infty)$, 证明: $f(x)$ 是常值函数.

证明. 已知 $f(x) = f(ax) = \cdots = f(a^n x)$,

如果 $a > 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a^n x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = A$;

如果 $1 > a > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a^n x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} f(y) = A$ 。

所以极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 或者 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 则函数 $f(x)$ 为常值函数.

注: 也可以像上课那样用反证法, 然后往 $x = 0$ 或者无穷处去推, 都能解决问题

□

例题 3.1.6 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上且在 $x = 0$ 附近有界, 常数 $a > 1, b > 1$ 使得 $f(ax) = bf(x)$ 恒成立, 证明: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

证明. 根据条件设 $x \in [-A, A]$ 时恒有 $|f(x)| \leq M$, 这里 M 是确定的正数, 采用反证法

则存在正数 δ 和一系列 $x_n \rightarrow 0$ 使得 $|f(x_n)| \geq \delta$, 不妨设这些 x_n 都在 $(0, A)$ 中

由条件有 $|f(a^k x_n)| = |b^k f(x_n)| \geq b^k \delta, \forall n, k \geq 1$, 因此先取 k 充分大使得 $b^k \delta > M$, 然后看 n , 虽然此时不一定有 $a^k x_n \in (0, A)$, 但是 $x_n \rightarrow 0$, 所以可以再取 n 充分大, 使得 $a^k x_n \in (0, A)$, 这样就与有界性的假设矛盾了, 结论得证

□

例题 3.1.7 设 n 为正整数, 在什么条件下, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(1) 在 $x=0$ 处连续; (2) 在 $x=0$ 处可导; (3) 在 $x=0$ 处导函数连续.

证明. 显然

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \sin \frac{1}{x} = \begin{cases} \text{不存在}, n=1 \\ 0, n \geq 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \begin{cases} \text{不存在}, n=1, 2 \\ 0, n \geq 3 \end{cases}$$

所以 $n \geq 1$ 连续, $n \geq 2$ 可导, $n \geq 3$ 导数连续

□

例题 3.1.8 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$, 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

证明. 设 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, 则条件为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x(1 + g(x)))}{x} = 3$, 所以一定有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + x(1 + g(x))) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x(1 + g(x)) = 0$$

因此可以进行等价无穷小替换, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x(1 + g(x)))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + g(x))}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$$

所求极限为 2

□

例题 3.1.9 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = 6$, 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x)}{x^4}$.

证明. 方法一: 根据泰勒公式有 $f(x) = 3x^2 + o(x^2) \Rightarrow f(\sin^2 x) = 3\sin^4 x + o(\sin^4 x)$, 因此所求极限是 3

注: 这个方法只需要 $f''(0) = 6$ 存在不需要二阶连续可导, 但是若采用拉格朗日余项则需要更强的条件

方法二: 根据洛必达法则和导数定义 (最后一步) 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x)}{\sin^4 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{1}{2} f''(0) = 3$$

□

例题 3.1.10 设 $y = f(x)$ 是由方程 $\arctan \frac{x}{y} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}$ 确定的隐函数, 且满足 $f(1) = 1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程.

证明. 方程两边对 x 求导有

$$\frac{\frac{y - xy'}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{1}{2} \frac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2} \Rightarrow y - xy' = x + yy', y' = \frac{y - x}{y + x}$$

注意 $f(1) = 1$ 所以 $f'(1) = 0$, 故切线就是 $y = 1$

□

例题 3.1.11 设 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上有 n 阶导数, 且存在不全为 0 的 $n+1$ 个常数 $a_0, a_1, \dots, a_n$, 使得 $a_0 f(x) + a_1 f'(x) + \dots + a_n f^{(n)}(x) \equiv 0$, 证明: $f(x)$ 在 (a, b) 上存在任意阶导数.

证明. 既然不全为零, 设 a_N 是 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 中最后一个非零的项, 则条件为 $a_N f^{(N)}(x) + \dots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0$ 将 a_N 除过去, 则有常数 $b_0, b_1, \dots, b_{N-1}$ 使得

$$f^{(N)}(x) = b_0 f(x) + b_1 f'(x) + \dots + b_{N-1} f^{(N-1)}(x)$$

因为 f 是 N 阶可导的, 所以上式右边可导, 进而左边可导, 于是 f 是 $N+1$ 阶可导的, 并且

$$f^{(N+1)}(x) = b_0 f'(x) + b_1 f''(x) + \dots + b_{N-1} f^{(N)}(x)$$

同理可知左边可导, 进而 f 是 $N+2$ 阶可导的, 以此类推下去, 故 $f(x)$ 任意阶可导

□

例题 3.1.12 设 f 在 $[0, 1]$ 上可微, 且使得数集 $\{x \in [0, 1] \mid f(x) = 0 = f'(x)\} = \emptyset$. 证明: f 在 $[0, 1]$ 中只有有限个零点.

证明. 反证法, 如果有无穷个零点 x_n , 则 x_n 作为有界数列一定有收敛子列, 设 $x_{n_k} \rightarrow u \in [0, 1]$, 则根据连续性显然有 $f(u) = 0$

再根据导数定义, 我们用这一列趋于 u 的零点 x_{n_k} 去计算导数, 因为导数存在, 所以导数也一定是零, 矛盾

□

注释 3.1.1: 一般的, 如果 $f(x)$ 定义在 $[0, 1]$ 中并且光滑, 同时还有无穷个零点, 则利用导数定义以及中值定理, 类似的可以得到: 存在某点使得 $f(x)$ 在该点的任意阶导数均为零

例题 3.1.13 设 $f(x)$ 连续, 判断下面哪些极限存在能推出来 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)| - f(0)}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - |f(0)|}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - f(0)|}{x}$$

证明. 先看第一个, 如果 $f(0) > 0$, 则根据连续性 $f(x)$ 在 $x=0$ 邻域内都是正的, 根据导数定义可知

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)| - f(0)}{x}$$

存在, 所以在 $x=0$ 可导, 如果 $f(0) < 0$, 则分子不趋于零, 极限不可能存在, 最后看 $f(0) = 0$ 的情况

此时条件表明 $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{x}$ 存在, 让 $x \rightarrow 0^+$ 可知 $A \geq 0$, 再让 $x \rightarrow 0^-$ 可知 $A \leq 0$, 于是

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| = 0$$

这说明绝对值里面的函数极限是零, 恰好这又是导数定义, 所以 $f'(0) = 0$ 可导

从这个过程可以看出, 第三个和第四个极限存在也意味着可导, 因为三、四极限存在同理必须是零, 进而可导

最后看第二个, 显然 $f(0) < 0$ 时分子不会趋于零, 极限不可能存在, 所以 $f(0) \geq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - |f(0)|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ 正是导数的定义, 因此可导

□

例题 3.1.14 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = 1$, 判断下面那个正确

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x^2} = 3 \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{x} = 6 \quad (c) f''(0) = 0 \quad (d) f'''(0) = 6$$

证明. 先来证明 c 是对的:

由条件可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内可导, 连续同时 $f''(0)$ 存在, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = 1$, 所以 $f(0) = 0$ (否则分子不趋于零, 矛盾), 再由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x}}{x^2} = 1$ 可知分子趋于零, 也就是说 $f'(0) = 0$

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{x} = 1$ 可知分子极限是零, 同时根据洛必达法则以及导数定义可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{1}{2} f''(0)$$

故 $f''(0) = 0$, c 正确

至于剩下三个选项则显然是不对的, 考虑形如 $x^m \sin^n \frac{1}{x}$ 的函数即可给出反例

□

例题 3.1.15 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 中且连续, 正整数 n 使得 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^n} = 0$, 证明: 若 n 为奇数, 则 $f(x) + x^n$ 有零点, 若 n 为偶数, 则 $f(x) + x^n$ 有最小值.

证明. 设 $F(x) = f(x) + x^n$, 则 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

1. 当 n 是奇数时, 有

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \left(1 + \frac{f(x)}{x^n} \right) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left(1 + \frac{f(x)}{x^n} \right) = +\infty.$$

所以 $\exists \xi \in (-\infty, +\infty)$, 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) + \xi^n = 0$.

2. 当 n 是偶数时, 有

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \left(1 + \frac{f(x)}{x^n} \right) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left(1 + \frac{f(x)}{x^n} \right) = +\infty.$$

所以对 $M = |F(0)| + 1$, $\exists X > 0$, 使得当 $|x| > X$ 时, 有 $F(0) < M < F(x)$.

此外, $\exists \eta \in [-X, X] \subset (-\infty, +\infty)$, 使得 $F(\eta)$ 是 $F(x)$ 在 $[-X, X]$ 上的最小值. 于是, 在 $[-X, X]$ 上, $F(x) \geq F(\eta)$, 特别有 $F(0) \geq F(\eta)$, 所以对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $F(\eta) \leq F(x)$, 即 $f(\eta) + \eta^n \leq f(x) + x^n$.

故函数 $f(x) + x^n$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可取到最小值 $f(\eta) + \eta^n$.

□

注释 3.1.2: 第一问也可以用反证法做 (像上课那样), 第二问其实蕴含了一个很好用的结论: 如果连续函数在无穷处取值正无穷, 那么它一定有最小值, 这个对于 n 元函数也是适用的

例题 3.1.16 设 $a, b > 0, a \neq b$, 函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(ax) - f(-bx)}{x} = A$ 为有限数, 证明 $f'(0)$ 存在并计算 $f'(0)$, 又问删去条件 $a \neq b$ 结论是否成立.

证明. 得到答案是容易的, 直接设 $f(x) = kx$ 代入可以看出 $f'(0) = \frac{A}{a+b}$, 关键是证明存在性

考虑 $f(x) - kx$ 这样的函数, 不妨设 $A = 0$, 做形如 $x \rightarrow kx$ 的替换, 不妨设 $b = 1, a \in (0, 1)$, 条件等价变为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\lambda x)}{x} = 0, \lambda \in (-1, 0)$, 要证明的是可导且 $f'(0) = 0$

根据极限定义, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得任意 $|x| \in (0, \delta)$ 都有 $\left| \frac{f(x) - f(\lambda x)}{x} \right| < \varepsilon$, 也就是说

$$|f(x) - f(\lambda x)| < \varepsilon |x|, \forall x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$$

注意当 x 在这个范围内时, λx 也在, 所以用 λx 替换 x , 反复代入可知

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\lambda x)| &< \varepsilon |x|, |f(\lambda x) - f(\lambda^2 x)| < \varepsilon |\lambda| |x|, \dots, |f(\lambda^{n-1} x) - f(\lambda^n x)| < \varepsilon |\lambda|^{n-1} |x| \\ \Rightarrow |f(x) - f(\lambda^n x)| &< \varepsilon |x| (1 + |\lambda| + |\lambda|^2 + \dots + |\lambda|^{n-1}) < \varepsilon |x| \frac{1}{1 - |\lambda|} \end{aligned}$$

也就是说

$$\left| \frac{f(x) - f(\lambda^n x)}{x} \right| < \varepsilon \frac{1}{1 - |\lambda|}, \forall n \geq 1, \forall x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$$

现在令 $n \rightarrow \infty$ 并利用连续性可知

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \leq \varepsilon \frac{1}{1 - |\lambda|}, \forall x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$$

对比极限定义可得 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导且 $f'(0) = 0$

显然条件 $a \neq b$ 是必要的, 否则考虑 $f(x) = |x|$ 即为反例

□

注释 3.1.3: 不要直接拆成两个极限, 然后用导数定义直接“秒杀”, 例如

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(ax) - f(-bx)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(ax) - f(0)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-bx) - f(0)}{x} = (a+b)f'(0) = A$$

这是错误的! 因为没有证明可导性, 显然证明可导性比算出来导数要困难, 也是本题的核心

3.2 函数方程问题

很多函数方程, 转化到最后都是柯西方程, 因此这个基本模型很重要.

命题 3.2.1: 柯西方程

设 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上, 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 恒成立, 若 $f(x)$ 在某个区间内有上界或者有下界, 证明: 存在常数 k 使得 $f(x) = kx$.

特别的: 如果 $f(x)$ 连续、在某点连续、单调、在某区间单调, 有界之一成立, 上述结论都对.

证明. 首先证明: 对有理数 r 总有 $f(r) = rf(1)$ (不依赖任何其余条件)

对正有理数 $x = \frac{q}{p}$ 有

$$\begin{aligned} f\left(\frac{q}{p}\right) &= f\left(\frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p}\right) = f\left(\frac{1}{p}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{p}\right) = qf\left(\frac{1}{p}\right) \\ f(1) &= f\left(\frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p}\right) = f\left(\frac{1}{p}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{p}\right) = pf\left(\frac{1}{p}\right) \end{aligned}$$

所以 $f\left(\frac{q}{p}\right) = \frac{q}{p}f(1)$, 也即 $f(x) = xf(1)$ 对正有理数成立

因为 $f(0+0) = f(0) + f(0)$, 所以 $f(0) = 0$, 令 $y = -x$ 有 $f(-x) = -f(x)$, 所以对有理数 x 均有 $f(x) = xf(1)$

但是并不能推广到所有实数 x , 现在已知 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 中有上界 M (下界同理), 注意 $f(x) = f\left(x + \frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, 所以对任意 $x \in \left[-\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}\right]$, 都有 $f(x) \leq M - f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 是有上界的

因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以在上述区间内 $f(x)$ 也有下界, 也就是说 $f(x)$ 在原点附近是有界的, 条件表明 $f(2x) = 2f(x)$, 现在运用例题 3.1.6 的结果可知 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 进而

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x) + f(\Delta x)) = f(x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\Delta x) = f(x)$$

所以 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是连续函数

对任意 $x \in \mathbb{R}$, 可以取一列有理数 $r_n \rightarrow x$, 则

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n f(1) = x f(1)$$

所以 $f(x) = xf(1)$ 对一切 x 成立

□

例题 3.2.1 设函数 $f(x)$ 满足函数方程 $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, 且已知 $f'(0) = 1$. 证明: $f(x)$ 可导且 $f'(x) = f(x)$.

证明. 取 $x = y = 0$ 可知 $f(0) = 0, 1$, 如果 $f(0) = 0$ 则令 $y = 0$ 有 $f(x) = 0$ 恒成立

如果 $f(0) = 1$, 则条件表明 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$, 进而对任意 x 都有

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - 1}{\Delta x} = f(x)$$

所以 $f(x)$ 可导且 $f'(x) = x$, 进一步有 $f(x) = 0$ 或者 $f(x) = e^x$

□

例题 3.2.2 设 $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$ 且 $f(1) = 1$, 若 $f(x)$ 二阶可导且 $f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}f(x)$, 求 $f(x)$.

证明. 根据条件有 $f'(x) = -\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{x}\right)$, 求导可知

$$f''(x) = \frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{4x^2}f(x) \Rightarrow 4x^2f''(x) + f(x) = 0$$

这是二阶变系数线性齐次微分方程, 没有通解公式, 必须要观察一个解出来, 尝试幂函数发现 $\sqrt{x}$ 是这个微分方程的一个解 (但是并不是原题的解), 所以考虑 $yy'_0 - y'y_0$ 这样的东西的导数, 其中 y_0 是一个已知的解, 则有

$$\left(f'(x)\sqrt{x} - f(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = f''(x)\sqrt{x} + f(x)\frac{1}{4x\sqrt{x}} = 0$$

于是 $f'(x)\sqrt{x} - f(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} = C$, 条件 $f(1) = 1$ 代入可知 $f'(1) = -\frac{1}{2}$, 再代入有 $C = -1$, 所以

$$\begin{aligned} f'(x) - \frac{f(x)}{2x} &= -\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \left(f(x)e^{\int -\frac{1}{2x}dx}\right)' = \left(\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{f'(x)\sqrt{x} - \frac{f(x)}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{1}{x} \\ \frac{f(x)}{\sqrt{x}} &= -\ln x + C', f(1) = 1 = C' \Rightarrow f(x) = \sqrt{x}(1 - \ln x) \end{aligned}$$

□

3.3 求导法则与高阶导数计算

例题 3.3.1 设 $y = y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)} = e^y \ln 29$ 确定, 其中 f 具有二阶导数, 且 $f'(x) \neq 1$, 计算 $\frac{d^2 y}{dx^2}$

证明. 取对数求导有

$$\begin{aligned} \ln x + f(y) &= y + \ln \ln 29, \frac{1}{x} + f'(y) y' = y' \Rightarrow y' = \frac{1}{x(1-f'(y))} \\ y'' &= -\frac{1-f'(y)-xf''(y)y'}{x^2(1-f'(y))^2} = \frac{f''(y)\frac{1}{1-f'(y)}+f'(y)-1}{x^2(1-f'(y))^2} = \frac{f''(y)(f'(y)-1)^2}{x^3(1-f'(y))^3} \end{aligned}$$

□

例题 3.3.2 1. 对于 $y = f(x)$ 确定的反函数 $x = f^{-1}(y)$, 计算其导数与二阶导数.

2. 对于参数方程 $x = u(t), y = v(t)$ 确定的函数 $y = y(x)$, 计算 $y'(x), y''(x)$.

证明. 1.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)}, \frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{f'(x)} \right) = \frac{\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{f'(x)} \right)}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{f''(x)}{f'^3(x)}$$

2.

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{v'(t)}{u'(t)}, y''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{v'(t)}{u'(t)} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{v''(t)u'(t) - u''(t)v'(t)}{u'^3(t)}$$

□

例题 3.3.3 对正整数 n , 求 $f(x) = x^n e^{ax}$ 和 $g(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 8}$ 的 n 阶导数.

证明. 根据莱布尼茨公式有

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}a^{n-k}e^{ax}$$

对于 $g(x)$, 应先裂项有 $g(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 8} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+2} \right)$, 所以

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{6} \left(\frac{1}{(x-4)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}} \right)$$

□

例题 3.3.4 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$, 证明: $f(x)$ 有任意阶连续导数.

证明. 采用数学归纳法证明: $f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ p_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$, 这里 $p_n(x)$ 是 $2n$ 次的多项式

当 $n=1$ 时 $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}, x > 0$, 并且 $x < 0$ 时 $f'(x)$ 恒为零, 再看 $x=0$ 处, 显然 $f'_-(0) = 0$ 且

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

因此 $n=1$ 结论成立, 如果 n 时成立, 则 $n+1$ 时因为

$$\left(p_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}} \right)' = e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2} p_n \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x^2} p_n' \left(\frac{1}{x} \right) \right) = e^{-\frac{1}{x}} p_{n+1} \left(\frac{1}{x} \right)$$

所以 $p_{n+1}(x) = x^2(p_n(x) - p_n'(x))$ 是 $2n+2$ 次多项式 (运用归纳假设), 再结合

$$f_+^{(n+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} p_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x p_n(x)}{e^x} = 0$$

可知 $n+1$ 时结论成立, 这样我们就求出了高阶导的表达式

为说明连续性, 只需要关注 $x=0$ 处, 如上计算极限显然 $f^{(n)}(x)$ 在 $x=0$ 连续, 从而结论得证

□

例 3.3.5 证明: Legendre 多项式 $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ 满足方程

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x), (1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

证明. 先证明第一个式子, 等价于

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \left((x^2-1)^{n+1} \right)^{(n+2)} - \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \left((x^2-1)^{n-1} \right)^{(n)} = \frac{2n+1}{2^n n!} \left((x^2-1)^n \right)^{(n)} \\ \Leftrightarrow & \left((x^2-1)^{n+1} \right)^{(n+2)} - 4n(n+1) \left((x^2-1)^{n-1} \right)^{(n)} = 2n(2n+1) \left((x^2-1)^n \right)^{(n)} \end{aligned}$$

然后将左边的求 $n+2$ 阶导写成先求 2 阶导再求 n 阶导, 则有

$$\begin{aligned} & \left((x^2-1)^{n+1} \right)^{(n+2)} = \left((n+1)2x(x^2-1)^n \right)^{(n+1)} = 2(n+1) \left((x^2-1)^n + 2nx^2(x^2-1)^{n-1} \right)^{(n)} \\ & = 2(n+1) \left((x^2-1)^n \right)^{(n)} + 4n(n+1) \left((x^2-1)^{n-1} \right)^{(n)} \\ & = 2(n+1) \left((x^2-1)^n \right)^{(n)} + 4n(n+1) \left((x^2-1)^n + (x^2-1)^{n+1} \right)^{(n)} \\ & = 2(n+1)(2n+1) + 4n(n+1) \left((x^2-1)^{n+1} \right)^{(n)} \end{aligned}$$

第一个式子得证, 再来看第二个

注意齐次性, 只需要对 $\left((x^2-1)^n \right)^{(n)}$ 这个多项式代入验证就可以了, 这是 n 次多项式, 设 $\left((x^2-1)^n \right)^{(n)} = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = f(x)$, 将其代入到要验证的等式中, 我们来寻找系数需要满足的条件

$$\begin{aligned} & (1-x^2)f''(x) - 2xf'(x) + n(n+1)f(x) \\ & = (1-x^2) \sum_{k=2}^n k(k-1)a_kx^{k-2} - 2x \sum_{k=1}^n ka_kx^{k-1} + n(n+1) \sum_{k=0}^n a_kx^k \\ & = \sum_{k=2}^n k(k-1)a_kx^{k-2} - \sum_{k=2}^n k(k-1)a_kx^k - 2 \sum_{k=1}^n ka_kx^k + n(n+1) \sum_{k=0}^n a_kx^k \\ & = \sum_{k=0}^n (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^n (k(k+1) - n(n+1))a_kx^k \end{aligned}$$

注意 $(x^2-1)^n$ 展开式中没有 x^{2n-1} 项, 所以相应的 $a_{n-1} = 0$, 并且上面的多项式中 x^n 项系数为零, 所以只需要验证 $1, x, \dots, x^{n-2}$ 项的系数均为零即可, 这等价于说明

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - n(n+1)}{(k+2)(k+1)} a_k, k = 0, 1, \dots, n-2$$

分类讨论, 若 $n = 2m$, 则

$$(1-x^2)^{2m} = \sum_{i=0}^m C_{2m}^{m+i} (-1)^{m+i} x^{2m+2i} + x^{2m-2} + \dots, \left((1-x^2)^{2m} \right)^{(2m)} = \sum_{i=0}^m C_{2m}^{m+i} (-1)^{m+i} \frac{(2m+2i)!}{(2i)!} x^{2i}$$

这个多项式不含奇数次项, 因此只需要对偶数次项的系数进行验证, 也即说明

$$a_{2k+2} = \frac{2k(2k+1) - 2m(2m+1)}{(2k+2)(2k+1)} a_k, k = 0, 1, \dots, m-1$$

根据多项式的表达式有

$$a_{2i} = C_{2m}^{m+i} (-1)^{m+i} \frac{(2m+2i)!}{(2i)!}, i = 0, 1, \dots, m$$

将其代入化简, 很容易检查发现和目标式子一致, 奇数情形同理可证, 故结论成立

□

3.4 综合问题

例 3.4.1 设 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, 证明: 在区间 $(1, +\infty)$ 中, $f(x)$ 的奇数阶导恒正, 偶数阶导恒负.

证明.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 - 1} = x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_{\frac{1}{2}}^n \frac{1}{x^{2n}} = x \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n C_{\frac{1}{2}}^n \frac{1}{x^{2n}} \right) \\ &= x \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) \cdots (-\frac{1}{2} - n + 1)}{n!} \frac{1}{x^{2n}} \right) \\ &= x \left(1 - \frac{1}{2x^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{x^{2n}} \right) = x - \frac{1}{2x} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{x^{2n-1}} \end{aligned}$$

注意 $\frac{1}{x^k}$ 求导一次就添加一个负号, 求导两次负负得正, 所以对 $f(x)$ 求奇数阶导每一项系数都是正的, 求偶数阶导每一项系数都是负的, 结论得证

□

注释 3.4.1: 本题将 $x^2 - 1$ 因式分解然后莱布尼茨公式, 可以写出 n 阶导的表达式, 但是问题在于这个式子没什么用, 一个复杂的求和判断不了正负, 此外常规想法归纳也是没什么用的, 并不能写出高阶导分子对应的多项式

关于这个展开式做一点补充 (能看懂就理解一下, 看不懂就忽略, 直观的这样子计算即可):

因为 $x > 1$, 所以 $\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$ 里面的 $\frac{1}{x^2} < 1$, 从而能够应用 $(1+x)^a$ 的泰勒展开式 (如二项式定理一样计算) 写成无穷级数, 同时这个级数是内闭一致收敛的, 所以可以逐项求导, 这样前面的操作就是严谨的

例题 3.4.2 设 n 为正整数, $f(x) = \ln(x^{2n} + 1)$, 证明: $f^{(2n)}(-1) = 0$.

证明. 求导有 $f'(x) = \frac{2nx^{2n-1}}{x^{2n} + 1}$, 解方程 $x^{2n} + 1 = 0$ 可知 $x = e^{i\frac{2k+1}{2n}\pi}, k = 0, 1, \dots, 2n-1$

待定系数分解, 设 $\frac{2nx^{2n-1}}{x^{2n} + 1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{a_k}{x - w_k}$, 则有 $2nx^{2n-1} = (x^{2n} + 1) \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{a_k}{x - w_k}$

先求 a_0 , 因为

$$2nx^{2n-1} = a_0 \frac{x^{2n} + 1}{x - w_0} + \sum_{k=1}^{2n-1} a_k \frac{x^{2n} + 1}{x - w_k}$$

现在让 $x \rightarrow w_0$ 求极限, 则后面求和里面每一项的分子都会趋于零 (因为 w_0 是方程 $x^{2n} + 1 = 0$ 的根, 同时分母不趋于零 (显然这些根互不相同)), 所以后面的求和会趋于零, 故只要算第一项的极限

由洛必达法则知

$$\lim_{x \rightarrow w_0} \frac{x^{2n} + 1}{x - w_0} = \lim_{x \rightarrow w_0} \frac{2nx^{2n-1}}{1} = 2nw_0^{2n-1} \Rightarrow a_0 = 1$$

同理可得其余的 a_k 也均为 1, 故 $f'(x) = \frac{2nx^{2n-1}}{x^{2n} + 1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{x - w_k}$

现在两边再求 $2n-1$ 阶导有

$$f^{(2n)}(x) = - \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(2n-1)!}{(x - w_k)^{2n}}, f^{(2n)}(-1) = -(2n-1)! \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{(1 + w_k)^{2n}}$$

于是只要验证 $\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{(1 + w_k)^{2n}} = 0$

设 $w_k = \cos \theta_k + i \sin \theta_k$, 代入有

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 + w_k)^{2n}} &= \frac{1}{(\cos \theta_k + 1 + i \sin \theta_k)^{2n}} = \frac{1}{(2\cos^2 \frac{\theta_k}{2} + 2i \sin \frac{\theta_k}{2} \cos \frac{\theta_k}{2})^{2n}} \\ &= \frac{1}{2^{2n} \cos^{2n} \frac{\theta_k}{2} (\cos \frac{\theta_k}{2} + i \sin \frac{\theta_k}{2})^{2n}} = \frac{e^{-ni\theta_k}}{2^{2n} \cos^{2n} \frac{\theta_k}{2}} = \frac{e^{-i\frac{2k+1}{2}\pi}}{2^{2n} \cos^{2n} \frac{\theta_k}{2}} = \frac{-i(-1)^k}{2^{2n} \cos^{2n} \frac{\theta_k}{2}} \\ \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{(1 + w_k)^{2n}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{(1 + w_k)^{2n}} + \frac{1}{(1 + w_{2n-1-k})^{2n}} \right) = \frac{-i}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(-1)^k}{\cos^{2n} \frac{\theta_k}{2}} + \frac{(-1)^{2n-1-k}}{\cos^{2n} \frac{\theta_{2n-1-k}}{2}} \right) \\ &= \frac{-i}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{1}{\cos^{2n} \frac{\theta_k}{2}} - \frac{1}{\cos^{2n} \frac{2\pi - \theta_k}{2}} \right) = \frac{-i}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{1}{\cos^{2n} \frac{\theta_k}{2}} - \frac{1}{\cos^{2n} \frac{\theta_k}{2}} \right) = 0 \end{aligned}$$

结论得证

□

注释 3.4.2: 复数域内同样有自然理解的极限运算法则、求导法则以及洛必达法则, 许多高阶导数问题都需要在复数范围内分解并运用欧拉公式, 因此应该掌握本方法, 背后原理其实没有什么深刻的东西, 无非是分离实部虚部然后各自去证明, 当然非数考试不必纠结原理, 掌握方法即可

例题 3.4.3 给定正整数 n , 计算以下 $f(x)$ 的 n 阶导数

$$f(x) = \int_0^x \left(1 + \frac{x-t}{1!} + \frac{(x-t)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \right) e^{nt} dt$$

证明. 换元可知

$$f(x) = \int_0^x \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right) e^{n(x-t)} dt$$

方便起见, 记 $g(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, 则有

$$\begin{aligned} g'(t) &= 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ g''(t) &= 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^{n-3}}{(n-3)!}, \dots \\ g(0) &= g'(0) = \dots = g^{(n-1)}(0) = 1 \end{aligned}$$

分部积分有

$$\begin{aligned} n^n f(x) &= n^{n-1} \int_0^x g(t) d(-e^{n(x-t)}) \\ &= n^{n-1} \left(e^{nx} - g(x) + \int_0^x g'(t) e^{n(x-t)} dt \right) \\ &= n^{n-1} (e^{nx} - g(x)) + n^{n-2} \int_0^x g'(t) d(-e^{n(x-t)}) \\ &= n^{n-1} (e^{nx} - g(x)) + n^{n-2} \left(e^{nx} - g'(x) + \int_0^x g''(t) e^{n(x-t)} dt \right) \\ &= n^{n-1} (e^{nx} - g(x)) + n^{n-2} (e^{nx} - g'(x)) + n^{n-3} \int_0^x g''(t) d(-e^{n(x-t)}) \\ &= \dots \\ &= n^{n-1} (e^{nx} - g(x)) + n^{n-2} (e^{nx} - g'(x)) + \dots + n \int_0^x g^{(n-1)}(t) e^{n(x-t)} dt \\ &= n^{n-1} (e^{nx} - g(x)) + n^{n-2} (e^{nx} - g'(x)) + \dots + n^0 (e^{nx} - g^{(n-1)}(x)) \\ &= e^{nx} (1 + n + n^2 + \dots + n^{n-1}) - (n^{n-1} g(x) + n^{n-2} g'(x) + \dots + g^{(n-1)}(x)) \\ &= e^{nx} \frac{n^n - 1}{n - 1} - (n^{n-1} g(x) + n^{n-2} g'(x) + \dots + g^{(n-1)}(x)) \end{aligned}$$

注意后面括号里的东西, 是一个次数不超过 $n-1$ 的多项式, 所以求 n 阶导之后, 会变成零
现在我们就求出来 $f(x)$, 直接求 n 次导数可知 $f^{(n)}(x) = e^{nx} \frac{n^n - 1}{n - 1}$, 结论得证

□

例 3.4.4 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上, 满足条件: 对任何数列 x_n , 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = a$ 是有限数, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} = f(a)$, 证明: $f(x)$ 是一次函数.

证明. 方法一: 注意对于 $kx + b$ 这样的线性函数, 显然具备题中所说的性质, 因此对任意 $f(x)$, 考虑 $l(x) = (f(1) - f(0))x + f(0)$ 以及 $g(x) = f(x) - l(x)$, 则 $g(0) = g(1) = 0$ 并且 $g(x)$ 也具备题中的性质, 我们证明 $g(x)$ 恒为零即可 (换句话说就是: 不妨设 $f(0) = f(1) = 0$ 去证明 $f(x)$ 恒为零)

对任意实数 x, y , 取 $x_{2n-1} = x, x_{2n} = y$ 则显然 $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \rightarrow \frac{x+y}{2}$, 根据条件就有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x_1) + \dots + g(x_n)}{n} = g\left(\frac{x+y}{2}\right)$, 然而 $g(x_{2n-1}) = g(x), g(x_{2n}) = g(y)$, 代入到极限当中有 $g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x) + g(y)}{2}$, 特别的有 $g\left(x + \frac{1}{2}\right) + g\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2g(x)$, 因此只要证明了 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 区间中恒为零, 就可以推出 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒为零

对于 $(0, 1)$ 中的有理数 $x = \frac{q}{p}$, 则可以取 x_n 为 $0, \dots, 0, 1, \dots, 1$ 这样一直循环下去, 其中有 q 个 1 和 $p-q$ 个 0, 如此构造的序列 x_n 满足 $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \rightarrow \frac{q}{p}$ 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x_1) + \dots + g(x_n)}{n} = g\left(\frac{q}{p}\right)$, 然而求极限中分子的每一项都是零, 故 $g\left(\frac{q}{p}\right) = 0$

对于 $(0, 1)$ 中的无理数 x , 可以归纳构造 x_n 为 $x_{n+1} = \begin{cases} 0, & \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} > x \\ 1, & \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} < x \end{cases}, x_1 = 0$, 直观来看此时平均值就会趋近于 x , 同上可知 $f(x) = 0$, 这就证明了 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 内恒为零, 结论得证

方法二: 同样不妨设 $f(0) = f(1) = 0$, 要证明 $f(x)$ 恒为零

同上可以得到 $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$, 取 $y = 0$ 可知 $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2}$, 因此

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x+y)$$

此即柯西方程, 满足 $f(0) = f(1) = 0$, 因此只要说明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 便可以由柯西方程结论得证

反证法, 如果不连续, 则存在正数 δ 和一系列 $x_n \rightarrow 0$ 使得 $|f(x_n)| \geq \delta$, 故 $f(x_n) \geq \delta$ 和 $f(x_n) \leq -\delta$ 里面必有一个出现了无穷次, 不妨设为前者, 进而不妨 $f(x_n) \geq \delta$ 对任意 n 恒成立, 代入到题目条件中, 由 stolz 公式显然 x_n 的平均值趋于零, 但是 $\frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \geq \delta$ 不可能趋于零, 矛盾

□

注释 3.4.3: 方法一最后针对无理数证明的那一部分, 非数学生直观上理解这个就可以了, 证明虽然也不难但是写起来稍有麻烦, 不必掌握 (适合数学类), 感兴趣的同学可以按照下面的框架去书写证明 (其实下面基本上已经做完了)

1. x_n 不可能从某项开始后面一直取 1 或者一直取 0, 否则会导致极限为零或者为 1
2. 这说明 x_n 的平均值一定会无数次的超过和小于无理数 x , 并且在超过之后会一直递减, 小于之后则会一直递增, 相当于“负反馈调节”
3. 所以只需要看每一次跨过 x 时, 平均值与 x 的误差, 这个误差显然不超过平均值序列的相邻两项之差, 但是相邻项之差

$$\left| \frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} \right| = \left| \frac{n(S_{n+1} - S_n) - S_n}{n(n+1)} \right| \leq \frac{2}{n+1} \rightarrow 0$$

所以得证

例题 3.4.5 给定实数 a , 定义函数列 $f_0(x) = e^{-x} \sin ax, f_n(x) = \int_x^{+\infty} f_{n-1}(t) dt$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(2024)$.

证明. 显然在 $a = 0$ 时候 $f_n(x)$ 恒为零, 所以极限也是零, 以下设 $a \neq 0$

方法一 (复数方法): 运用欧拉公式有

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_x^{\infty} e^{-t} \sin at dt = \int_x^{\infty} \operatorname{Im} e^{-t(1-ai)} dt = \operatorname{Im} \int_x^{\infty} e^{-t(1-ai)} dt = \operatorname{Im} \frac{e^{-t(1-ai)}}{-(1-ai)} \Big|_x^{+\infty} = \operatorname{Im} \frac{e^{-x(1-ai)}}{1-ai} \\ f_2(x) &= \int_x^{\infty} f_1(t) dt = \int_x^{\infty} \operatorname{Im} \frac{e^{-t(1-ai)}}{1-ai} dt = \operatorname{Im} \int_x^{\infty} \frac{e^{-t(1-ai)}}{1-ai} dt = \operatorname{Im} \frac{e^{-t(1-ai)}}{-(1-ai)^2} \Big|_x^{+\infty} = \operatorname{Im} \frac{e^{-x(1-ai)}}{(1-ai)^2} \\ \dots \Rightarrow f_n(x) &= \operatorname{Im} \frac{e^{-x(1-ai)}}{(1-ai)^n}, f_n(2024) = \operatorname{Im} \frac{e^{-2024(1-ai)}}{(1-ai)^n} \end{aligned}$$

注意 $\left| \frac{1}{(1-ai)^n} \right| = \frac{1}{(a^2+1)^{\frac{n}{2}}} \rightarrow 0$, 所以实部虚部都趋于零, 自然所求极限为零

方法二 (实数方法): 以上方法的结果告诉我们

$$f_n(x) = \operatorname{Im} \frac{e^{-x(1-ai)}}{(1-ai)^n} = \operatorname{Im} \frac{e^{-x(1-ai)}}{(\sqrt{a^2+1}e^{i \arctan(-a)})^n} = \frac{e^{-x}}{(a^2+1)^{\frac{n}{2}}} \operatorname{Im} e^{i(ax+n \arctan a)} = \frac{e^{-x} \sin(ax+n \arctan a)}{(a^2+1)^{\frac{n}{2}}}$$

归纳, 代入容易证明以上高阶导公式, 从而赋值 $x = 2024$ 可知所求极限是零

□

例题 3.4.6 设 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ 内二阶可导, 其中 $a > 2$, 同时满足 $\max_{x \in [-a, a]} |f(x)| = 1, |f(0)f'(0)| \geq \lambda$,

这里 $\lambda = \begin{cases} \frac{1}{2\sin^2 \frac{a}{2}}, a \leq \pi \\ \frac{1}{2}, a > \pi \end{cases}$ 证明: 存在 $u \in (-a, a)$ 使得 $f''(u) + f(u) = 0$.

证明. 反证法, 则不妨设 $f''(x) + f(x) > 0$ 恒成立, 考虑 $g(x) = f^2(x) + f'^2(x)$, 则 $g(0) = f^2(0) + f'^2(0) \geq 2f(0)f'(0) \geq 2\lambda$ 并且 $g'(x) = 2f'(x)(f(x) + f''(x))$, 所以 $g(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的单调性

因为 $|f(0)f'(0)| \geq \lambda > 0$, 所以 $f'(0) \neq 0$, 结合连续性知 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 附近都非零, 分类讨论

如果 $f'(0) > 0$, 考虑 $[0, a]$ 中使得 $f'(x) > 0$ 恒成立的最大区间 (取上确界), 设为 $[0, t]$, 这里 $0 < t \leq a$, 于是 $g(x)$ 在 $[0, t]$ 中严格单调递增, 便有

$$g(x) = f^2(x) + f'^2(x) > f^2(0) + f'^2(0) \geq 2\lambda, \forall x \in (0, t]$$

如果 $t < a$, 则 $f'(t) = 0$ 代入有 $2\lambda < g(t) = f^2(t) \leq 1$, 于是 $\lambda < \frac{1}{2}$ 导致矛盾
这说明 $t = a$, 并且 $f(x), g(x)$ 在 $[0, a]$ 中严格单调递增, 所以

$$\begin{aligned} f^2(x) + f'^2(x) &> 2\lambda, f'(x) > 0, \forall x \in (0, a) \\ \Rightarrow f'(x) &> \sqrt{2\lambda - f^2(x)} \neq 0, \frac{f'(x)}{\sqrt{2\lambda - f^2(x)}} > 1 \\ \Rightarrow \int_0^a \frac{f'(x)}{\sqrt{2\lambda - f^2(x)}} dx &= \arcsin \frac{f(x)}{\sqrt{2\lambda}} \Big|_0^a > a \\ a < \arcsin \frac{f(x)}{\sqrt{2\lambda}} \Big|_0^a &\leq 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \Rightarrow \lambda > \frac{1}{2\sin^2 \frac{a}{2}} \end{aligned}$$

这与条件矛盾

如果 $f'(0) < 0$, 现在考虑区间 $[-a, 0]$, 同上讨论可知矛盾! 因此得证 □

注释 3.4.4: 关于非“反证法, 不妨设 $f(x) + f''(x) > 0$ 恒成立”的说明: $f''(x)$ 具备介值性, $f(x)$ 是连续的, 但是连续函数和介值性函数相加不一定具备介值性! 反例构造很困难但是有反例 (自行知乎搜索), 所以“连续 + 介值 = 介值”不是我们反证法“不妨设 $f(x) + f''(x) > 0$ 恒成立”的理由
实际上, 考虑

$$\begin{aligned} (f'(x) \sin x - f(x) \cos x)' &= (f''(x) + f(x)) \sin x \\ (f'(x) \cos x + f(x) \sin x)' &= (f''(x) + f(x)) \cos x \end{aligned}$$

注意 $\sin x, \cos x$ 在相应的长度为 π 的区间内都是无零点的, 所以如上将 $f(x) + f''(x)$ 写成某个函数的导数, 然后不同的区间内利用导数的介值性, 便可以说明“反证法, 不妨设 $f(x) + f''(x) > 0$ 恒成立”是合理的

3.5 练习题

习题 3.5.1 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近有定义且当 $x \neq 0$ 时 $f''(x)$ 存在, 问 $f''(0)$ 是否存在

习题 3.5.2 证明: $(\sin^4 x + \cos^4 x)^{(n)} = 4^{n-1} \cos\left(4x + \frac{\pi}{2}n\right), \quad \forall n \geq 1$

习题 3.5.3 设多项式 $p(x)$ 只有实零点. 证明: $[p'(x)]^2 - p(x)p''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

习题 3.5.4 若 $f(1) = 0, f'(1)$ 存在, 求极限 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) \tan 3x}{(e^{x^2} - 1) \sin x}$

习题 3.5.5 对于 $y = \arctan x$, 证明: (1) $y^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n y \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$; (2) $y^{(n)}(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}$, 其中 $P_{n-1}(x)$ 是最高次项系数等于 $(-1)^{n-1}n!$ 的 $n-1$ 次多项式.

习题 3.5.6 设 $f(x)$ 任意阶可导且 $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{n^2+1}, n=1, 2, \dots$, 计算 $f^{(k)}(0)$.

习题 3.5.7 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x^2 + 4xy + e^y = 1$ 确定, 计算 $\left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{x=0}$

习题 3.5.8 设 $f(x) = (x + \sqrt{x^2 + 1})^n$, 证明: $(x^2 + 1)f'''(x) + 3xf''(x) + (1 - n^2)f'(x) = 0$.

习题 3.5.9 设成立 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = o(x)(x \rightarrow 0)$. 证明: $f(x) = o(x)(x \rightarrow 0)$

习题 3.5.10 设连续函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$, 满足 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 恒成立, 求 $f(x)$.

习题 3.5.11 设 $f(x)$ 单调递增且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$, 证明: 对任意 $a > 0$ 有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = 1$.

习题 3.5.12 设 $f(x) \in C(\mathbf{R})$, 对任意 $a \in \mathbf{R}$ 都有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(a+x) + f(a-x)) = 2f(a)$, 求 $f(x)$.

习题 3.5.13 设函数 $f(x)$ 连续, $g(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A, A$ 为常数, 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

习题 3.5.14 证明: $(e^{ax} \sin bx)^{(n)} = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \sin(bx + n\varphi)$, 其中 $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

习题 3.5.15 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 对任意满足 $a_n < 0 < b_n$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 的点列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$ 都存在. 证明: 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可微.

第四章 中值定理

中值定理是考研和竞赛的热点问题，初学者通常做起来感到一头雾水，实则这一部分有着几个比较通用的方法与模板，系统学一遍之后中值定理就不会有难题，可以说：这一章的题目难度是有上限的，它不像级数，积分不等式，函数性态分析，数列等等章节，一旦想出难题可以出到没人能做出来，并且连入手点都没有。

简单且常用的方法主要是罗尔中值定理（不要管拉格朗日中值定理以及柯西中值定理，没什么用）、达布中值定理（导数介值性，非常重要），微分方程思想，插值多项式方法，常数 K 值法，如果这些方法都不行，或者虽然可以但是你没有想到，那就用万能大招：性态分析，通常反证法配合导数介值性就能导出恒成立的不等式，进而走性态分析（看函数的变化规律，或者说“在反证法之下，函数至少会具备怎样的性质”）一定能做出来。

常数 K 值法通常适用于单个中值点的情况，并且这个点最好不要是区间的中点

插值多项式方法通常适用于题目里面给了一堆乱七八糟的边界条件的时候，这时我们可以寻找一个插值多项式 $p(x)$ ，使得 $f(x) - p(x)$ 在题目这些边界点的取值都是零，进而能够反复用罗尔中值定理得到你想要的东西

微分方程方法就是将目标式子里面的中值点看成自由变量 x ，对应着一个微分方程，将其解出来，此时会有一个常数 C ，然后将 C 移到等号一边，等号另一边的函数记为 $F(x)$ ，往往这个 $F(x)$ 就是你要的，求导配合罗尔中值定理即可完成证明，可以形象的称为“对常数 C 求导”。此类问题能做出来当且仅当你能解出微分方程，如果方程你不会求解那就没办法了，所以解微分方程是这种问题的基本功。

注意如果微分方程不是一阶的，则我们要采用“降阶思想”，每一次“对其中一个常数 C 求导”，然后换一个辅助函数，再来一次，以此类推。

微分方程法和插值多项式方法有区别也有联系，有时二者需要一起使用，通常给一堆随便取值的边界条件时候，我们要用插值多项式方法来调成零，而如果边界条件虽然给了但是都是零，那么此时就跟插值没什么关系了，走微分方程这条路，所以条件里面给定的函数取值，往往能决定究竟本题采用什么方法。

关于多个中值点的问题，要注意看条件是否有强调中值点互不相同，一旦有说明中值点不同，就意味着你必须分区间做，然后在不同的区间里面分别使用中值定理（因为不分区，就不可能保证中值点互不相同），所以这算一个提示，而如果没强调，则具体情况具体分析。

4.1 基础题目

例题 4.1.1 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 中连续, 在 $(0, 1)$ 中二阶可导, 并且满足 $f(0) = f(1) = 0$, $f(x)$ 的最小值是 -1 , 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f''(\xi) \geq 8$.

证明. 设 $f(x_0) = -1, x_0 \in (0, 1)$ 是最小值, 于是 $f'(x_0) = 0$, 则在 x_0 处泰勒展开可知

$$f(0) = -1 + \frac{1}{2}f''(u)x_0^2, f(1) = -1 + \frac{1}{2}f''(v)(1-x_0)^2$$

进而

$$f''(u) = \frac{2}{x_0^2}, f''(v) = \frac{2}{(1-x_0)^2}, u \in (0, x_0), v \in (x_0, 1)$$

相加得到

$$\frac{f''(u) + f''(v)}{2} = \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{(1-x_0)^2} = \left(\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{(1-x_0)^2} \right) (x_0 + 1 - x_0)(x_0 + 1 - x_0) \geq 8$$

这里用到了赫尔德不等式, 再根据导数介值性可知存在 $w \in (u, v)$ 使得

$$f''(w) = \frac{f''(u) + f''(v)}{2} \geq 8$$

结论得证

□

例题 4.1.2 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内有连续的三阶导数, 且 $f(a) = f(b)$, $f'(a) = f'(b)$. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $12[f'(a) + f'(b)] + f'''(\xi)(b-a)^2 = 0$.

证明. 根据泰勒公式有

$$\begin{aligned} f(a) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi)\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^3 \\ f(b) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}f'''(\eta)\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

作差得到

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + 2 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 (f'''(\xi) + f'''(\eta)) = 0$$

再根据达布中值定理可知存在 u 使得 $f'''(u) = \frac{f'''(\xi) + f'''(\eta)}{2}$, 代入结论得证

□

例题 4.1.3 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内连续, 在 (a, b) 内可导, $f(a) = 0, f(b) = 2, f'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$, 证明: 存在 $u, v \in (a, b), u \neq v$ 满足 $\frac{f(u) + uf'(u)}{f'(u)} = 2b - a - \frac{1}{f'(v)}$.

证明. 注意左边分子和分母都是某个函数的导数, 并且题目要求是不同的中值点, 所以肯定要分区间使用中值定理
待定 $x_0 \in (a, b)$, 在 $[x_0, b]$ 内使用柯西中值定理有

$$\frac{bf(b) - x_0f(x_0)}{f(b) - f(x_0)} = \frac{f(u) + uf'(u)}{f'(u)} = \frac{2b - x_0f(x_0)}{2 - f(x_0)}$$

然后在区间 $[a, x_0]$ 内使用拉格朗日中值定理有

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = f'(v) = \frac{f(x_0)}{x_0 - a} \Rightarrow 2b - a - \frac{1}{f'(v)} = 2b - a - \frac{x_0 - a}{f(x_0)}$$

观察发现取 x_0 使得 $f(x_0) = 1$, 刚刚好左右两边相等 (观察不出来就解一元二次方程, 计算 $f(x_0)$), 结论得证 $\square$

注释 4.1.1: 注意, 一定是在 $[x_0, b]$ 内用柯西中值定理, 在 $[a, x_0]$ 内用拉格朗日中值定理, 如果反过来的话, 即便待定系数也做不出来, 但是事先我们并不知道用哪一个, 那就都试一遍

例题 4.1.4 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 中连续, 在 $(0, 1)$ 中可导, 对任意 $c \in (0, 1)$, 证明: 存在 $u \in (0, 1), v \in [0, 1]$ 使得 $2uf(1) + (c^2 - 1)f'(u) = f(v)$.

证明. 考虑 $g(x) = x^2f(1) + (c^2 - 1)f(x)$, 要证明的是 $g'(u) = f(v)$, 则 $g(0) = (c^2 - 1)f(0), g(1) = c^2f(1)$, 根据拉格朗日中值定理可知 $g(1) - g(0) = g'(u)$, 这里 $u \in (0, 1)$

注意 $c \in (0, 1)$, 根据连续函数的介值性有 $g(1) - g(0) = c^2f(1) + (1 - c^2)f(0) = f(v)$, 这里 $v \in [0, 1]$, 结论得证 $\square$

注释 4.1.2: 本题没有说中值点互不相同, 所以不需要分区间

例 4.1.5 设 $f(x) \in C[0, 1]$ 满足 $\int_0^1 (1-x) f(x) dx = 0$

证明: 存在 $u, v \in (0, 1)$ 使得 $\int_0^u f(x) dx = 0, \int_0^v x f(x) dx = 0$.

证明. 设 $g(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则有

$$\int_0^1 (1-x) f(x) dx = \int_0^1 (1-x) dg(x) = \int_0^1 g(x) dx = 0, g(0) = 0$$

要证明的是存在 $u, v \in (0, 1)$ 使得

$$g(u) = 0, \int_0^v x f(x) dx = \int_0^v x dg(x) = vg(v) - \int_0^v g(x) dx = 0$$

前者由积分中值定理显然成立, 后者考虑函数

$$p(x) = \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt, p(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) = 0$$

上面用了洛必达法则, 注意 $p(0) = p(1) = 0$, 于是根据罗尔中值定理可知结论成立

□

例题 4.1.6 给定正整数 n , 对任意 $x \in (0, 1)$, 证明: 存在 $u = u(x) \in (0, 1)$ 使得 $\frac{1}{1-x} = \frac{(1-u)^n (n+1)}{(1-xu)^{n+2}}$, 并计算 $\lim_{x \rightarrow 0^+} u$.

证明. 对任意给定的 $x \in (0, 1)$, 考虑函数 $f(u) = \frac{(1-u)^n (n+1)}{(1-xu)^{n+2}} - \frac{1}{1-x}$

则 $f(u)$ 是定义在 $[0, 1]$ 区间中的连续函数, 要证明其在 $(0, 1)$ 中有零点

因为 $f(1) = -\frac{1}{1-x} < 0, f(0) = n+1 - \frac{1}{1-x}$, 因此当 $f(0) > 0$ 也即 $x < \frac{n}{n+1}$ 时结论显然成立

以下设 $x \geq \frac{n}{n+1}$, 此时 $f(0) \leq 0, f(1) < 0$, 只需说明 $f(x)$ 的最大值是正数, 求导有

$$f'(u) = \frac{(n+1)(1-u)^{n-1}}{(1-xu)^{n+3}} (-2xu + nx + 2x - n)$$

所以 $f'(u)$ 与 $-2xu + nx + 2x - n$ 同号, 注意 $-2xu + nx + 2x - n$ 单调递减且在 $(0, 1)$ 内有唯一零点 $u_0 = 1 - \frac{n(1-x)}{2x}$, 所以该点是 $f(u)$ 的极大值点, 则只要验证 $f(u_0) > 0$, 也即

$$f(u_0) = \frac{(1-u_0)^n (n+1)}{(1-xu_0)^{n+2}} - \frac{1}{1-x} = \frac{\left(\frac{n(1-x)}{2x}\right)^n (n+1)}{\left((1-x)\left(1+\frac{n}{2}\right)\right)^{n+2}} - \frac{1}{1-x} > 0 \Leftrightarrow \frac{4n^{n+1}(n+1)}{(n+2)^{n+2}} > n(1-x)x^n$$

由均值不等式可知

$$n(1-x)x^n \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < \frac{4n^{n+1}(n+1)}{(n+2)^{n+2}} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \leq 4$$

高考方法容易知道上述不等式是正确的, 因此 u 的存在性得证

在题中等式两边令 $x \rightarrow 0$ 求极限, 立即可得 $\lim_{x \rightarrow 0^+} u = 1 - \frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}}$

□

注释 4.1.3: 本题采用最自然的想法泰勒展开的拉格朗日余项做不出来, 采用柯西余项可以一步到位 (题目大概率也是这么出的), 但是柯西余项很多人可能不知道, 这时你有两条路, 一种是用上课讲的也是前面的高考导数题方法, 另一种是想到泰勒公式的积分余项, 然后由此推导柯西余项, 完成证明

4.2 K 值法与插值方法

例题 4.2.1 设 n 为正整数, $f(x)$ 在 $[-n, n]$ 内 $2n+2$ 阶可导且 $f(k) = 0, k = 0, \pm 1, \dots, \pm n$, 证明: 存在 $\xi(x)$ 使得

$$\int_{-n}^n f(x) dx = \int_{-n}^n \frac{f^{(2n+2)}(\xi(x))}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^n (x^2 - i^2) dx.$$

证明. 记 $w(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$, 则 $w(x)$ 是 $2n+1$ 次多项式也是奇函数, 因此 $\int_{-n}^n w(x) dx = 0$, 要证明

$$\int_{-n}^n f(x) dx = \int_{-n}^n \frac{f^{(2n+2)}(\xi(x))}{(2n+2)!} xw(x) dx$$

因为 $w'(0) = \prod_{i=1}^n (-i^2) \neq 0$ 并且对任意实数 c 都有

$$\int_{-n}^n f(x) dx = \int_{-n}^n f(x) - cw(x) dx$$

且 $f(x)$ 与 $f(x) - cw(x)$ 在 $0, \pm 1, \dots, \pm n$ 处取值均为零, 所以可以取 c 使得 $f(x) - cw(x)$ 在 0 处的导数为零, 并且在 $0, \pm 1, \dots, \pm n$ 处取值均为零

因为 $w(x)$ 是 $2n+1$ 次多项式, 所以 $f^{(2n+2)}(x) = (f(x) - cw(x))^{(2n+2)}$, 则要证明的是

$$\int_{-n}^n h(x) dx = \int_{-n}^n \frac{h^{(2n+2)}(\xi(x))}{(2n+2)!} xw(x) dx$$

这里 $h(x) = f(x) - cw(x)$ 在 $0, \pm 1, \dots, \pm n$ 处均为零且 $h'(0) = 0$

现在直接证明: 对任意 $x \in [-n, n]$ 都存在 ξ 使得 $h(x) = \frac{h^{(2n+2)}(\xi(x))}{(2n+2)!} xw(x)$

采用常数 K 值法, 显然当 $x = 0, \pm 1, \dots, \pm n$ 时结论成立, 因为左右两边均为零

以下设当 $x \neq 0, \pm 1, \dots, \pm n$, 记 $K = \frac{h(x)(2n+2)!}{xw(x)}$ 然后考虑 $F(t) = h(t) = \frac{K}{(2n+2)!} tw(t)$, 则

$$F(0) = F'(0) = F(\pm 1) = \dots = F(\pm n) = F(x) = 0$$

一共 $2n+3$ 个条件, 反复使用罗尔中值定理可知 $F^{(2n+2)}(\xi) = 0$, 结论得证

□

注释 4.2.1: 本题不能抛开积分号, 直接对被积函数用常数 K 值法, 不然会发现零点少一个, 前面待定系数 c 的过程在效果上就是凭空造了一个零点出来, 现在阶数够了, 就可以抛开积分号, 采用标准的常数 K 值法解决问题了

例题 4.2.2 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 内连续, 在 $(0, 2)$ 内三阶可导且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 2, f(1) = 1, f(2) = 6$, 证明: 存在 $u \in (0, 2)$ 使得 $f'''(u) = 9$.

证明. 由条件可知 $f(0) = 0$, 进而由定义得 $f'(0) = 2$, 考虑找一个三次插值多项式 $p(x)$ 使得在已知条件这几个点处的取值都是零, 设所求的多项式为 $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, 则 $p(0) = 0, p'(0) = 2, p(1) = 1, p(2) = 6$, 解方程容易算出来 $p(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x$

设 $F(x) = f(x) - \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x\right)$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 2]$ 内连续, 在 $(0, 2)$ 中三阶可导且 $F(0) = F'(0) = F(1) = F(2) = 0$, 只需证明存在 $u \in (0, 2)$ 使得 $F'''(u) = 0$

反证法, 根据达布中值定理可知导数具有介值性, 不妨设 $f'''(x) > 0, \forall x \in (0, 2)$, 则 $f'(x)$ 是 $(0, 2)$ 内的严格下凸函数, 根据 $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ 可知存在 $u \in (0, 1), v \in (1, 2)$ 使得 $f'(u) = f'(v) = 0$, 结合 $f'(x)$ 严格下凸可知 $f'(x)$ 在 $(0, u)$ 严格单调递减, 因此导数的极限 $f'(0^+) = A > 0$ 一定存在, 这里 A 是有限的正数或者正无穷

另一方面, 根据导数定义和拉格朗日中值定理有

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(\xi(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$$

注意 $f'(0) = 0$, 于是 $A = 0$, 矛盾

□

注释 4.2.2: 上课讲的插值之后直接罗尔定理的方法需要 $f(x) \in C^3[0, 2]$ 或者至少 $f'(x)$ 连续, 否则 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续会导致中间罗尔定理用不了, 所以本题方法还需要如上改进一下
最后的操作本质上是“导数极限定理”

例题 4.2.3 设 $f(x)$ 在 $[-3, 1]$ 中二阶可导且 $f(-3) = -2, f(0) = 1, f(1) = \frac{10}{3}$, 证明: 存在 $u \in (-3, 1)$ 使得 $f''(u) = 2u + 2$.

证明. 从目标式看, 需要考虑 $g(x) = f(x) - (\frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax + b)$ 这样的辅助函数, 说明 $g''(u) = 0$ 即可, 也即需要找一组合适的 a, b , 利用条件给 $g(x)$ 提供三个零点

容易看出, 取 $g(x) = f(x) - (\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + 1)$ 即可, 此时 $g(-3) = g(0) = g(1) = 0$, 结论得证

□

注释 4.2.3: 注意边界条件是多了一个的, 所以可见最后要证明的式子右边 $2u + 2$ 不可以乱改, 否则是错题

例题 4.2.4 设 $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上二阶可导且 $f(-1) = 2 - \frac{1}{e}, f(0) = 1, f(2) = 2e^2 - 1$, 证明: 存在 $u \in (-1, 2)$ 使得 $f''(u) = f(u) + 2e^u + u - 1$.

证明. 首先把要证明的式子看做是微分方程, 解出来

$$\begin{aligned} (e^x (f'(x) - f(x)))' &= e^x (f''(x) - f(x)) = e^x (2e^x + x - 1) \\ \Rightarrow e^x (f'(x) - f(x)) &= e^{2x} + (x - 2)e^x + C, f'(x) - f(x) = e^x + x - 2 + Ce^{-x} \\ (e^{-x} f(x))' &= e^{-x} (f'(x) - f(x)) = 1 + e^{-x} (x - 2) + Ce^{-2x} \\ \Rightarrow e^{-x} f(x) &= x + (1 - x)e^{-x} + C_1 e^{-2x} + C_2, f(x) = xe^x + 1 - x + C_1 e^{-x} + C_2 e^x \\ f(-1) &= 2 - \frac{1}{e}, f(0) = 1, f(2) = 2e^2 - 1 \Rightarrow f(x) = xe^x + 1 - x \end{aligned}$$

这样得到了一个特解, 考虑

$$g(x) = f(x) - (xe^x + 1 - x), g(-1) = g(0) = g(2) = 0$$

需要证明 $g''(u) = g(u)$, 考虑 $p(x) = e^x g(x), p'(x) = e^x (g(x) + g'(x))$, 根据罗尔定理则 $p'(x)$ 有两个不同零点, 也即 $g(x) + g'(x)$ 有两个不同零点, 进而考虑 $q(x) = e^{-x} (g(x) + g'(x))$, 再次使用罗尔定理可知 $q'(x) = e^{-x} (g''(x) - g(x))$ 有零点, 结论得证

□

注释 4.2.4: 本题综合运用了插值方法以及解微分方程法, 只不过插值插的不是多项式了, 而是那个微分方程的特解, 核心目的依然是“边界调零”, 或者说是“齐次化”

4.3 微分方程方法

例题 4.3.1 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 中可导且 $f(x) - x \ln x f'(x) \neq 0$ 对任意 $x > 0$ 恒成立, 证明: $f(x)$ 的零点至多有两个.

证明. 显然 $f(1) \neq 0$, 解微分方程可知, 考虑函数 $g(x) = \frac{f(x)}{\ln x}, x > 0, x \neq 1$

则在 $(0, 1), (1, +\infty)$ 中都有 $g'(x) = \frac{x \ln x f'(x) - f(x)}{x \ln^2 x} \neq 0$, 结合达布中值定理可知, 在这两个区间内, $g(x)$ 分别都是严格单调的, 因此 $f(x)$ 在 $(0, 1), (1, +\infty)$ 中各自至多有一个零点

所以 $f(x)$ 至多会有三个零点, 我们只需要排除 $f(0) = 0$ 的情况就行了, 假如 $f(0) = f(x_1) = f(x_2) = 0, x_1 \in (0, 1), x_2 > 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{\ln x} = 0$, 而 $g(x)$ 在 $(0, x_1)$ 中严格单调且 $g(x_1) = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ 不可能是零, 矛盾

□

例题 4.3.2 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 中连续, 在 $(0, 2)$ 中可导且 $f'(1) = 0$, 证明: 存在 $u \in (0, 2)$ 使得 $f'(u) = 2024(f(u) - f(0))$.

证明. 不妨设 $f(0) = 0$, 否则考虑函数 $g(x) = f(x) - f(0)$ 即可, 现在要证明 $f'(u) = 2024f(u)$

设 $h(x) = e^{-2024x} f(x)$, 则

$$h'(x) = e^{-2024x} (f'(x) - 2024f(x)), h(0) = 0, h'(1) = -2024e^{-2024} f(1)$$

反证法, 如果 $h'(x) \neq 0$, 则根据达布中值定理, $h(x)$ 严格单调

若 $h'(x) > 0$ 恒成立, 则

$$h(1) > h(0) = 0 \Rightarrow f(1) > 0, h'(x) > 0 \Rightarrow h'(1) > 0, f(1) < 0$$

导致矛盾, 另一种情况完全同理也会矛盾

□

例题 4.3.3 设 $f(x)$ 在 $[1, 5]$ 中有四阶连续导数并且

$$f(3) + f''(3) > f'(3) + f'''(3), f(4) + f''(4) < f'(4) + f'''(4), f^{(k)}(2) = 1, k = 0, 1, 2, 3$$

证明: 存在 $\xi \in (2, 4)$ 使得 $f^{(4)}(\xi) = f(\xi)$.

证明. 设 $g(x) = f(x) + f''(x)$, 则 $g(3) > g'(3), g(4) < g'(4), g(2) = g'(2) = 2$, 要证明 $g''(\xi) = g(\xi), \exists \xi \in (2, 4)$

显然 $g'(x) - g(x)$ 是连续函数, 故存在 $u \in (3, 4)$ 使得 $g'(u) = g(u)$, 进而 (对应微分方程 $y'' = y$) 考虑

$$p(x) = g'(x) - g(x), p'(x) = g''(x) - g'(x), p'(x) + p(x) = g''(x) - g(x), p(2) = p(u) = 0$$

从目标来看, 需要在 $p(2) = p(u) = 0$ 的条件下, 说明 $p'(x) + p(x) = 0$ 在 $(2, u)$ 内有解, 于是令 $q(x) = e^x p(x)$ 就有 $q(2) = q(u) = 0$, 求导, 利用罗尔中值定理可知结论成立

□

注释 4.3.1: 本题不要直接硬解微分方程 $y'''' = y$, 要观察题目条件, 比如一开始我们用二阶导项做了一个过渡, 不仅完美利用了条件, 而且直接将问题从四阶导简化为了二阶导

例题 4.3.4 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中可导且 $f'(a) = f'(b) = 0$, 证明: 存在 $u \in (a, b)$ 使得 $f'(u) = \frac{f(u) - f(a)}{u - a}$. (Flett 中值定理)

证明. 不妨设 $[a, b] = [0, 1]$, 然后考虑函数 $f(x) - f(0)$ 这个函数, 便知道可以不妨设 $f(0) = 0$, 这样问题转化为:

已知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 中可导且 $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$, 要证明存在 $u \in (0, 1)$ 使得 $uf'(u) = f(u)$

考虑函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 则 $g(0) = f'(0) = 0$ 并且 $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$

采用反证法, 如果 $g'(x) \neq 0, \forall x \in (0, 1)$, 则根据达布中值定理, 不妨设 $g'(x) > 0$ 恒成立 (另一个同理), 于是 $g(1) > g(0) = 0, f(1) > 0$, 进而 $g'(1) = -f(1) < 0$, 在 $(0, 1)$ 中任取一点 x_0 , 则有 $g'(x_0) > 0$, 在区间 $[x_0, 1]$ 中使用达布中值定理可知存在 $u \in (0, 1)$ 使得 $g'(u) = 0$, 导致矛盾

□

例题 4.3.5 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上二阶可导且 $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$, 证明:

1. $g(x) = (1+x^2)f'(x) - f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内至少有两个不同零点;
2. 存在 $u \in (-1, 1)$ 使得 $(1-2u)f(u) = (1+u^2)^2 f''(u)$.

证明. 1. 解微分方程, 形式计算有

$$(1+x^2)f'(x) = f(x), \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^2+1}, \ln f(x) = \arctan x + C, f(x) = Ce^{\arctan x}$$

所以考虑

$$h(x) = e^{-\arctan x} f(x), h(-1) = h(0) = h(1) = 0, h'(x) = \frac{e^{-\arctan x}}{x^2+1} ((1+x^2)f'(x) - f(x))$$

根据罗尔中值定理, 结论得证

2. 代入前面算出来的 $e^{\arctan x}$ 到第二问的微分方程里面, 验证发现刚刚好取等, 所以这是一个解, 同样的使用微分方程方法 (见注释, 或者看上课视频), 考虑函数

$$F(x) = \frac{e^{\arctan x}}{x^2+1} ((1+x^2)f'(x) - f(x)), F'(x) = \frac{e^{\arctan x}}{(x^2+1)^2} ((x^2+1)f''(x) - (1-2x)f(x))$$

根据第一问, $F(x)$ 有两个零点, 所以由罗尔中值定理, 本题得证

□

注释 4.3.2: 二阶变系数线性微分方程本身无通解公式, 但是在知道一个特解之后便可以求出另一个解, 这只需要计算 $(yy'_0 - y'y_0)'$, 此处 y_0 是已经知道的一个解, y 是其他的解, 微分方程是 $y''(x) = q(x)y(x)$, 那么导数算出来是零, 问题化为一阶线性微分方程, 自然可以求解

4.4 性态分析方法

例题 4.4.1 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 中任意阶可导且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0)$, 证明: 对任意正整数 n , $f^{(n)}(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 都有零点.

证明. 不妨设 $f(0) = f(+\infty) = 0$, 反证法, 根据介值性, 不妨设 $f^{(n)}(x) > 0, \forall x > 0$

于是在区间 $[0, +\infty)$ 中 $f^{(n-1)}(x) = 0$ 至多一个解, $f^{(n-2)}(x) = 0$ 至多两个解, 以此类推 $f''(x) = 0$ 至多 $n-2$ 个解, $f'(x) = 0$ 至多 $n-1$ 个解, 所以 $f(x)$ 最终单调 (也就是说当 x 充分大之后, 由于 $f'(x) \neq 0$, 所以 $f(x)$ 单调), 同样 $f'(x)$ 最终单调, 一直下去到 $f^{(n-1)}(x)$ 都是最终单调的

因为单调函数的极限一定存在 (有可能无穷), 所以 $f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ 在正无穷处的极限均存在, 如果其中有一个的极限是非零的, 则显然不是 $f(x)$, 记为某个 $f^{(k)}(+\infty) \neq 0, k \geq 1$, 这会导致

$$f^{(k-1)}(+\infty), f^{(k-2)}(+\infty), \dots, f(+\infty)$$

每一个均为正无穷或者负无穷, 与条件矛盾

所以

$$f(+\infty) = f'(+\infty) = \dots = f^{(n-1)}(+\infty) = 0$$

注意 $f^{(n)}(x) > 0, \forall x > 0$, 所以 $f^{(n-1)}(x)$ 严格单调递增到零, 故 $f^{(n-1)}(x) < 0$ 恒成立, 进而 $f^{(n-2)}(x)$ 严格单调递减到零, 故 $f^{(n-1)}(x) > 0$ 恒成立, 以此类推下去可知 $f(x)$ 也是严格单调的

但是 $f(0) = f(+\infty) = 0$, 这显然不可能严格单调, 矛盾, 结论得证

□

例题 4.4.2 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无穷次可导, n 是一个非负整数, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^n} = 0$. 证明: 对一切 $r \geq n+1$, $f^{(r)}(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 中至少有一个零点.

证明. 因为 $r \geq n+1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{r-1}} = 0$, 采用反证法

不妨设 $f^{(r)}(x) > 0$ 恒成立, 则 $f^{(r-1)}(x)$ 严格单调递增, 因此 $f^{(r-1)}(-\infty), f^{(r-1)}(+\infty)$ 之中, 必定有一个不是零, 不妨设为 $f^{(r-1)}(+\infty) = A \neq 0$, 这里允许 $A = +\infty$

根据洛必达法则有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{r-1}} = \frac{1}{r-1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x^{r-2}} = \dots = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(r-1)}(x) = \frac{A}{(r-1)!}$$

结合条件可知 $A = 0$, 矛盾

□

例题 4.4.3 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内 $n+1$ 阶可导且 $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0, k = 1, 2, \dots, n$, 证明:

1. 存在 $u \in (a, b)$ 使得 $\left| f^{(n+1)}(u) \right| \geq \frac{2^n (n+1)!}{(b-a)^{n+1}} |f(b) - f(a)|$
2. 若 $f(a) \neq f(b)$, 则存在 $v \in (a, b)$ 使得 $\left| f^{(n+1)}(v) \right| > \frac{2^n (n+1)!}{(b-a)^{n+1}} |f(b) - f(a)|$.

证明. 不妨设 $a = 0, b = 1$, 如果 $f(0) = f(1)$ 则第一问显然成立, 因此只需证明第二问

不妨设 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 采用反证法, 则 $\left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq 2^n (n+1)! = C, \forall x \in (0, 1)$

所以 $f^{(n)}(x) + Cx$ 在 $[0, 1]$ 中单调递增, 以 $f^{(n)}(x) - Cx$ 在 $[0, 1]$ 中单调递减, 结合条件有

$$0 \leq f^{(n)}(x) + Cx \leq C, -C \leq f^{(n)}(x) - Cx \leq 0 \Rightarrow \left| f^{(n)}(x) \right| \leq \begin{cases} Cx, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ C(1-x), x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

对上述不等式两端积分可知

$$\begin{aligned} \left| f^{(n-1)}(x) \right| &= \left| \int_0^x f^{(n)}(t) dt \right| \leq \int_0^x \left| f^{(n)}(t) \right| dt \leq \int_0^x C t dt = \frac{C}{2} x^2, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \left| f^{(n-1)}(x) \right| &= \left| \int_x^1 f^{(n)}(t) dt \right| \leq \int_x^1 \left| f^{(n)}(t) \right| dt \leq \int_x^1 C(1-t) dt = \frac{C}{2} (1-x)^2, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ \Rightarrow \left| f^{(n-1)}(x) \right| &\leq \begin{cases} \frac{C}{2} x^2, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{C}{2} (1-x)^2, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \end{aligned}$$

以此类推有 $|f'(x)| \leq \begin{cases} \frac{C}{n!} x^n, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{C}{n!} (1-x)^n, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$, 再积分得到

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt \leq \frac{C}{(n+1)!} x^{n+1}, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{C}{2^{n+1} (n+1)!} \\ 1 - f(x) &= f(1) - f(x) = \int_x^1 f'(t) dt \leq \frac{C}{(n+1)!} (1-x)^{n+1} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 1 - \frac{C}{2^{n+1} (n+1)!} \end{aligned}$$

由此可知

$$\frac{C}{2^{n+1} (n+1)!} \geq 1 - \frac{C}{2^{n+1} (n+1)!}, C = 2^n (n+1)!$$

不等式刚刚好取等, 所以前面 $f'(x)$ 的不等式放缩要取等, 也即 $f'(x) = \begin{cases} \frac{C}{n!} x^n, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{C}{n!} (1-x)^n, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$

但是这个函数在 $x = \frac{1}{2}$ 处是不可导的, 矛盾, 因此结论得证

□

注释 4.4.1: 注意 $f^{(n+1)}(x)$ 并没有可积性, 所以我们要回避对他的积分, 改用微分学方法也即单调性来代替, 其实效果上完全和积分一致, 只不过微分学方法要的条件弱一些, 但是你得写一步, 绕一下而已

4.5 综合问题

例 4.5.1 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 中连续, 在 $(0, 1)$ 可导, $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 和两两不同的 $x_1, \dots, x_N \in (0, 1)$ 使得 $\left| \sum_{i=1}^N \frac{1}{2^i f'(x_i)} - 1 \right| < \varepsilon$

证明. 待定系数, 形式计算有

$$f'(x_i) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \frac{1}{2^i f'(x_i)} = \frac{b - a}{2^i (f(b) - f(a))}$$

于是我们希望统一分母, 这样求和的时候就能计算了, 刚刚好区间是 $[0, 1]$ 于是考虑让 $f(b) - f(a) = \frac{1}{2^i}$, 这样分子求和算出来差不多就是 1, 并且函数值的差距 $\frac{1}{2^i}$ 求和也差不多是 1, 下面开始证明

如果存在 $u \in (0, 1)$ 使得 $f'(u) = \frac{1}{2}$, 则直接取 $N = 1, x_1 = u$ 就可以了, 以下设任意 $x \in (0, 1)$ 都有 $f'(x) \neq \frac{1}{2}$, 注意 $f(1) = 1, f(0) = 0$ 所以存在 x 使得 $f'(x) = 1$, 结合达布中值定理可知 $f'(x) > \frac{1}{2}$ 恒成立

根据连续函数的介值性, 用

$$y_1 = 1 - \frac{1}{2}, y_2 = 1 - \frac{1}{4}, \dots, y_N = 1 - \frac{1}{2^N}$$

去截 $f(x)$, 则存在相应的 $x_1, \dots, x_N$ 使得 $f(x_k) = y_k$, 记 $x_0 = 0$, 在每一个区间上用拉格朗日中值定理可知存在 $u_k \in (x_{k-1}, x_k)$ 使得

$$f'(u_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = \frac{1}{2^k (x_k - x_{k-1})}$$

$$\left| \sum_{i=1}^N \frac{1}{2^i f'(u_i)} - 1 \right| = \left| \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) - 1 \right| = 1 - x_N$$

于是需要 $x_N > 1 - \varepsilon$, 根据 $f'(x) > \frac{1}{2}$ 恒成立可知, 这等价于在给定 $\varepsilon > 0$ 之后, 我们取的正整数 N 要求

$$1 - \frac{1}{2^N} = f(x_N) > f(1 - \varepsilon)$$

由于 $f'(x) > \frac{1}{2}$, 所以

$$\frac{f(1) - f(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} = f'(\xi) > \frac{1}{2} \Rightarrow f(1 - \varepsilon) < 1 - \frac{1}{2}\varepsilon$$

因此让 $1 - \frac{1}{2^N} > 1 - \frac{1}{2}\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$ 就可以了, 得证

□

例题 4.5.2 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 中连续, 在 $(0, 1)$ 中可导且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明: 存在 $u, v \in (0, 1), u \neq v$ 使得 $f'(u) + f'(v) = 2$.

证明. 如果存在至少两个点 $u, v \in (0, 1)$ 使得 $f'(u) = f'(v) = 1$, 则结论显然成立, 而根据拉格朗日中值定理, 至少存在一点 $x_0 \in (0, 1)$ 使得 $f'(x_0) = 1$, 所以下面只需讨论存在唯一 $x_0 \in (0, 1)$ 使得 $f'(x_0) = 1$ 的情况

此时根据达布中值定理, 在区间 $(0, x_0)$ 中, $f'(x)$ 要么恒大于 1 要么恒小于 1, 对于区间 $(x_0, 1)$ 也是同理

如果在 $(0, x_0)$ 中 $f'(x) > 1$ 恒成立, 同时在 $(x_0, 1)$ 中 $f'(x) > 1$ 恒成立, 则函数 $f(x) - x$ 在 $(0, x_0), (x_0, 1)$ 中都是严格单调递增的, 从而 $f(1) - 1 > f(x_0) - x_0 > f(0) - 0$ 也即 $f(1) > 1$, 导致矛盾

同理, $f'(x)$ 在 $(0, x_0), (x_0, 1)$ 中都恒小于 1 的情况也不可能出现, 所以只剩下两种情况, 不妨设在 $(0, x_0)$ 中 $f'(x) > 1$, 在 $(x_0, 1)$ 中 $f'(x) < 1$

任取一点 $x_1 \in (0, x_0), x_2 \in (x_0, 1)$, 则 $f'(x_1) > 1, f'(x_2) < 1, f'(x_0) = 1$, 不妨再要求 $f'(x_2) \in (0, 1)$ (否则在区间 (x_0, x_2) 内用达布中值定理再取一个点即可), 则对充分小的 $\varepsilon > 0$, 比如

$$0 < \varepsilon < \min \left(f'(x_1) - 1, \sqrt{2 - f'^2(x_2)} - 1 \right)$$

由此可知

$$1 + \varepsilon \in (1, f'(x_1)), \sqrt{2 - (1 + \varepsilon)^2} \in (f'(x_2), 1)$$

根据达布中值定理, 存在 $u \in (x_1, x_0), v \in (x_0, x_2)$ 使得

$$f'(u) = 1 + \varepsilon, f'(v) = \sqrt{2 - (1 + \varepsilon)^2}$$

显然此时 $f'(u) + f'(v) = 2$ 并且 $u \neq v$, 满足条件

□

例题 4.5.3 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 中连续且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 证明: 对任意正整数 n , 都存在 $c \in (0, 1)$ 使得 $\int_0^c x^n f(x) dx = e^{n+1} f(c)$.

证明. 设 $g(x) = \int_0^x t^n f(t) dt$, 则有 $g(0) = 0, g'(x) = x^n f(x)$

将目标视为微分方程, 对应

$$g(x) = e^{n+1} f(x) = e^{n+1} \frac{g'(x)}{x^n} \Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{x^n}{e^{n+1}}, \ln g(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)e^{n+1}} + C, g(x) = C e^{\frac{x^{n+1}}{(n+1)e^{n+1}}}$$

所以考虑

$$\begin{aligned} h(x) &= e^{-\frac{x^{n+1}}{(n+1)e^{n+1}}} g(x), h'(x) = e^{-\frac{x^{n+1}}{(n+1)e^{n+1}}} \left(g'(x) - \frac{x^n}{e^{n+1}} g(x) \right) \\ &= e^{-\frac{x^{n+1}}{(n+1)e^{n+1}}} \left(x^n f(x) - \frac{x^n}{e^{n+1}} \int_0^x t^n f(t) dt \right) = \frac{e^{-\frac{x^{n+1}}{(n+1)e^{n+1}}}}{e^{n+1}} x^n \left(e^{n+1} f(x) - \int_0^x t^n f(t) dt \right) \end{aligned}$$

采用反证法, 根据达布中值定理, 不妨设 $e^{n+1} f(x) - \int_0^x t^n f(t) dt > 0$ 对任意 $x \in (0, 1)$ 恒成立, 则 $h(x)$ 严格单调递增, 便有 $h(x) > h(0) = 0$, 得到 $g(x) = \int_0^x t^n f(t) dt > 0$ 对任意 $x \in (0, 1]$ 恒成立

进而对任意 $x \in (0, 1]$ 都有 $e^{n+1} f(x) > \int_0^x t^n f(t) dt > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内恒正, 与 $\int_0^1 f(x) dx = 0$ 矛盾 $\square$

例题 4.5.4 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 内连续, 在 $(0, 1)$ 内可导且 $f(0) = 0, f(1) = 2$, 证明: 存在两两不同的 $u, v, w \in (0, 1)$ 使得 $f'(u)f'(v)\sqrt{1-w} \geq 2$.

证明. 方法一: 根据例题 4.5.2 可知, 存在 $u, v \in (0, 1)$ 且 $u \neq v$ 使得 $f'(u)f'(v) = 4$, 然后取 $w < u, v$ 让 $w \rightarrow 0$, 则 $f'(u)f'(v)\sqrt{1-w}$ 会趋于 4, 并且显然 u, v, w 两两不同, 得证

方法二: 设 $l(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ 是过 $(1, 2)$ 且斜率为 $\frac{3}{2}$ 的直线, 如果存在 $x \in (0, 1)$ 使得 $f(x) > l(x)$, 则存在 $x_0 \in (0, 1)$ 使得 $f(x_0) = l(x_0)$

在区间 $[0, x_0]$ 中使用拉格朗日中值定理可知存在 $u \in (0, x_0)$ 使得 $f'(u) = \frac{f(x_0)}{x_0} > 2$, 在区间 $[x_0, 1]$ 中使用拉格朗日中值定理可知, 存在 $v \in (x_0, 1)$ 使得 $f'(v) = \frac{3}{2}$, 接着任取 $w < \min(\frac{5}{9}, u)$ 即可

□

注释 4.5.1: 注: 本题右端可以换成任何小于 4 的数字, 另外若要求 w 在 u, v 之间, 则这个问题的右端最佳系数是多少呢? 将会很有意思也比较难, 留给数学类

例题 4.5.5 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 内二阶连续可导且满足 $f'(0) = f'(1)$, $|f''(x)| \leq 1$ 恒成立

证明: $\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0) + f(1)}{2} \right| \leq \frac{1}{32}$, 且右端系数是最佳的.

证明. 分部积分有

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0) + f(1)}{2} \right| = \left| \int_0^1 f(x) d\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{f(0) + f(1)}{2} \right| = \left| \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f'(x) dx \right|$$

下面待定系数来分部积分, 目标是使得积分最小, 对任意 $c \in (0, \frac{1}{8})$ 有

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f'(x) dx \right| &= \left| \int_0^1 f'(x) d\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - c\right) \right| = \left| \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - c\right) f''(x) dx \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - c \right| dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left| \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2c \right| dx = \int_0^{\frac{1}{2}-\sqrt{2c}} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2c dx + \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{2c}}^{\frac{1}{2}} 2c - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \\ &= 2c \left(\sqrt{2c} - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{2c}\right) \right) + \int_0^{\frac{1}{2}-\sqrt{2c}} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx - \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{2c}}^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \\ &= 2c \left(2\sqrt{2c} - \frac{1}{2} \right) + \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{2c}}^{\frac{1}{2}} x^2 dx - \int_0^{\sqrt{2c}} x^2 dx = 2c \left(2\sqrt{2c} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8} - 2c\sqrt{2c} \right) - \frac{1}{3} 2c\sqrt{2c}, 2\sqrt{2c} = t \in (0, 1) \\ &= \frac{t^2}{4} \left(t - \frac{1}{2} \right) + \frac{1-t^3}{24} - \frac{t^3}{24} = \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{8} + \frac{1}{24} = p(t), \min_{t \in (0, 1)} p(t) = p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32} \Rightarrow c = \frac{1}{32} \end{aligned}$$

所以

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0) + f(1)}{2} \right| = \left| \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{32} \right) f''(x) dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{32} \right| dx = \frac{1}{32}$$

结论得证

□

注释 4.5.2: 由于条件 $f'(0) = f'(1)$ 的存在, 本题似乎只能分部积分做, 没有办法采用微分中值定理解决问题, 系数的最佳性从放缩容易看到取等 (逼近取等类型, 并不能直接取等)

但是若删去条件 $f'(0) = f'(1)$, 则可以使用中值定理解决问题, 相应的结论如下:

$$f(x) \in C^2[0, 1] \Rightarrow \exists \xi \in (0, 1), s.t. \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0) + f(1)}{2} = -\frac{1}{12} f''(\xi)$$

不妨设 $f(0) = f(1) = 0$, 然后令 $g(x) = \int_0^x f(t) dt$, $g(0) = g'(0) = g'(1) = 0$, 再取

$$h(x) = g(x) + g(1)(2x^3 - 3x^2), h(0) = h(1) = h'(0) = h'(1) = 0 \Rightarrow h'''(u) = 0$$

即可

例题 4.5.6 设函数 $f(x) \in C^4[0, 1]$ 并且存在 $r > 1$, 使得 $\int_0^1 f(x)dx + (r^2 - 1)f\left(\frac{1}{2}\right) = r^3 \int_{\frac{r-1}{2r}}^{\frac{r+1}{2r}} f(x)dx$.

证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f^{(4)}(\xi) = 0$.

证明. 对条件变形有 $\int_0^1 f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)dx = r^3 \int_{\frac{r-1}{2r}}^{\frac{r+1}{2r}} f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)dx$, 所以不妨设 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 问题转化为已知 $f(x) \in C^4[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $f(0) = 0$, 且 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = r^3 \int_{-\frac{1}{2r}}^{\frac{1}{2r}} f(x)dx$, 证明存在 $u \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 使得 $f^{(4)}(u) = 0$

容易发现对 $f(x) = x, x^2, x^3$, 代入到条件中等式均成立, 并且三次多项式的四阶导数恒为零, 所以(减去一个三次多项式)不妨设 $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$

下面采用反证法, 不妨设 $f^{(4)}(x) > 0$ 对任意 $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 恒成立, 根据条件有

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) + f(-x)dx, r^3 \int_{-\frac{1}{2r}}^{\frac{1}{2r}} f(x)dx = r^2 \int_0^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{x}{r}\right) + f\left(-\frac{x}{r}\right)dx$$

因此令 $g(x) = f(x) + f(-x)$, 则 $g(0) = g'(0) = g''(0) = g'''(0) = 0, g^{(4)}(x) > 0$ 并且 $g(x)$ 是偶函数, 满足

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g(x) - r^2 g\left(\frac{x}{r}\right)dx = 0$$

从 $g(x)$ 的导数条件可知对任意 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 有 $g^{(4)}(x) > g^{(4)}(0) = 0$, 于是 $g''(x)$ 严格单调递增

再令 $h(x) = g(x) - r^2 g\left(\frac{x}{r}\right)$, 则

$$\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)dx = 0, h(0) = h'(0) = h''(0) = 0, h''(x) = g''(x) - g''\left(\frac{x}{r}\right) > 0, \forall x \in (0, \frac{1}{2})$$

最后一个不等式利用了 $g''(x)$ 单调递增以及 $r > 1$, 所以 $h(x)$ 是区间 $[0, \frac{1}{2}]$ 中严格单调递增(因为 $h''(x) > 0$

推出 $h'(x) > h'(0) = 0$) 且严格下凸的函数, 注意 $h(0) = 0$, 这会导致 $\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)dx > 0$, 矛盾

□

例题 4.5.7 设 $f(x) \in C^1[0, 1]$ 且 $\int_0^1 f(x) dx = 1, \int_0^1 xf(x) dx = 2, \int_0^1 x^2 f(x) dx = 7$, 证明: 对任意 $c \in [-168, 204]$, 均存在 $u \in (0, 1)$ 使得 $f'(u) = c$, 且 c 的范围是最佳的.

证明. 分析与形式计算: 对任意 $c \in [-168, 204]$, 令 $g(x) = f(x) - cx$, 反证法, 不妨 $g'(x) > 0$, 则

$$\int_0^1 g(x) dx = 1 - \frac{c}{2}, \int_0^1 xg(x) dx = 2 - \frac{c}{3}, \int_0^1 x^2 g(x) dx = 7 - \frac{c}{4}$$

现在只有导数条件, 自然考虑待定系数分部积分, 转化到导数上去, 于是对任意 m, n 有

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 + mx + n) g(x) dx &= \int_0^1 g(x) d\left(\frac{x^3}{3} + \frac{mx^2}{2} + nx + p\right) = - \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{mx^2}{2} + nx + p\right) g'(x) dx \\ \int_0^1 (x^2 + mx + n) g(x) dx &= 7 - \frac{c}{4} + m\left(2 - \frac{c}{3}\right) + n\left(1 - \frac{c}{2}\right) = 0 \\ \frac{x^3}{3} + \frac{mx^2}{2} + nx + p \Big|_{x=1} &= 0, \frac{x^3}{3} + \frac{mx^2}{2} + nx + p \Big|_{x=0} = 0 \end{aligned}$$

所以在 c 确定后, m, n, p 的值都会确定下来, 如果这时恰好那个三次多项式是定号的, 就会有矛盾

下面开始证明:, 对任意 c , 记 $g(x) = f(x) - cx$, 分部积分有

$$\begin{aligned} \int_0^1 x(x-1)(x-a)g'(x) dx &= \int_0^1 x^3 - (a+1)x^2 + ax dg(x) = - \int_0^1 g(x)(3x^2 - 2(a+1)x + a) dx \\ &= - \left(3\left(7 - \frac{c}{4}\right) - 2(a+1)\left(2 - \frac{c}{3}\right) + a\left(1 - \frac{c}{2}\right)\right) = 3a - 17 - c\left(\frac{a}{6} - \frac{1}{12}\right) = a\left(3 - \frac{c}{6}\right) + \frac{c}{12} - 17 \end{aligned}$$

因此, 当 $c \in [-168, 204]$ 且 $c \neq 18$ 时, 取 $a = \frac{17 - \frac{c}{12}}{3 - \frac{c}{6}} = \frac{204 - c}{36 - 2c}$, 则有

$$\int_0^1 x(x-1)(x-a)g'(x) dx = 0, a \notin (0, 1)$$

根据积分中值定理可知, 存在 $u \in (0, 1)$ 使得 $g'(u) = 0$, 也即 $f'(u) = c$

对于 $c = 18$ 的情形, 根据导数的介值性可知结论依然成立, 也可以利用

$$\int_0^1 x(x-1)g'(x) dx = - \int_0^1 g(x)(2x-1) dx = - \left(2\left(2 - \frac{c}{3}\right) - \left(1 - \frac{c}{2}\right)\right) = \frac{c}{6} - 3 = 0$$

和积分中值定理来推出需要的结论

从以上过程可以看出, 条件中 c 的范围是最佳的

□

注释 4.5.3: 实际上, 根据导数介值性, 我们只需要对 $c = -168, 204$ 这两个数值做验证即可

4.6 命题方法与原理介绍

定理 4.6.1: n 阶齐次插值条件与高阶罗尔中值定理

若 $f(x) = 0$ 有 k 个不同的根 $x_1 < x_2 < \cdots < x_k, k \geq 2$, 且 x_i 是至少 $n_i (\geq 1)$ 重根 ($1 \leq i \leq k$),

$$f(x_i) = f'(x_i) = f''(x_i) = \cdots = f^{(n_i-1)}(x_i) = 0 \quad (n_i \text{ 个连续齐次插值条件})$$

$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n + 1$ (总的插值条件比最高阶导数多一个). f 在 x_1 处有 n_1 阶右导数, 在 x_k 处有 n_k 阶左导数, 在 (x_1, x_k) 上 n 次可导, 则存在 $\xi \in (x_1, x_k)$ 使得

$$f^{(n)}(\xi) + a_{n-1}f^{(n-1)}(\xi) + \cdots + a_1f'(\xi) + a_0f(\xi) = 0$$

其中假设 (微分算子的特征方程) $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$ 的根都是实根.

证明. 对 n 采用归纳法, $n = 1$ 时问题化为 $f(a) = f(b) = 0$, 要证明存在 $u \in (0, 1)$ 使得 $f'(u) + kf(u) = 0$

考虑 $g(x) = e^{kx}f(x)$, 则 $g(a) = g(b) = 0$, 所以存在 $u \in (a, b)$ 使得 $g'(u) = e^{ku}(f'(u) + kf(u)) = 0$, 结论成立

假设 $n - 1$ 时结论成立, 对于 n 时, 待定系数, 因为

$$\begin{aligned} & (f'(x) - \lambda f(x))^{(n-1)} + c_{n-2}(f'(x) - \lambda f(x))^{(n-2)} + \cdots + c_0(f'(x) - \lambda f(x)) \\ &= f^{(n)}(x) + (c_{n-2} - \lambda)f^{(n-1)}(x) + (c_{n-3} - \lambda c_{n-2})f^{(n-2)}(x) + \cdots + (c_0 - c_1\lambda)f'(x) - c_0\lambda f(x) \end{aligned}$$

解方程组

$$\begin{aligned} c_{n-2} - \lambda &= a_{n-1}, c_{n-3} - \lambda c_{n-2} = a_{n-2}, \dots, c_0 - c_1\lambda = a_1, -c_0\lambda = a_0 \\ \Rightarrow c_{n-2} &= a_{n-1} + \lambda, c_{n-3} = a_{n-2} + \lambda c_{n-2}, \dots, c_0 = a_1 + c_1\lambda, a_0 + c_0\lambda = 0 \\ \Rightarrow 0 &= a_0 + \lambda(a_1 + c_1\lambda) = \lambda(a_1 + \lambda(a_2 + c_2\lambda)) = \cdots = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \end{aligned}$$

根据条件, 取 λ 为题中方程的一个实根, 则可依次确定各个 $c_0, \dots, c_{n-2}$

对任意实数 t , 取 $f(x) = e^{tx}$ 代入到等式中有

$$\begin{aligned} f'(x) - \lambda f(x) &= (t - \lambda)e^{tx}, (t - \lambda)(t^{n-1} + c_{n-2}t^{n-2} + \cdots + c_0)e^{tx} = (t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0)e^{tx} \\ \Rightarrow (t - \lambda)(t^{n-1} + c_{n-2}t^{n-2} + \cdots + c_0) &= (t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0) \end{aligned}$$

记 $g(x) = f'(x) - \lambda f(x)$, 这说明 $t^{n-1} + c_{n-2}t^{n-2} + \cdots + c_0$ 的 $n - 1$ 个根是题中方程除去 λ 剩下的根, 故全为实根, 根据 $n = 1$ 的情况知 $g(x)$ 具备 n 个插值条件, 所以对于 $g(x)$ 运用归纳假设, 可知存在 u 使得 $g^{(n-1)}(u) + c_{n-2}g^{(n-2)}(u) + \cdots + c_0g(u) = 0$, 从定义看显然展开后就是题目要的关于 $f(x)$ 的等式, 得证

□

注释 4.6.1: 为什么 $g(x)$ 具备 n 个插值条件? 简单来讲就是每一个插值节点 $g(x)$ 的零点阶数会减一, 但是不同节点之间各自会贡献一个零点给 $g(x)$, 因此总的合算下来就是只少了一个

另外, 本题定义算子 $L_\lambda(x) = e^{\lambda x}(e^{-\lambda x}f(x))' = f'(x) - \lambda f(x)$ 并从算子角度来证明会更本质, 但是门槛比较高, 而且需要补充说明许多看似成立的直观性质, 感兴趣的话去看数学类红宝书

定理 4.6.2: 二阶复特征值罗尔中值定理

设 f 在 (a, b) 上二阶可导且 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 上有 3 个解, $p, q \in \mathbb{R}, t^2 + pt + q = 0$ 的解为复根 $t = \alpha \pm i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$. 若 $\beta(b-a) \leq \pi$, 则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f''(\xi) + pf'(\xi) + qf(\xi) = 0$.

证明. 不妨设 $(a, b) = (-c, c), 0 < 2\beta c \leq \pi$, 考察辅助函数 $H_1(x) = \frac{e^{-\alpha x} f(x)}{\cos \beta x}$

由题意, $H_1(x)$ 在 $(-c, c)$ 上有三个零点, 由 Rolle 中值定理可知, $H_1'(x)$ 在 $(-c, c)$ 上有两个零点. 令

$$H_2(x) = H_1'(x) \cos^2 \beta x = e^{-\alpha x} ((f'(x) - \alpha f(x)) \cos \beta x + \beta f(x) \sin \beta x)$$

由 Rolle 中值定理可知, $H_2'(x)$ 在 $(-c, c)$ 上有一个零点. 容易验算

$$H_2'(x) = (f''(x) + pf'(x) + qf(x)) e^{-\alpha x} \cos \beta x$$

因此结论得证

□

注释 4.6.2: 本题的函数是解微分方程得到的, 考虑方程 $y'' + py' + qy = 0$, 对应特征方程 $x^2 + px + q = 0$, 解出来的是

$$y = e^{\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

要将虚的变成实的, 直接考虑实部虚部 $e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$ 就是两个解

因为通解是 $y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$, 所以考虑 $c_1 = \frac{e^{-\alpha x} y(x)}{\cos \beta x}$ 这个辅助函数

注意, 本题对区间是有要求的, 有虚根时候要对区间长度做限制, 否则可能分母为零出问题

命题 4.6.1: 经典题目的高阶推广

给定 $n \in \mathbb{N}_+$, 设 $f(x) \in C^n[0, 1]$, 且 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有 $n+1$ 个互不相同的零点.

证明: 存在 $\zeta \in (0, 1)$, 使得 $f^{(n)}(\zeta) = -f(\zeta)$.

证明. 注意求导关系

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^{-ax} f(x)}{\cos bx} \right)' &= \frac{e^{-ax} ((f'(x) - af(x)) \cos bx + bf(x) \sin bx)}{\cos^2 bx} \\ \left(\cos^2 bx \left(\frac{e^{-ax} f(x)}{\cos bx} \right)' \right)' &= e^{-ax} \cos bx (f''(x) - 2af'(x) + (a^2 + b^2)f(x)) \end{aligned}$$

若 $n = 2m + 1$ 为奇数, 设

$$x^{2m+1} + 1 = (x+1)(x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2) \dots (x^2 + p_mx + q_m)$$

其中每一个 $x^2 + p_kx + q_k = 0$ 的根为 $a_k \pm ib_k$, 都是单位根, 显然 $|b_k| \leq 1$, 所以 $\cos b_kx$ 在 $[0, 1]$ 内恒正. 根据条件, $f(x)$ 有 $2m+2$ 个不同的零点, 所以 $\frac{e^{-a_1x} f(x)}{\cos b_1x}$ 也有 $2m+2$ 个零点, 根据罗尔中值定理

$$\cos^2 b_1x \left(\frac{e^{-a_1x} f(x)}{\cos b_1x} \right)' = e^{-a_1x} ((f'(x) - a_1f(x)) \cos b_1x + b_1f(x) \sin b_1x)$$

在 $[0, 1]$ 内有 $2m+1$ 个零点, 再用一次罗尔, 所以

$$f''(x) - 2a_1f'(x) + (a_1^2 + b_1^2)f(x) = f''(x) + p_1f'(x) + q_1f(x)$$

在 $(0, 1)$ 内有 $2m$ 个零点

记 $f_1(x) = f''(x) + p_1f'(x) + q_1f(x)$, 同理可知 $f_2(x) = f_1''(x) + p_2f_1'(x) + q_2f_1(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有 $2m-2$ 个零点, 以此类推, 考虑 $f_{k+1}(x) = f_k''(x) + p_kf_k'(x) + q_kf_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, m-1$, 则最后 $f_m(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有 2 个零点

考虑函数 $(e^x f_m(x))' = e^x (f_m'(x) + f_m(x))$ 可知 $f_m'(x) + f_m(x)$ 有零点, 恰好根据我们的构造过程, 就一定有 $f^{(n)}(x) + f(x) = f_m'(x) + f_m(x)$, 于是证明了结论

对于偶数情形是完全同理的, 删去最后一步 $e^x f_m(x)$ 求导的过程即可

□

注释 4.6.3: 最后 $f^{(n)}(x) + f(x) = f_m'(x) + f_m(x)$ 用微分算子来理解将会是本质的并且简单, 因为 (记微分算子为 D , 也即定义 $Df(x) = f'(x)$, $D^2f(x) = f''(x)$, $D^0f(x) = 1f(x) = f(x)$, 以此类推自然定义)

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) + f(x) &= (D^n + 1)f(x) = (D+1)(D^2 + p_1D + q_1) \dots (D^2 + p_mD + q_m)f(x) \\ &= (D+1)(D^2 + p_mD + q_m) \dots (D^2 + p_2D + q_2)((D^2 + p_1D + q_1)f(x)) \\ &= (D+1)(D^2 + p_mD + q_m) \dots (D^2 + p_2D + q_2)f_1(x) \\ &= \dots = (D+1)f_m(x) = f_m'(x) + f_m(x) \end{aligned}$$

自己去证明一下微分算子这个直观的性质, 就可以讲清楚了, 归纳验证即可

4.7 练习题

习题 4.7.1 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导, 在 (a, b) 两次可导. 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(b) - f'(a) = f''(\xi)(b - a)$.

习题 4.7.2 设 $a > 0, f(x) \in C^2[0, 2a], f(0) = a, f(a) = b, f'(0) = -1, |f''(x)| \leq \frac{1}{4a}$, 证明: $|f(a+b)| \leq \frac{17}{512}a$.

习题 4.7.3 设 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上二阶可导且 $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4}, f'(\frac{\pi}{2}) = \pi, f(0) = 1$, 证明: 存在 $u \in (0, \frac{\pi}{2})$ 使得

$$2f''(u) - 2f'(u) + f(u) = u^2 - 4u + 4.$$

习题 4.7.4 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 中三阶可导且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$, 证明: 存在 $u \in (-1, 1)$ 使得 $f'''(u) = u + 3$.

习题 4.7.5 设 $f(x)$ 二阶可导且 $f(0) = 0, f'(0) = 1, f(\frac{\pi}{4}) = 1$, 证明: 存在 $u \in (0, \frac{\pi}{4})$ 使得 $f''(u) = 2f(u)f'(u)$.

习题 4.7.6 设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上二阶可导且 $|f(x)| \leq \min(1 - \cos x, \sin x)$, 证明: 存在 $u \in (0, \pi)$ 使得 $f''(u) = f(u)$.

习题 4.7.7 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 内二阶可导且

$$f(0) = 2f'(0), f'(1) = -f(1), 2f'(x) + xf(x) \neq 0, \forall x \in [0, 1]$$

证明: 存在 $u \in (0, 1)$ 使得 $(u^2 + 1)f(u) + 4uf'(u) + 4f''(u) = 0$.

习题 4.7.8 设 $f \in C[0, 1]$, 在 $(0, 1)$ 上可导, 且 $f(1) - f(0) = 1$, 证明: 对于 $k = 0, 1, 2, \dots$, $\exists \xi_k \in (0, 1)$ 使得 $f'(\xi_k) = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \xi_k^k (1 - \xi_k)^{n-k-1}$.

习题 4.7.9 设 $f(x) \in C[0, 1]$ 满足 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 证明: 存在 $u, v \in (0, 1)$ 使得

$$uf(u) = \int_0^u xf(x) dx, v^2 f(v) = \int_0^v (x + x^2) f(x) dx$$

习题 4.7.10 设 $f(x) \in C^2[0, 1]$ 满足 $\int_0^1 f(x) dx = 2 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x) dx$, 证明: 存在 $u \in (0, 1)$ 使得 $f''(u) = 0$.

习题 4.7.11 设 $f(x) \in C^2[0, \frac{\pi}{2}]$ 且 $f'(0) = 0$, 证明: 存在 $u, v, w \in (0, \frac{\pi}{2})$ 使得 $f'(u) = \frac{\pi}{2} v f''(w) \sin 2u$.

习题 4.7.12 设 f 与 g 在 $[a, b]$ 上可导, 且对任何 $x \in [a, b], g'(x) \neq 0$. 又 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x)g(x) dx = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

习题 4.7.13 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有连续导数, 证明: 存在 $\xi \in [0, 1]$, 使得

$$f''(\xi) = \int_0^1 (360x^2 - 360x + 60)f(x) dx$$

习题 4.7.14 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶导数, 且 $f(0) = 1, f(1) = 3e, f'(1) = 5e$. 则存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f''(\xi) - 2f'(\xi) + f(\xi) = 0$.

第五章 积分计算

本专题共讲三次课，包括定积分，不定积分以及反常积分的计算，还有积分计算在几何上的应用这几个部分。本期课程中尽量不涉及特殊函数、幂级数方法、含参积分方法，留数定理、傅里叶展开这些下册内容，在下一期课程中还会针对下册教材知识再讲一次积分计算专题。

不定积分计算中，除去常见的基本习题之外（上课例题以及练习题中几乎没有很基础的微积分教材课后习题，因此如果你是初学或者基础不好，在看课之前务必先把自己教材上基本的课后习题做一遍！基础需要打牢，最基本的算法务必搞清楚），应当了解欧拉代换和切比雪夫定理，可以判定根式类型的不定积分是否能够算出来，还提供了明确的算法

课本上关于积分计算部分的公式，除去最基本的结论和几个特殊积分结果之外，就只剩下几何方面相关的结论。几何上的结论分为：曲线长度计算、曲线围成区域面积计算、旋转体侧面积计算、旋转体体积计算四个部分，每一部分里面针对函数不同的表达形式，可以分为通常的 $y = f(x)$ 类型、参数方程类型以及极坐标类型，排列组合下来一共是 $4 * 3 = 12$ 个公式。

实际上这些公式基本上都不用记（也没有 12 个这么多），公式的推导全部都是采用微元法，将曲线近似为直线，将曲边梯形近似为矩形，然后计算方体、圆台体积或者扇形面积等等，局部微元算好之后，然后在区间内积分即可推导出这些公式。详细的公式总结见“几何应用”部分（应用重积分或者曲线积分，有时能带来便利，在下期重积分和曲线积分计算课中会再单独讲）。

特殊积分结果需要知道： $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ ，由此配合欧拉公式（严谨化需要复变知识）能计算 $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$, $\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$ ，这两个叫做菲涅尔积分，当然也有其他算法

此外伽马函数应用非常广泛，定义为 $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx, a > 0$ ，有著名的余元公式 $\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$

相应的 Beta 函数结果是 $B(p, q) \triangleq \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

余元公式和 Beta 函数的性质在微积分下册教材中会学习，这里只给出结果

5.1 不定积分计算

例题 5.1.1 计算积分 $\int \frac{1}{x^3+1} dx, \int \frac{1}{x^4+1} dx$.

证明. 分解设

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3+1} &= \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} \Leftrightarrow a(x^2-x+1) + (x+1)(bx+c) = 1 \\ x=-1 &\Rightarrow a = \frac{1}{3}, \frac{x^2-x+1}{3} + bx^2 + (b+c)x + c = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{3}, b = -\frac{1}{3} \\ \Rightarrow c &= \frac{2}{3}, b = -\frac{1}{3}, \frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \frac{x-2}{x^2-x+1} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3+1} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + C \end{aligned}$$

对于第二个, 相比于带着根号强行分解, 凑一下会好算很多

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^4+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1}{x^4+1} - \frac{x^2-1}{x^4+1} dx \\ \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx &= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{1}{(x-\frac{1}{x})^2+2} d\left(x-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + C \\ \int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx &= \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{x})^2-2} d\left(x+\frac{1}{x}\right) \stackrel{u=x+\frac{1}{x}}{=} \int \frac{1}{u^2-2} du \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{1}{u-\sqrt{2}} - \frac{1}{u+\sqrt{2}} du = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}} \right| + C \\ \int \frac{1}{x^4+1} dx &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}} \right| + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1} \right| + C \end{aligned}$$

□

注释 5.1.1: 一般的, 可以写出 $\int \frac{1}{x^n+1} dx$ 的通项公式, 方法就是待定系数分解, 然后留数法 (或许也叫洛必达法则) 算分解的系数, 然后逐项积分即可, 这个结果考试不会考, 感兴趣知乎搜索一下即可, 繁而不难

例题 5.1.2 计算 $\int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx$.

证明. 将被积函数分解成部分分式之和:

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{a}{x-2} + \frac{bx+c}{x^2+1} + \frac{dx+e}{(x^2+1)^2},$$

即 $2x^2 + 2x + 13 = a(x^2+1)^2 + (bx+c)(x-2)(x^2+1) + (dx+e)(x-2)$

采用赋特殊值的方法确定系数 a, b, c, d, e . 令 $x = 2$, 得 $25 = 25a$, 故 $a = 1$.

令 $x = i$, 得 $11 + 2i = (di+e)(i-2) = -d-2e + (e-2d)i$, 即 $\begin{cases} -d-2e = 11 \\ e-2d = 2 \end{cases}$ 故 $d = -3, e = -4$.

令 $x = 0$, 得 $13 = a - 2c - 2e$, 即 $13 = 9 - 2c$, 故 $c = -2$.

令 $x = 1$, 得 $17 = 4a - 2(b+c) - (d+e)$, 即 $2 = -2b$, 故 $b = -1$.

也可以这样:

$$\begin{aligned} (x^2+1)^2 + (bx+c)(x^2+1)(x-2) &= (3x+4)(x-2) + 2x^2 + 2x + 13 = 5x^2 + 5 \\ \Rightarrow x^2 + 1 + (bx+c)(x-2) &= 5, b = -1, c = -2 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \int \left[\frac{1}{x-2} + \frac{-x-2}{x^2+1} + \frac{-3x-4}{(x^2+1)^2} \right] dx = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{x+2}{x^2+1} dx - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} dx \\ &= \ln|x-2| - \int \frac{x}{x^2+1} dx - 2 \int \frac{dx}{x^2+1} - 3 \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx - 4 \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \\ &= \ln|x-2| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 2 \arctan x + \frac{3}{2(x^2+1)} - \frac{2x}{x^2+1} - 2 \arctan x + C \\ &= \ln|x-2| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \frac{4x-3}{2(x^2+1)} - 4 \arctan x + C. \end{aligned}$$

□

例题 5.1.3 设 $x > 0$, 计算 $\int \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} dx$, 这里有无穷个根号.

证明. 考虑递推数列 $a_0 = 0, a_{n+1} = \sqrt{x + a_n}, x > 0$, 蛛网图方法或根据递推数列基本知识易知 a_n 单调递增且有界, 因此极限存在, 计算不动点 (一元二次方程) 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$

因此所求为

$$\int \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{12}(1 + 4x)^{\frac{3}{2}} + C$$

□

例题 5.1.4 计算 $\int \frac{e^{\frac{x}{2}} \cos x}{\sqrt[3]{3 \cos x + 4 \sin x}} dx$.

证明. 观察结构, 积分之后必须要出现因子 $e^{\frac{x}{2}}$, 再看分母, 相当于是 $-\frac{1}{3}$ 次方, 因此之前必须是 $\frac{2}{3}$ 次方, 这两个因子都必须存在, 所以直接尝试求导, 计算有

$$\begin{aligned} \left(e^{\frac{x}{2}} (3 \cos x + 4 \sin x)^{\frac{2}{3}} \right)' &= e^{\frac{x}{2}} \frac{1}{2} (3 \cos x + 4 \sin x)^{\frac{2}{3}} + e^{\frac{x}{2}} \frac{2}{3} (3 \cos x + 4 \sin x)^{-\frac{1}{3}} (4 \cos x - 3 \sin x) \\ &= \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt[3]{3 \cos x + 4 \sin x}} \left(\frac{3 \cos x + 4 \sin x}{2} + \frac{2}{3} (4 \cos x - 3 \sin x) \right) = \frac{25}{6} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt[3]{3 \cos x + 4 \sin x}} \end{aligned}$$

所以

$$\int \frac{e^{\frac{x}{2}} \cos x}{\sqrt[3]{3 \cos x + 4 \sin x}} dx = \frac{6}{25} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt[3]{3 \cos x + 4 \sin x}} + C$$

□

注释 5.1.2: 可见, 你也能自己改改幂次还有分母的系数比例, 使得积分能算出来

例题 5.1.5 计算 $\int \frac{x^2(x + \sin x \cos x)}{(x \sin x + \cos x)^2} dx, \int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx.$

证明. 根据分母是平方这一结构, 考虑待定系数求导

$$\left(\frac{f(x)}{x \sin x + \cos x} \right)' = \frac{f'(x)(x \sin x + \cos x) - x \cos x f(x)}{(x \sin x + \cos x)^2}$$

对于第二个积分, 希望让 $f'(x)(x \sin x + \cos x) - x \cos x f(x) = x^2$

右边是 x^2 , 所以左边 $f(x)$ 应该含有因子 x , 幂次才能对上, 注意右边 x^2 前面没有三角, 所以 $f(x)$ 还应该含有三角, 只不过最后 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 消了, 因此设 $f(x) = -x \cos x + g(x)$ 代入, 则求导, 合并得到

$$(x \sin x + \cos x)g'(x) - x \cos x g(x) = \cos^2 x$$

左边有 x 项, 右边没有, 变形为

$$x(g'(x) \sin x - g(x) \cos x) + g'(x) \cos x = \cos^2 x$$

容易看出 $g(x) = \sin x$ 是一个解, 因此

$$\int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx = \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x + \cos x} + C$$

对于第一个, 考虑

$$f'(x)(x \sin x + \cos x) - x \cos x f(x) = x + \sin x \cos x$$

对应的整理一下就是

$$x(f'(x) \sin x - f(x) \cos x) + f'(x) \cos x = x + \sin x \cos x$$

可以看出, $f(x) = -\cos x$ 是一个解, 所以

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2(x + \sin x \cos x)}{(x \sin x + \cos x)^2} dx &= \int x^2 d \frac{-\cos x}{x \sin x + \cos x} \\ &= \frac{-x^2 \cos x}{x \sin x + \cos x} + \int \frac{2x \cos x}{x \sin x + \cos x} dx = \frac{-x^2 \cos x}{x \sin x + \cos x} + 2 \int \frac{(x \sin x + \cos x)'}{x \sin x + \cos x} dx \\ &= \frac{-x^2 \cos x}{x \sin x + \cos x} + 2 \ln |x \sin x + \cos x| + C \end{aligned}$$

□

注释 5.1.3: 这种题是纯凑的, 根据形式去凑, 或者待定系数, 考试出现一定是凑好的

例题 5.1.6 求 $I_n = \int \frac{1}{x^n \sqrt{1+x^2}} dx$ 的递推公式, 并计算 I_3 .

证明.

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+2} &= \int \frac{x^2 + 1}{x^{n+2} \sqrt{1+x^2}} dx = -\frac{1}{n+1} \int \sqrt{x^2+1} d\frac{1}{x^{n+1}} \\ &= -\frac{1}{n+1} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+1}} - \int \frac{1}{x^n \sqrt{x^2+1}} dx \right) = \frac{1}{n+1} \left(I_n - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+1}} \right) \\ \Rightarrow nI_n + (n+1)I_{n+2} &= -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

所以 $I_1 + 2I_3 = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}$, 然后计算 I_1

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx^2 \stackrel{x^2=u}{=} \frac{1}{2} \int \frac{1}{u\sqrt{u+1}} du \\ &\stackrel{u=v^2-1}{=} \int \frac{1}{v^2-1} dv = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v-1}{v+1} \right| = \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \right| + C \end{aligned}$$

$$\text{所以 } I_3 = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \right| + C$$

□

例题 5.1.7 设 $a \neq -1, 3$, 计算 $\int (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^a dx$.

证明.

$$\begin{aligned} \int (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^a dx &= \int y^a \frac{1}{2} \left(y - \frac{1}{y} \right) \left(1 + \frac{1}{y^2} \right) dy = \frac{1}{2} \int y^{a+1} - y^{a-3} dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{y^{a+2}}{a+2} - \frac{y^{a-2}}{a-2} \right) + C = \frac{1}{2} \left(\frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^{a+2}}{a+2} - \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^{a-2}}{a-2} \right) + C \end{aligned}$$

□

例题 5.1.8 计算 $\int \frac{1-x^4}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}} dx$.

证明. 设 $u = \sqrt{1+x^4}$, 则 $u' = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{2x^3}{u}$, 所以

$$\int \frac{1-x^4}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \frac{\frac{1-x^4}{\sqrt{1+x^4}}}{1+x^4} dx = \int \frac{\frac{1+x^4-2x^4}{\sqrt{1+x^4}}}{1+x^4} dx = \int \frac{u-xu'}{u^2} dx = \frac{x}{u} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} + C$$

□

例题 5.1.9 计算 $\int x \arctan x \ln(1+x^2) dx$.

证明.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \arctan x \ln(1+x^2) d(1+x^2) \\ &= \frac{1}{2} (1+x^2) \arctan x \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \int (1+x^2) d[\arctan x \ln(1+x^2)] \\ &= \frac{1}{2} (1+x^2) \arctan x \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \int \ln(1+x^2) dx - \int x \arctan x dx. \end{aligned}$$

进一步, 有

$$\begin{aligned} \int \ln(1+x^2) dx &= x \ln(1+x^2) - 2 \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x + C_1 \\ \int x \arctan x dx &= \frac{1}{2} \int \arctan x d(1+x^2) = \frac{1}{2} (1+x^2) \arctan x - \frac{x}{2} + C_2 \end{aligned}$$

将上述两式代入并整理, 得

$$I = \frac{1}{2} (1+x^2) \arctan x \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} (3+x^2) \arctan x - \frac{1}{2} x \ln(1+x^2) + \frac{3x}{2} + C,$$

□

5.2 付汝兰尼积分

定理 5.2.1

设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 中连续, 对任意 $a, b > 0$ 有

1. 若 $f(0^+), f(+\infty)$ 存在, 则 $\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f(0^+) - f(+\infty)) \ln \frac{b}{a}$
2. 若 $f(0^+)$ 存在且 $\frac{f(x)}{x}$ 在正无穷处积分收敛, 则 $\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0^+) \ln \frac{b}{a}$.
3. 若 $f(+\infty)$ 存在且 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $x=0$ 附近积分收敛, 则 $\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = -f(+\infty) \ln \frac{b}{a}$.

证明. 1. 对任意 $R > r > 0$ 有

$$\begin{aligned} \int_r^R \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \int_r^R \frac{f(ax)}{x} dx - \int_r^R \frac{f(bx)}{x} dx \\ &= \int_{ar}^{aR} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{br}^{bR} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{ar}^{br} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{aR}^{bR} \frac{f(x)}{x} dx \\ &= f(\xi) \int_{ar}^{br} \frac{1}{x} dx - f(\eta) \int_{aR}^{bR} \frac{1}{x} dx = (f(\xi) - f(\eta)) \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

令 $r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$, 因为 $\xi \in (ar, br), \eta \in (aR, bR)$, 所以 $\xi \rightarrow 0, \eta \rightarrow \infty$

取极限可知 $\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f(0^+) - f(+\infty)) \ln \frac{b}{a}$

2. 同理有

$$\int_r^R \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{ar}^{br} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{aR}^{bR} \frac{f(x)}{x} dx = f(\xi) \ln \frac{b}{a} - \int_{aR}^{bR} \frac{f(x)}{x} dx$$

注意积分收敛, 所以上式第二项趋于零, 取极限得到 $\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0^+) \ln \frac{b}{a}$

3. 同理有

$$\int_r^R \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{ar}^{br} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{aR}^{bR} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{ar}^{br} \frac{f(x)}{x} dx - f(\eta) \ln \frac{b}{a}$$

注意积分收敛, 所以上式第一项趋于零, 取极限得到 $\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = -f(+\infty) \ln \frac{b}{a}$

□

注释 5.2.1: 掌握方法最重要, 结论不用背, 知道大概有这个东西就行了

例 5.2.1 计算 $\int_0^\infty \frac{\sum_{n=1}^\infty \sin \frac{x}{2^n} - \sin x}{x^2} dx$.

证明.

$$\int_0^\infty \frac{\sum_{n=1}^\infty \sin \frac{x}{2^n} - \sin x}{x^2} dx = \int_0^\infty \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^\infty \left(\sin \frac{x}{2^n} - \frac{1}{2^n} \sin x \right) dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \frac{\sin \frac{x}{2^n} - \frac{1}{2^n} \sin x}{x^2} dx$$

由此可见需要计算 $\int_0^\infty \frac{\sin ax - a \sin x}{x^2} dx, a > 0$, 分部积分有

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax - a \sin x}{x^2} dx = \int_0^\infty \sin ax - a \sin x d \frac{-1}{x} = a \int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos x}{x} dx = -a \ln a$$

最后一步用的是付汝兰尼积分, 进而

$$\int_0^\infty \frac{\sum_{n=1}^\infty \sin \frac{x}{2^n} - \sin x}{x^2} dx = - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \ln \frac{1}{2^n} = \ln 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{2^n} = 2 \ln 2$$

□

例 5.2.2 计算 $\int_0^\infty \frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \right) dx$.

证明. 本题方法不唯一, 最简单的方法是使用付汝兰尼积分, 但是需要凑一下:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \right) dx &= \int_0^\infty \frac{\frac{1}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2x}}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) - \left(\frac{1}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{2x} \right)}{x} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{f(x) - f(2x)}{x} dx = (f(0^+) - f(+\infty)) \ln 2 = -\frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

其他方法可以考虑把 $\frac{1}{e^x - e^{-x}}$ 写成 $\sin ix$ 然后利用 $\sin x$ 的无穷乘积分解, 将被积函数展开为一个分式级数, 再逐项积分做, 这是一个无脑暴力的通法, 但是对非数超纲了

□

5.3 常见的定积分计算方法

例题 5.3.1 计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}} dx$.

证明. 只需要区间再现把不想看到的项消掉

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{1+e^x} dx, \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{1+e^x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3\pi}{16}$$

□

例题 5.3.2 计算 $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{2 + \sin x} dx$.

证明.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{2 + \sin x} dx &= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin(\pi - x)}{2 + \sin(\pi - x)} dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin x}{2 + \sin x} dx \\ \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{2 + \sin x} dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2 + \sin x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\tan \frac{x}{2}}{\tan^2 \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} + 1} dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan^2 x + \tan x + 1} dx = \pi \int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)} dx \\ &= \pi \left(\arctan x - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1 + 2x}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{18} (9 - 4\sqrt{3}) \pi^2 \end{aligned}$$

□

例题 5.3.3 对正整数 $n \geq 2$, 定义

$$A_n = \int_0^1 x(x-1)\dots(x-n+1)dx, B_n = \int_0^1 x(x+1)\dots(x+n-1)dx$$

证明: $A_n = (-1)^n (B_n - nB_{n-1})$.

证明.

$$\begin{aligned} B_n - nB_{n-1} &= \int_0^1 x(x+1)\dots(x+n-1) - nx(x+1)\dots(x+n-2)dx \\ &= \int_0^1 x(x+1)\dots(x+n-2)(x-1)dx \stackrel{x \rightarrow 1-x}{=} \int_0^1 (-x)(-x+1)\dots(-x+n-1)dx = (-1)^n A_n \end{aligned}$$

□

例题 5.3.4 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x^2 + \frac{1}{2})^2} dx$.

证明. 本题直接分部积分会出问题, 比如

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x^2 + \frac{1}{2})^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{2x} d\left(\frac{1}{x^2 + \frac{1}{2}}\right) = -\frac{e^{-x^2}}{2x} \frac{1}{x^2 + \frac{1}{2}} \Big|_0^{+\infty} + \dots$$

第一项发散了, 没法做, 当然第二项也肯定是发散的 (不然题目就错了), 这说明我们应该抵消奇点

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x^2 + \frac{1}{2})^2} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{2x} d\left(2 - \frac{1}{x^2 + \frac{1}{2}}\right) = -\int_0^{+\infty} \left(2 - \frac{1}{x^2 + \frac{1}{2}}\right) d\frac{e^{-x^2}}{2x} \\ &= \int_0^{+\infty} \left(2 - \frac{1}{x^2 + \frac{1}{2}}\right) \frac{e^{-x^2}(2x^2 + 1)}{2x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

□

例题 5.3.5 对任意正整数 n , 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin(n+1)x dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx$.

证明. 先算第一个, 分部积分有

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin(n+1)x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x (\sin nx \cos x + \cos nx \sin x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \cos nx dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx - \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx d\cos^n x = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos x \sin nx dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x (\sin(n+1)x + \sin(n-1)x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + I_{n-1} \right) \\ 2^n I_n &= \frac{2^{n-1}}{n} + 2^{n-1} I_{n-1} \Rightarrow I_n = \frac{1}{2^n} \left(\frac{2^0}{1} + \frac{2^1}{2} + \dots + \frac{2^{n-1}}{n} \right) \end{aligned}$$

□

例题 5.3.6 设 $a, b > 0, a \neq b$, 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x \cos x}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} dx$.

证明. 令 $\tan x = t$, 则当 $x = 0$ 时, $t = 0$; 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $t = +\infty$. 所以

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x \sin x}{(a^2 + b^2 \tan^2 x)^2 \cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \tan x}{(a^2 + b^2 \tan^2 x)^2} d(\tan x) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t \arctan t}{(a^2 + b^2 t^2)^2} dt = -\frac{1}{2b^2} \int_0^{+\infty} \arctan t d\left(\frac{1}{a^2 + b^2 t^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2b^2} \left[\frac{\arctan t}{a^2 + b^2 t^2} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(a^2 + b^2 t^2)(1+t^2)} \right] \\ &= \frac{1}{2b^2(a^2 - b^2)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{b^2}{a^2 + b^2 t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2b^2(a^2 - b^2)} \left(\arctan t - \frac{b}{a} \arctan \frac{bt}{a} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4ab^2(a+b)}. \end{aligned}$$

□

注释 5.3.1: 显然 $a \neq b$ 这个条件是不必要的, 删去之后结论也对

例题 5.3.7 证明: $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{\ln^2 b - \ln^2 a}{2(b-a)}$. (实际上, 本题允许 a, b 为复数)

证明. 换元有 (可以待定系数, 容易发现应该这样子取)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+a)(x+b)} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln \frac{ab}{x}}{\left(\frac{ab}{x}+a\right)\left(\frac{ab}{x}+b\right)} \frac{ab}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\ln ab - \ln x}{(x+a)(x+b)} dx \\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+a)(x+b)} dx &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+a)(x+b)} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\ln ab - \ln x}{(x+a)(x+b)} dx \right) \\ &= \frac{\ln ab}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{2} \frac{\ln a + \ln b}{b-a} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{\ln a + \ln b}{b-a} (\ln b - \ln a) = \frac{\ln^2 b - \ln^2 a}{2(b-a)} \end{aligned}$$

□

注释 5.3.2: 本题的结果很有意义, 表明所有形如 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + px + q} dx$ 这样子的积分都可以算出来, 不管分母的两个根是实数还是虚数, 也不管分母有没有重根, 只要分母是二次函数, 积分收敛, 那么都可以按照这个公式算出来

其中, 如果分母有重根. 意味着 $a = b$, 只需要取极限计算, 而如果根是复数, 按照欧拉公式计算即可. 对于这两种情况, 考试时候建议优先想办法回避掉 “在计算广义积分中引入复数”, 因为这种方法结果虽然正确, 但是过程的严谨性在非数范围内不好说清楚

5.4 几何应用

定理 5.4.1: 旋转体体积公式

设平面区域 D 在直线 $l: ax + by + c = 0$ 的一侧, 绕直线 l 旋转一圈得到几何体, 则半径公式 (点到直线距离): $r(x, y) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, 体积微元: $dV = 2\pi r(x, y) dS$, 体积公式:

$$V = 2\pi \iint_D r(x, y) dS = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 + b^2}} \iint_D |ax + by + c| dx dy$$

推论 5.4.1

1. 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = a, x = b$ 围成的曲边梯形, 绕 x 轴旋转体积公式为 $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$
2. 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = a, x = b$ 围成的曲边梯形, 绕 y 轴旋转体积公式为 $V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$

注释 5.4.1: 推论中“曲边梯形”的表述自然要求 $f(x)$ 不会穿过 x 轴, 因此不变号, 一般默认是非负的

定理 5.4.2: 旋转体侧面积公式

曲线 $y = f(x), x \in [a, b]$ 绕 x 轴旋转一圈, 所得几何体的侧面积是 $S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$.

定理 5.4.3: 曲线弧长计算公式

1. 对于曲线 $y = f(x), x \in [a, b]$, 弧长公式为 $s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$.
2. 对于曲线 $r = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta]$, 弧长公式为 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta$.
3. 对于曲线 $x = u(t), y = v(t), t \in [a, b]$, 弧长公式为 $s = \int_a^b \sqrt{u'^2(t) + v'^2(t)} dt$.

定理 5.4.4: 曲线围成面积计算公式

1. 对于曲线 $r = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta]$ 和射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$, 围成的面积是 $S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\theta) d\theta$
2. 对于简单闭曲线 $x = x(t), y = y(t)$, 围成的面积是 $S = \left| \int_a^b u'(t) v(t) dt \right| = \left| \int_a^b u(t) v'(t) dt \right|$

例题 5.4.1 设 $a, b, c > 0$, n 是正整数, 求曲线 $\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c\left(\frac{xy}{ab}\right)^n$ 围成区域的面积.

证明. 换元设 $\frac{y}{b} = t\frac{x}{a}$, 则代入消元解出来 $x = \frac{act^n}{t^{2n+1}+1}, y = \frac{bct^{n+1}}{t^{2n+1}+1}$

这里 $t = 0, +\infty$ 对应的点都是原点, 可见范围是 $[0, +\infty)$, 对应着一个平面区域

求导有 $x'(t) = ac \frac{t^{n-1}(n - (1+n)t^{1+2n})}{(t^{2n+1}+1)^2}$, 于是

$$S = \left| \int_0^\infty x(t)y'(t)dt \right| = abc^2 \left| \int_0^\infty \frac{t^{2n}(1+n-nt^{1+2n})}{(t^{2n+1}+1)^3} dt \right| = \frac{abc^2}{2n+1} \left| \int_0^\infty \frac{1+n-nt}{(t+1)^3} dt \right| = \frac{abc^2}{4n+2}$$

□

例题 5.4.2 设 $a > 0$, 求曲线 $r = a\sin^3\frac{\theta}{3}$ 的弧长.

证明. 根据 $r \geq 0$ 以及周期 6π , 所以 $\theta \in [0, 3\pi]$, 画图可知这个范围是一条闭曲线, 所以

$$l = \int_0^{3\pi} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta = a \int_0^{3\pi} \sqrt{\sin^6\frac{x}{3} + \sin^4\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3}} dx = 3a \int_0^\pi \sqrt{\sin^4 x} dx = \frac{3}{2}a\pi$$

□

例题 5.4.3 求曲线 $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x, x \in [0, 1]$ 绕直线 $y = \frac{4}{3}x$ 旋转得到的曲面的面积.

证明. 计算点 $(x, \frac{1}{3}x^3 + 2x)$ 到直线 $4x - 3y = 0$ 的距离为 $r(x) = \frac{x^3 + 2x}{5}$, 弧长微元

$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + (x^2 + 2)^2} dx$$

所以面积是

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 2\pi \frac{x^3 + 2x}{5} \sqrt{1 + (x^2 + 2)^2} dx = \frac{2\pi}{5} \int_0^1 \frac{(t^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{t}) \sqrt{1 + (t + 2)^2}}{2\sqrt{t}} dt \\ &= \frac{\pi}{10} \int_0^1 \sqrt{1 + (t + 2)^2} d(t + 2) = \frac{\pi}{10} \int_4^9 \sqrt{1 + x} dx = \frac{\pi}{3} (2\sqrt{10} - \sqrt{5}) \end{aligned}$$

□

例题 5.4.4 设曲线 $C: x^3 + y^3 - \frac{3}{2}xy = 0$, 求 C 的斜渐近线方程 (已知存在) 以及 C 围成区域的面积.

证明. 设渐近线的方程是 $y = kx + b$, 从 $1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = \frac{3}{2x} \left(\frac{y}{x}\right)$ 令 $x \rightarrow \infty$ 知 $k = -1$

于是 $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + y)$, 设 $u = x + y$ 也即 $y = u - x$ 代入得到

$$x^3 + (u - x)^3 = \frac{3}{2}x(u - x) \Rightarrow \frac{u^3}{x^2} - 3\frac{u^2}{x} + 3u = \frac{3}{2}\frac{u}{x} - \frac{3}{2}$$

取极限, 所以 $u = -\frac{1}{2}$, 渐近线方程是 $y = -x - \frac{1}{2}$

下面计算面积, 设 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 得到 $r = \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{2 \sin^3 \theta + \cos^3 \theta}$

解不等式 $r \geq 0$ 等价于 $\sin 2\theta \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$, 可以得到三个范围:

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{3}{4}\pi, \pi\right], \left[\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi\right]$$

其中第一个范围对应的是封闭区域, 后面两个范围对应的两边的渐近线 (不是封闭区域), 因此面积是

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\theta) d\theta = \frac{9}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta)^2} d\theta = \frac{9}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2 \theta}{(\tan^3 \theta + 1)^2} d \tan \theta = \frac{3}{8}$$

□

例题 5.4.5 给定 $R > 0$, 三个圆 O_1, O_2, O_3 的圆心均在 y 轴正半轴上, O_1 是以 $M(0, 2R)$ 为圆心, R 为半径的圆, 圆 O_2 与 O_3 外切, 并且 O_2 与 O_1 内切, O_3 与 O_1 内切, 求 O_2, O_3 的半径, 使得这三个圆围成的平面图形绕 x 轴旋转一圈后, 所得的几何体体积最大.

证明. 首先计算以 $(0, a)$ 为圆心, r 为半径的圆绕 x 轴转一圈对应的体积, 这里 $a > r > 0$

根据旋转体体积公式有

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{-r}^r \int_{a-\sqrt{r^2-x^2}}^{a+\sqrt{r^2-x^2}} y dy dx = \pi \int_{-r}^r \left((a+\sqrt{r^2-x^2})^2 - (a-\sqrt{r^2-x^2})^2 \right) dx \\ &= 4\pi a \int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2} dx = 4\pi a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 x dx = 2\pi^2 a r^2 \end{aligned}$$

因此所求的体积, 就是用大圆对应的体积, 减去两个小圆对应的体积

根据条件, 设大圆方程是 $x^2 + (y - 2R)^2 = R^2$, 下面那个小圆方程是 $x^2 + (y - (R + r))^2 = r^2$, 上面那个小圆方程是 $x^2 + (y - (2R + r))^2 = (R - r)^2$, 代入到上面的体积公式, 因此所求的旋转体体积是

$$V = 2\pi^2 \left(2R \cdot R^2 - \left((R + r)r^2 + (2R + r)(R - r)^2 \right) \right)$$

不妨设 $R = 1$, 则体积最大就等价于里面那个括号中的式子最小, 设

$$f(r) = (R + r)r^2 + (2R + r)(R - r)^2 = 2r^3 + r^2 - 3r + 2, r \in (0, 1)$$

求导有 $f'(r) = 6r^2 + 2r - 3 = 0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{19} - 1}{6}$, 此时会最小

□

5.5 综合问题

例 5.5.1 计算 $\int_1^{+\infty} \frac{[2x] - 2[x]}{x^2} dx$.

证明. 分区间计算, 则

$$\begin{aligned} \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{[2x] - 2[x]}{x^2} dx &= 0, \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{[2x] - 2[x]}{x^2} dx = \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+1} \\ \int_1^{+\infty} \frac{[2x] - 2[x]}{x^2} dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{[2x] - 2[x]}{x^2} dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x^{2n} - x^{2n+1} dx = 2 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} - x^{2n+1} dx = 2 \int_0^1 \frac{x^2 - x^3}{1 - x^2} dx = 2 \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = 2 \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

也可以用调和级数来算:

$$\begin{aligned} H_n &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}, \int_1^{+\infty} \frac{[2x] - 2[x]}{x^2} dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) \\ H_{2n} &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}, \frac{1}{2} H_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \\ \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) - \frac{1}{2} = H_{2N} - 2 \cdot \frac{1}{2} H_N - \frac{1}{2} \\ &= H_{2N} - H_N - \frac{1}{2} = (\ln(2N) + \gamma) - (\ln N + \gamma) - \frac{1}{2} + o(1) = \ln 2 - \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{[2x] - 2[x]}{x^2} dx &= 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) = 2 \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

□

例 5.5.2 计算 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^6+x^3+1}} dx$

证明. 凑微分有

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^6+x^3+1}} dx = \frac{1}{3} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3\sqrt{x^6+x^3+1}} dx^3 = \frac{1}{3} \int_1^{+\infty} \frac{1}{u\sqrt{u^2+u+1}} du$$

然后欧拉代换 (随便一个, 能把根号去就行了)

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+x+1} = x+u &\Leftrightarrow x = \frac{u^2-1}{1-2u}, x+u = \frac{-u^2+u-1}{1-2u}, dx = -\frac{2(u^2-u+1)}{(1-2u)^2} du \\ \frac{1}{3} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}} dx &= \frac{1}{3} \int_{\sqrt{3}-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{u^2-1}{1-2u} \cdot \frac{-u^2+u-1}{1-2u}} \cdot \frac{-2(u^2-u+1)}{(1-2u)^2} du \\ &= \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}-1} \frac{1}{1-u^2} du = \frac{1}{3} \ln \frac{1+u}{1-u} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{3} \left(\ln(2+\sqrt{3}) - \frac{1}{2} \ln 3 \right) \end{aligned}$$

其中积分上下限是代入端点 (无穷处要算一下极限) 得到的

□

例题 5.5.3 设 $a > 1$, 计算 $\int_0^1 \frac{1}{(x-a)\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}} dx$.

证明. 本题自然想法就是把根号换元, 多次换元转化为 $Beta$ 函数来解决问题, 当然如果你注意力足够高, 你也可以把若干步换元合成为一次换元, 直接解决

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \frac{1}{(x-a)\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}} dx = \int_0^1 \frac{1}{x(x-a)\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{3}{5}}} dx \\
 y &= \left(\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{1}{5}}, x = \frac{1}{y^5+1}, dx = -\frac{5y^4}{(y^5+1)^2} dy \\
 I &= -\int_0^\infty \frac{5y}{1-a(y^5+1)} dy = -\frac{5}{a} \int_0^\infty \frac{y}{y^5+1-\frac{1}{a}} dy = -\frac{5}{a} \left(1-\frac{1}{a}\right)^{-\frac{3}{5}} \int_0^\infty \frac{u}{u^5+1} du \\
 y &= \frac{1}{u^5+1}, u = \left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{1}{5}}, du = -\frac{1}{5y^2} \left(\frac{1}{y}-1\right)^{-\frac{4}{5}} dy \\
 I &= -\frac{1}{a} \left(\frac{a-1}{a}\right)^{-\frac{3}{5}} \int_0^1 y^{-\frac{2}{5}} (1-y)^{-\frac{3}{5}} dy = -\frac{1}{a} \left(\frac{a-1}{a}\right)^{-\frac{3}{5}} B\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right) = -a^{-\frac{2}{5}} (a-1)^{-\frac{3}{5}} \frac{\pi}{\sin \frac{2\pi}{5}}
 \end{aligned}$$

□

注释 5.5.1: 此类积分还可以使用留数定理解决, 见史济怀复变函数 5.5 节最后那个定理

例题 5.5.4 计算 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx, \int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x(1+x^2)} dx, \int_0^\infty \frac{\ln(1+2x^2)}{x(1+x^2)} dx$

证明. 解法很多, 可以三角换元, 可以含参积分, 留数定理应该也可以

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x + 1)}{\tan^2 x + 1} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\sin x}{\cos x} + 1\right) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x + \cos x) - \ln \cos x dx = \frac{\pi}{8} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \ln \cos x dx = \frac{\pi}{8} \ln 2 \\
 \int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x(1+x^2)} dx &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \cos x \cos x}{\sin x} dx = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x \sin x}{\cos x} dx, \sin x = t \\
 &= -2 \int_0^1 \frac{t \ln t}{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln t^2}{1-t^2} dt^2 = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \ln t \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \left(\int_0^1 x^n \ln x dx = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 x^n dx = -\frac{1}{(n+1)^2} \right) \\
 \int_0^\infty \frac{\ln(1+2x^2)}{x(1+x^2)} dx &\stackrel{y=2x^2+1}{=} \int_{x=\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^\infty \frac{\ln y}{y^2-1} dy = -\int_0^1 \frac{\ln y}{1-y^2} dy = -\int_0^1 \ln y \sum_{n=0}^{\infty} y^{2n} dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}
 \end{aligned}$$

□

注释 5.5.2: 形如 $\int_0^\infty \frac{\ln(1+sx^2)}{x(1+x^2)} dx$ 的积分, 只有 $s=1, 2$ 时候能算出来具体值

例题 5.5.5 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x \sin(x \sin(x \sin(\dots)))) dx$

证明. 本题的递推式为 $a_1 = 1, a_{n+1} = \sin(xa_n), x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 被积函数就是极限函数, 这个数列前几项是

$$a_1 = 1, a_2 = \sin x, a_3 = \sin(x \sin x), a_4 = \sin(x \sin(x \sin x)), \dots$$

记函数 $f(t) = \sin(xt)$ 是关于 t 的函数, 其中 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 是参数, 递推式为 $a_{n+1} = f(a_n), a_1 = 1$ (可以自己画个蛛网图分析), 当 $x = 0$ 时恒有 $a_n = 0$, 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时恒有 $a_n = 1$, 对任意 $x \in (0, 1]$ 显然有

$$a_{n+1} = \sin(xa_n) \leq xa_n \leq a_n, a_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

所以 a_n 单调递减并且有界, 考虑极限, 则极限 t 满足 $\sin(xt) = t$, 但是 $x \in (0, 1]$, 所以只能 $t = 0$, 于是 $x \in [0, 1]$ 时都有 a_n 收敛到零, 下面考虑 $x \in (1, \frac{\pi}{2})$ 的情况, 计算极限

因为 $f'(0) = x > 1, f(0) = 0, f(1) = \sin x < 1$, 所以容易知道 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 中单调递增, 并且开始在 $y = x$ 上方, 然后穿过它到达下方, 由此导致会有一个正的不动点, 进而 a_n 会单调递减趋近于这个正的不动点 (易证, 方法和前面一样), 不动点也就是极限点, 满足 $t = \sin(xt)$, 综上所述我们计算出了 a_n 的极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \\ y(x), & x \in \left(1, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}, y(x) = \sin(xy(x)), y(x) \in (0, 1]$$

由此解出 $x = \frac{\arcsin y(x)}{y(x)}$, 代入, 所以积分为

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x \sin(x \sin(x \sin(\dots)))) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(x) dx = \int_1^{\frac{\pi}{2}} y(x) dx = \int_1^{\frac{\pi}{2}} y(x) d \frac{\arcsin y(x)}{y(x)} \\ &= \int_0^1 y d \frac{\arcsin y}{y} = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{\arcsin y}{y} dy = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y \cos y}{\sin y} dy = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} y d \ln \sin y \\ &= \frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin y dy = \frac{\pi}{2} (1 - \ln 2) \end{aligned}$$

其中, 最后的积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$ 是容易并且经典的, 只需要区间再现

□

例题 5.5.6 计算 $\int_1^2 \frac{\ln(x^4 + 4) - \ln(x^2 + 4)}{x} dx$

证明. 方法一: 需要不停的换元配凑, 抵消, 区间再现

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^2 \frac{\ln(x^4 + 4) - \ln(x^2 + 4)}{x} dx = \frac{1}{2} \left(\int_2^4 \frac{\ln(x^2 + 4)}{x} dx - \int_1^2 \frac{\ln(x^2 + 4)}{x} dx \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_1^2 \frac{\ln(4x^2 + 4)}{x} dx - \int_1^2 \frac{\ln(x^2 + 4)}{x} dx \right) = \ln^2 2 + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{\ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 + 4)}{x} dx \\
 &= \ln^2 2 + \frac{1}{4} \int_1^4 \frac{\ln(x + 1) - \ln(x + 4)}{x} dx \\
 &= \int_1^4 \frac{\ln(x + 1) - \ln(x + 4)}{x} dx = \int_1^4 \frac{\ln x + \ln(1 + \frac{1}{x}) - \ln 4 - \ln(1 + \frac{x}{4})}{x} dx \\
 &= \int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx - 2 \ln 2 \int_1^4 \frac{1}{x} dx + \int_1^4 \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{x} dx - \int_1^4 \frac{\ln(1 + \frac{x}{4})}{x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln^2 x \Big|_1^4 - 4 \ln^2 2 = -2 \ln^2 2, \left(\frac{1}{x} = \frac{y}{4} \Rightarrow \int_1^4 \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{x} dx = \int_1^4 \frac{\ln(1 + \frac{x}{4})}{x} dx \right) \\
 I &= \ln^2 2 - \frac{1}{2} \ln^2 2 = \frac{1}{2} \ln^2 2
 \end{aligned}$$

方法二: 直接用 Li_2 函数, 幂级数展开硬算, 定义 $Li_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$, 则

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 \frac{\ln(x^2 + 4)}{x} dx &= \int_1^2 \frac{2 \ln 2 + \ln(1 + \frac{x^2}{4})}{x} dx = 2 \ln^2 2 + \int_1^2 \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x^2}{4} \right)^n dx \\
 &= 2 \ln^2 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4^n n} \int_1^2 x^{2n-1} dx = 2 \ln^2 2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4^n n^2} (4^n - 1) \\
 &= 2 \ln^2 2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} - \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 4^n} \right) = 2 \ln^2 2 + \frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4})^n}{n^2} = 2 \ln^2 2 + \frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{2} Li_2 \left(-\frac{1}{4} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \ln^2 2 + \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{4}{x^4} \right)^n dx = \frac{3}{2} \ln^2 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4^n}{n} \int_{\sqrt{2}}^2 x^{-(4n+1)} dx \\
 &= \frac{3}{2} \ln^2 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4^n}{4n^2} \left(\frac{1}{4^n} - \frac{1}{4^{2n}} \right) = \frac{3}{2} \ln^2 2 + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4})^n}{n^2} \\
 &= \frac{3}{2} \ln^2 2 + \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{4} Li_2 \left(-\frac{1}{4} \right) \\
 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\ln(x^4 + 4)}{x} dx &= \int_1^2 \frac{\ln(x^2 + 4)}{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{\ln(x^2 + 4)}{x} dx \\
 &= \ln^2 2 + \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{4} Li_2 \left(-\frac{1}{4} \right) \Rightarrow \int_1^2 \frac{\ln(x^4 + 4)}{x} dx = \frac{5}{2} \ln^2 2 + \frac{1}{2} Li_2 \left(-\frac{1}{4} \right) + \frac{\pi^2}{24}
 \end{aligned}$$

由此可知结论成立, 刚刚好 Li_2 部分都消了

□

例题 5.5.7 对任意正整数 n , 证明: $\int_0^1 \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^k}{k} \right)^2 dx = 2 \int_0^1 x^{n-1} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

证明. 先来处理右边, 换元然后幂级数展开有

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 x^n \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx &= 4 \int_0^1 x^{2n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx = 4 \left(\int_0^1 x^{2n+1} \ln(1+x) dx - \int_0^1 x^{2n+1} \ln x dx \right) \\ \left(\int_0^1 x^{2n+1} \ln x dx = \frac{-1}{2n+2} \int_0^1 x^{2n+1} dx = -\frac{1}{(2n+2)^2} \right), &= 4 \left(\int_0^1 x^{2n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k dx + \frac{1}{(2n+2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \int_0^1 x^{2n+1+k} dx = \frac{1}{(n+1)^2} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(2n+2+k)} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2n+2} \right) (-1)^{k-1} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=2n+3}^{\infty} \frac{(-1)^{k-2n-3}}{k} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+1} \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k}, \left(\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k} = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} \right) \end{aligned}$$

这说明右边

$$2 \int_0^1 x^{n-1} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

再来处理左边, 同样将被积函数展开, 然后逐项积分有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^k}{k} \right)^2 dx &= \int_0^1 \sum_{i,j=n}^{\infty} \frac{x^{i+j}}{ij} dx = \sum_{i=n}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{ij(i+j)} = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} \sum_{j=n}^{\infty} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+i+1} \right) \\ &= \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+i} \right) = \sum_{i=n}^{\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+i} \right) \end{aligned}$$

然后 Abel 变换, 对任意 $N > n$ 有

$$\begin{aligned} &\sum_{i=n}^N \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+i} \right) \\ &= \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+N} \right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N+1} \right) - \sum_{i=n}^{N-1} \frac{1}{n+i+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{i+1} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{N+1} \sum_{k=n}^{N+n} \frac{1}{k} + \sum_{i=n}^{N-1} \frac{1}{(n+i+1)(i+1)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{N+1} \sum_{k=n}^{N+n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \sum_{i=n}^{N-1} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{n+i+1} \right) \\ &\Rightarrow \int_0^1 \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^k}{k} \right)^2 dx = \sum_{i=n}^{\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+i} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{N+1} \sum_{k=n}^{N+n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \sum_{i=n}^{N-1} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{n+i+1} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \sum_{i=n}^{\infty} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{n+i+1} \right) = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

可见左右两端相等, 结论得证

□

例题 5.5.8 设 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 中连续, 证明: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x) \cos x \, dx$

证明. 直接换元 $\cos^2 x = \sin 2y, y \in [0, \frac{\pi}{4}]$, 则 $x = \arccos \sqrt{\sin 2y}$ 并且

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x) \cos x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2y) \sqrt{\sin 2y} \frac{\cos 2y}{\sqrt{1 - \sin 2y} \sqrt{\sin 2y}} dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2y) \frac{\cos^2 y - \sin^2 y}{\cos y - \sin y} dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2y) (\cos y + \sin y) dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2y) \cos y \, dy + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2y) \sin y \, dy, y \rightarrow \frac{\pi}{2} - y \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2y) \cos y \, dy + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2y) \cos y \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2y) \cos y \, dy \end{aligned}$$

□

注释 5.5.3: 你也可以采用多项式逼近做, 从而只需要验证 $f(x) = x^k$ 时候成立

例题 5.5.9 计算 $\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{3-\cos x}} dx$.

证明.

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{3-\cos x}} dx \stackrel{t=\cos x}{=} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{3-t}\sqrt{1-t^2}} dt \stackrel{t=-1+2x}{=} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-2x}\sqrt{x-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)(2-x)}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)(1+x)}} dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}(1-x)\sqrt{x}}} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 x^{-\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})} \end{aligned}$$

□

例题 5.5.10 设函数 $f(x)$ 满足 $f^3(x) + xf(x) = 8$, 计算 $\int_0^7 f^2(x) dx$.

证明. 条件表明 $x = \frac{8-f^3(x)}{f(x)}$, $f(0) = 2, f(7) = 1$, 所以

$$\begin{aligned} \int_0^7 f^2(x) dx &= \int_0^7 f^2(x) d\frac{8-f^3(x)}{f(x)} = \int_2^1 y^2 d\frac{8-y^3}{y} \\ &= y(8-y^3) \Big|_2^1 - \int_2^1 \frac{8-y^3}{y} 2y dy = 7 - 2 \int_1^2 y^3 - 8 dy = \frac{31}{2} \end{aligned}$$

□

注释 5.5.4: 以上过程严格说明起来需要隐函数定理, 上面其实只是形式计算而已

5.6 练习题

习题 5.6.1 计算 $\int \arcsin x \arccos x dx$.

习题 5.6.2 设 $f(x)$ 是连续函数, a, b 为实数, 证明: $\int_0^{2\pi} f(a \cos x + b \sin x) dx = 2 \int_0^\pi f(\sqrt{a^2 + b^2} \cos x) dx$.

习题 5.6.3 计算 $\int_0^\pi \frac{1}{2 + \cos 2x} dx$

习题 5.6.4 计算 $\int (1+x^3)^{-\frac{1}{3}} dx, \int (1+x^4)^{-\frac{1}{4}} dx$.

习题 5.6.5 计算 $\int \frac{x^n}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}} dx$.

习题 5.6.6 计算 $\int_1^{+\infty} \frac{\{x\} - \frac{1}{2}}{x} dx$.

习题 5.6.7 计算 $\int \frac{x}{x^2+6} \frac{1}{(x \cos x - 3 \sin x)^2} dx$.

习题 5.6.8 计算 $\int \left(1+x-\frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$.

习题 5.6.9 计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx$.

习题 5.6.10 设 n 为正整数, 曲线 $x^{2n} + y^{2n} = 1$ 的周长是 L_n , 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n$.

习题 5.6.11 设 $a > 0$, 求曲线 $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2)$ 围成的区域的面积.

习题 5.6.12 在极坐标下, 证明: $\theta \in [\alpha, \beta] \subset [0, \pi], r \in [0, r(\theta)]$ 所表示的区域, 绕极轴旋转一周所围成的几何体的体积是 $V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta r^3(\theta) \sin \theta d\theta$.

习题 5.6.13 计算曲线 $|\ln x| + |\ln y| = 1$ 围成的区域的面积.

习题 5.6.14 对 $a, b > 0$, 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{(e^{-ax} - e^{-bx})^2}{x^2} dx, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - \cos bx}{x^2} dx$.

习题 5.6.15 计算 $\int \frac{1}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}} dx$

习题 5.6.16 计算 $\int_0^1 \ln \Gamma(x) dx$.

习题 5.6.17 对任意正整数 n , 证明:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \ln(1+k)$$

习题 5.6.18 计算 $\int_0^\infty \frac{\sin 3x}{3x^2} - \frac{\sin 2x}{2x^2} dx$.

第六章 积分不等式初步

非数的积分不等式专题主要讲的都是很常见的经典方法，并且题目大多比较直接，无需什么思考，方向明确，同时很多问题也是直接应用著名积分不等式，并没有什么变化，相应的，难题以及反常规反套路的题目将会放到数学类进行讲解

非数的积分不等式大多就是柯西不等式，牛顿莱布尼茨公式，中值定理方法，或者直接求导看单调性，以及运用高考不等式放缩，还有简单的待定系数思想，基本上就这些手法，考试时候不会超出这个范围。

注意：中值定理结论（微分中值定理，积分第一中值定理，积分第二中值定理）并不只是在做中值定理题目时候有用，实际上在做积分不等式问题时候，往往也能用上，而且很方便很好用

定理 6.0.1: 赫尔德不等式

设 $f(x), g(x) \in R[a, b]$, p, q 为满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 的一对正实数，则成立

$$\left(\int_a^b |f(x)g(x)| dx \right) \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

注释 6.0.1: 特别的， $p = q = 2$ 时就是熟知的柯西不等式： $\int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx \geq \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2$

这里积分区间是随意的，无穷区间也可以（相应的为广义积分可积）

另外，赫尔德不等式有反向的结论，对应于 $p < 0, q \in (0, 1)$ 的情形，不过一般用不上

定理 6.0.2: 琴生不等式

设 $f, p \in R[a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$, $p(x)$ 非负且 $\int_a^b p(x) dx > 0$ ，则当 ϕ 是 $[m, M]$ 上的下凸函数时，成立：

$$\phi \left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx} \right) \leq \frac{\int_a^b p(x)\phi(f(x))dx}{\int_a^b p(x)dx}$$

若 ϕ 是上凸函数则不等式反向。如果上式中，取 $p(x) \equiv 1$ ，就得到

$$\phi \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(f(t))dt.$$

定理 6.0.3: 哈达玛不等式

设 f 是 (a, b) 上的下凸函数, 则对每一对 $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$, 有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

定理 6.0.4: Young 不等式

设 f 在 $[0, \infty)$ 上连续可导且严格单调增加, $f(0) = 0, a, b > 0$, 则有

$$ab \leq \int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(y) dy.$$

其中 $g(y)$ 是 $f(x)$ 的反函数, 当且仅当 $b = f(a)$ 时等号成立。

注释 6.0.2: 前面这三个不等式基本都没什么用, 相比之下琴生偶尔还会用到, 剩下两个则几乎从未出现

定理 6.0.5: 积分第一中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中黎曼可积且不变号, $g(x)$ 连续, 则存在 $u \in (a, b)$ 使得

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(u) \int_a^b f(x) dx$$

注释 6.0.3: 或许比课本结论要强, 一个可积一个连续即可, 同时还能做到开区间

定理 6.0.6: 积分第二中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中黎曼可积, $g(x)$ 单调, 则存在 $u \in [a, b]$ 使得

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^u f(x) dx + g(b) \int_u^b f(x) dx$$

特别的, 如果 $g(x)$ 非负递增, 则结论为 $\int_a^b f(x) g(x) dx = g(b) \int_u^b f(x) dx$, 非负递减同理

注释 6.0.4: 这个结论非常重要, 比课本的结论强 (条件弱了), 核心条件是单调性, 只要有单调就能用第二中值, 也是后面广义积分章节很多结论或解题方法的基础, 特别的如果是非负单调, 那么在两项中就只需要保留一项 (非负单调函数取值较大的那个端点, 对应的项留下来)

如果 $g(x)$ 不是常值函数, 那么中值点 $u \in [a, b]$ 可以加强为 $u \in (a, b)$

这两个较强版本的积分中值定理大家记住然后直接用即可, 数学类课程看情况可能会讲一下证明, 非数无需关心证明, 也超出了非数范围 (因为条件很弱)

6.1 基础题目

例题 6.1.1 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中可导并且 $f'(x) \geq f(x) > 0$, 证明: $\int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{1}{f(a)} - \frac{1}{f(b)}$.

证明. 直接构造函数求导

$$g(x) = \int_a^x \frac{1}{f(t)} dt - \frac{1}{f(a)} + \frac{1}{f(x)}, g(a) = 0, g'(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{f'(x)}{f^2(x)} \leq 0$$

结论得证 (注意不要在被积函数里面乘以 $f'(x)$ 然后算原函数)

□

例题 6.1.2 设 $f(x) \in D[0, 1]$ 且非负, 证明:

$$\left| \int_0^1 f^3(x) dx - f^2(0) \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \max_{x \in [0, 1]} |f'(x)| \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2$$

证明. 利用牛顿莱布尼茨公式, 并利用非负可知

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 f^3(x) dx - f^2(0) \int_0^1 f(x) dx \right| = \left| \int_0^1 f(x) (f^2(x) - f^2(0)) dx \right| \\ &= \left| \int_0^1 f(x) \int_0^x (f^2(t))' dt dx \right| = \left| \int_0^1 f(x) \int_0^x 2f(t) f'(t) dt dx \right| \\ &\leq \int_0^1 f(x) \int_0^x 2f(t) |f'(t)| dt dx \leq 2 \max |f'(x)| \int_0^1 f(x) \int_0^x f(t) dt dx \\ &\left(g(x) = \int_0^x f(t) dt \right) = \max |f'(x)| \int_0^1 2g'(x) g(x) dx = \max |f'(x)| \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^2 \end{aligned}$$

□

例题 6.1.3 设 $f(x) \in D^2[-1, 1]$ 且 $2f'(x) + xf''(x) \geq 1$, 证明: $\int_{-1}^1 xf(x) dx \geq \frac{1}{3}$.

证明. 凑微分, 注意 $x^2 f'(x)$ 求导是 $x(2f'(x) + xf''(x))$, 所以考虑

$$\left(x^2 \left(f'(x) - \frac{1}{2}\right)\right)' = 2x \left(f'(x) - \frac{1}{2}\right) + x^2 f''(x) = x(2f'(x) + xf''(x) - 1)$$

根据条件可知, 函数 $x^2 \left(f'(x) - \frac{1}{2}\right)$ 在 $(-1, 0)$ 递减, 在 $(0, 1)$ 递增, 并且在 $x = 0$ 处取值为零, 所以 $x^2(f'(x) - \frac{1}{2})$ 非负, 也即 $f'(x) \geq \frac{1}{2}$, 故

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(0) + \frac{1}{2}x, x \in [0, 1] \Rightarrow xf(x) \geq xf(0) + \frac{1}{2}x^2 \\ f(x) &\leq f(0) + \frac{1}{2}x, x \in [-1, 0] \Rightarrow xf(x) \geq xf(0) + \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

然后积分即可得到结论

□

例题 6.1.4 设 $f(x) \in C^2[0, 1]$ 且 $\left|\int_0^1 f(x) dx\right| < \int_0^1 |f(x)| dx$, 记 $|f'(x)|, |f''(x)|$ 的最大值分别是 A, B , 证明: $\left|\int_0^1 f(x) dx\right| \leq \frac{1}{2}A + \frac{1}{6}B$.

证明. 根据条件可知 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 中有变号零点, 记为 x_0 , 实际上由此即可证明 $\left|\int_0^1 f(x) dx\right| \leq \frac{1}{2}A$

因为 $|f'(x)| \leq A$, 所以 $|f(x)| \leq A|x - x_0|$, 于是

$$\left|\int_0^1 f(x) dx\right| \leq \int_0^1 |f(x)| dx \leq A \int_0^1 |x - x_0| dx = \frac{1}{2}A (x_0^2 + (1 - x_0)^2) \leq \frac{1}{2}A$$

□

例题 6.1.5 设 $f(x) \in C^2[0, 1]$, $|f''(x)| \leq 1$, 若 $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = 0$, 证明: $\left| \int_0^1 x^2 f(x) dx \right| \leq \frac{1}{360}$.

证明. 待定系数分部积分有

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 x^2 f(x) dx \right| &= \left| \int_0^1 (x^2 + ax + b) f(x) dx \right| = \left| \int_0^1 f(x) d\left(\frac{x^3}{3} + \frac{a}{2}x^2 + bx\right) \right| \\ &= \left| \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{a}{2}x^2 + bx\right) f'(x) dx \right| = \left| \int_0^1 f'(x) d\left(\frac{x^4}{12} + \frac{a}{6}x^3 + \frac{b}{2}x^2\right) \right| \\ &= \left| \int_0^1 \left(\frac{x^4}{12} + \frac{a}{6}x^3 + \frac{b}{2}x^2\right) f''(x) dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{x^4}{12} + \frac{a}{6}x^3 + \frac{b}{2}x^2 \right| dx \end{aligned}$$

过程中需要边界取值零, 也即

$$\frac{1}{3} + \frac{a}{2} + b = 0, \frac{1}{12} + \frac{a}{6} + \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow a = -1, b = \frac{1}{6}$$

于是

$$\left| \int_0^1 x^2 f(x) dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{x^4}{12} - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^2 \right| dx = \frac{1}{12} \int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = \frac{1}{360}$$

□

6.2 几何意义类型

例题 6.2.1 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 内连续, 在 $(0, 2)$ 内可导且 $f(0) = f(2) = 1, |f'(x)| \leq 1$, 证明: $1 < \int_0^2 f(x) dx < 3$.

证明. 根据条件可知

$$f(x) \geq \begin{cases} -x+1, & x \in [0, 1] \\ x-1, & x \in [1, 2] \end{cases}, f(x) \leq \begin{cases} x+1, & x \in [0, 1] \\ -x+3, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

代入积分即可, 注意如果不等式取等, 则意味着 $f(x)$ 要等于某一个折线, 这与可导性矛盾, 所以不等式是严格的

□

注释 6.2.1: 要严格说明开始的不等式也很容易, 例如当 $x \in [0, 1]$ 时有 $f(x) = f(0) + f'(u)x$ 然后放缩一下 $f'(u)$ 即可

例题 6.2.2 设 $a > 0, f(x), g(x) \in R[0, a], 0 \leq f(x) \leq 1, \int_0^a f(x) dx = \frac{a}{2}$, 若 $g(x)$ 非负且单调递增, 求 $\int_0^a f(x)g(x) dx$ 的最大值与最小值. (这里 $g(x)$ 是已知的函数, 结论用 $g(x)$ 表示)

证明. 我们证明 $\int_0^{\frac{a}{2}} g(x) dx \leq \int_0^a f(x)g(x) dx \leq \int_{\frac{a}{2}}^a g(x) dx$ 即可 (显然能取等)

只证明 $\int_0^a f(x)g(x) dx \leq \int_{\frac{a}{2}}^a g(x) dx$, 另一个可以同理, 考虑 $p(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{a}{2}] \\ 1, & x \in [\frac{a}{2}, a] \end{cases}$, 则 $\int_{\frac{a}{2}}^a g(x) dx = \int_0^a p(x)g(x) dx$, 利用积分第二中值定理可知

$$\int_{\frac{a}{2}}^a g(x) dx - \int_0^a f(x)g(x) dx = \int_0^a g(x)(p(x) - f(x)) dx = g(a) \int_u^a p(x) - f(x) dx$$

如果 $u \geq \frac{a}{2}$, 则被积函数非负, 结论显然成立, 如果 $u \leq \frac{a}{2}$, 则

$$\int_u^a p(x) - f(x) dx = \int_0^a p(x) - f(x) dx - \int_0^u p(x) - f(x) dx = \int_0^u f(x) dx \geq 0$$

综上, 结论得证

□

注释 6.2.2: 直观感受是当 g 较大时候取 f 较大, g 小时候 f 也小, 此时 $f(x)g(x)$ 的积分就会最大, 反之则最小, 也就是“扩大优势”的思想, 这样就猜到了答案, 然后运用第二中值来证明即可 (因为有核心条件: 单调性)

6.3 被积函数放缩法

例题 6.3.1 设 $t \geq 1, f(x)$ 非负且在 $[0, 1]$ 中黎曼可积, 满足 $\int_0^1 f(x)dx = 1$, 证明: $\int_0^1 \frac{f(x)}{f^2(x)+t} dx \leq \frac{1}{t+1}$.

证明. 直接将 $f(x)$ 看成一个非负的变量 y , 对被积函数放缩

考虑函数

$$g(x) = \frac{x}{x^2+t}, g'(x) = \frac{t-x^2}{(t+x^2)^2}, g''(x) = \frac{2x(x^2-3t)}{(t+x^2)^3}$$

由此可知 $g(x)$ 在 $[0, \sqrt{t}]$ 中上凸递增, 在 $[\sqrt{t}, \sqrt{3t}]$ 中上凸递减, 在 $[\sqrt{3t}, +\infty)$ 中下凸递减趋于零, 并且 $1 \in [0, \sqrt{t}]$

考虑 $g(x)$ 在 $x=1$ 处的切线 $l(x)$, 则在上凸区间内自动成立 $g(x) \leq l(x)$, 而在下凸区间内, 注意 $l(x)$ 递增, $g(x)$ 递减, 所以 $g(x) \leq g(\sqrt{3t}) \leq l(\sqrt{3t}) \leq l(x)$, 所以在 $x \geq 0$ 中恒成立 $g(x) \leq l(x)$

代入 $f(x)$ 可知

$$\frac{f(x)}{f^2(x)+t} \leq g(1) + g'(1)(f(x)-1) \Rightarrow \int_0^1 \frac{f(x)}{f^2(x)+t} dx \leq \frac{1}{t+1}$$

□

例题 6.3.2 若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积, 证明: $\int_0^1 \sqrt{f^4(x) + \left(\int_0^1 f(t)dt\right)^4} dx \leq \sqrt{2} \int_0^1 f^2(x)dx$

证明. 不妨设 $\int_0^1 f(t)dt = 1$, 考虑函数 $g(x) = \sqrt{x^4+1}$, 希望寻找 $g(x) \leq$ 某个二次函数, 然后两边积分完成证明 (注意不可以是 $g(x) \leq$ 切线, 因为显然 $g(x)$ 上凸, 它只能在切线上方, 不等号方向不对!)

注意 $f(x)=1$ 取等, 所以考虑

$$g(1) + g'(1) + \frac{1}{2}g''(1)(x-1)^2 = \sqrt{2}(x^2-x+1)$$

展开容易验证 $\sqrt{x^4+1} \leq \sqrt{2}(x^2-x+1) \Leftrightarrow (x-1)^4 \geq 0$, 进而

$$\int_0^1 \sqrt{f^4(x)+1} dx \leq \sqrt{2} \int_0^1 f^2(x) - f(x) + 1 dx = \sqrt{2} \int_0^1 f^2(x) dx$$

□

6.4 柯西不等式与配方

例题 6.4.1 设 $f(x) \in C^2[-1, 1]$ 且 $f(-1) = -1, f(1) = 1, f'(-1) = f'(1) = 0$, 对任意 $p > 1$ 证明:

$$\int_{-1}^1 |f''(x)|^p dx \geq 2 \left(\frac{2p-1}{p-1} \right)^{p-1}$$

证明. 先尝试一下 $p = 2$ 的情况, 待定系数分部积分有

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f''^2(x) dx \int_{-1}^1 g^2(x) dx &\geq \int_{-1}^1 |f''(x)g(x)| dx \geq \left| \int_{-1}^1 f''(x)g(x) dx \right| \\ &= \left| \int_{-1}^1 f'(x)g'(x) dx \right| = \left| \int_{-1}^1 f(x)g''(x) dx \right|, g(1) = g(-1) = 0 \end{aligned}$$

但是最后的 $\int_{-1}^1 f(x)g''(x) dx$ 无法刻画, 因为缺少 $f(x)$ 积分相关的信息, 所以往前推一步, 应有 $g'(x) = C$, 这样右边能出来一个常数, 换句话说, $g(x)$ 应为一次函数, 既然如此就取 $g(x) = x$ (因为对称性), 代入发现刚刚好就是题目要的不等式

对于一般情况, 利用赫尔德不等式有

$$\left(\int_{-1}^1 |f''(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-1}^1 |x|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \geq \int_{-1}^1 |f''(x)x| dx \geq \left| \int_{-1}^1 f''(x)x dx \right| = \left| \int_{-1}^1 f'(x) dx \right| = 2$$

注意 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 计算有

$$\int_{-1}^1 |x|^q dx = \frac{2}{q+1} = \frac{2p-2}{2p-1} \Rightarrow \int_{-1}^1 |f''(x)|^p dx \geq \left(2 \left(\frac{2p-2}{2p-1} \right)^{1-\frac{1}{p}} \right)^p = 2 \left(\frac{2p-1}{p-1} \right)^{p-1}$$

□

例题 6.4.2 设 $f(x) \in C^1[0, 1]$, $f(0) = f(1) = -\frac{1}{6}$, 证明: $\int_0^1 f'^2(x) dx \geq 2 \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{4}$.

证明. 考虑 $g(x) = f(x) + \frac{1}{6}$, $g(0) = g(1) = 0$, 则要证明的是 $\int_0^1 g'^2(x) dx \geq 2 \int_0^1 g(x) dx - \frac{1}{12}$

方法一: 利用柯西不等式有

$$\begin{aligned} \int_0^1 g'^2(x) dx \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx &\geq \left(\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) g'(x) dx\right)^2 = \left(\int_0^1 g(x) dx\right)^2 \\ \Rightarrow \int_0^1 g'^2(x) dx &\geq 12 \left(\int_0^1 g(x) dx\right)^2 \geq 2 \int_0^1 g(x) dx - \frac{1}{12} \Leftrightarrow 12u^2 + \frac{1}{12} \geq 2u \end{aligned}$$

最后的不等式显然成立, 结论得证

方法二: 根据取等条件, 直接配方即可

$$\int_0^1 \left(g'(x) - c \left(x - \frac{1}{2}\right)\right)^2 dx = \int_0^1 g'^2(x) dx + \frac{1}{12}c^2 + 2c \int_0^1 g(x) dx \geq 0 \Rightarrow c = -1$$

□

例题 6.4.3 设 $f(0) = 0$, $f(x) \in C^1[0, 1]$, 证明: $\int_0^1 (1-x^2) f'^2(x) dx \geq 2 \int_0^1 f^2(x) dx$.

证明. 首先寻找取等条件, 发现 $f(x) = cx$ 都可以, 变形有 $c = \frac{f(x)}{x}$ 然后求导得到 $xf'(x) - f(x) = 0$ (形式计算, 没有严谨性可言, 只是为了寻找到配方对象), 对比目标式子, 让 $\frac{f}{x} f'^2(x)$ 项前面的函数一致, 并保持前面那个因子, 因此配方有

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (1-x^2) \left(f'(x) - \frac{f(x)}{x}\right)^2 dx \\ &= \int_0^1 (1-x^2) f'^2(x) dx + \int_0^1 \frac{1-x^2}{x^2} f^2(x) dx - 2 \int_0^1 \frac{f(x) f'(x) (1-x^2)}{x} dx \\ &= \int_0^1 (1-x^2) f'^2(x) dx + \int_0^1 \frac{1-x^2}{x^2} f^2(x) dx - \int_0^1 \frac{1-x^2}{x} d f^2(x) \\ &= \int_0^1 (1-x^2) f'^2(x) dx - 2 \int_0^1 f^2(x) dx \geq 0 \end{aligned}$$

□

注释 6.4.1: 条件 $f(0) = 0$ 不仅保证了分部积分时候边界项为零, 同时还确保了式子中的“疑似广义积分”实际上是常义积分, 都是收敛的

例题 6.4.4 设 $f(x) \in C^1[0, 1]$ 且 $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = 1$, 证明: $\int_0^1 |f'(x)|^3 dx \geq \left(\frac{128}{3\pi}\right)^2$.

证明. 利用赫尔德不等式有

$$\left(\int_0^1 |f'(x)|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_0^1 |g(x)|^{\frac{3}{2}} dx\right)^{\frac{2}{3}} \geq \int_0^1 |f'(x)g(x)| dx \geq \left|\int_0^1 f'(x)g(x) dx\right| = \left|\int_0^1 f(x)g'(x) dx\right|$$

想要能算出来, 根据条件, 应有 $g'(x) = ax + b$, 所以 $g(x)$ 是二次函数, 再注意分部积分时候要求 $g(0) = g(1) = 0$, 所以只能 $g(x) = x(1-x)$, 代入可得

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |f'(x)|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_0^1 x(1-x)^{\frac{3}{2}} dx\right)^{\frac{2}{3}} &\geq \left|\int_0^1 f(x)(1-2x) dx\right| = 1 \\ \int_0^1 x(1-x)^{\frac{3}{2}} dx &= B\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(5)} = \frac{3\pi}{128} \Rightarrow \int_0^1 |f'(x)|^3 dx \geq \left(\frac{128}{3\pi}\right)^2 \end{aligned}$$

□

例题 6.4.5 设 $f(0) = f(1) = 0, f(x) \in C^1[0, 1]$, 证明: $\int_0^1 f'^2(x) e^{2x} dx \geq (\pi^2 + 1) \int_0^1 f^2(x) e^{2x} dx$

证明. 待定系数配方有

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (e^x f'(x) - p(x) e^x f(x))^2 dx \\ &= \int_0^1 e^{2x} f'^2(x) dx + \int_0^1 p^2(x) e^{2x} f^2(x) dx - 2 \int_0^1 e^{2x} p(x) f(x) f'(x) dx \\ &= \int_0^1 e^{2x} f'^2(x) dx + \int_0^1 p^2(x) e^{2x} f^2(x) dx - \int_0^1 e^{2x} p(x) df^2(x) \\ &= \int_0^1 e^{2x} f'^2(x) dx + \int_0^1 e^{2x} f^2(x) (p'(x) + p^2(x) - 2p(x)) dx \end{aligned}$$

希望 $p'(x) + p^2(x) - 2p(x) = -(\pi^2 + 1)$, 令 $q(x) = p(x) + 1$ 则等价于 $q'(x) + q^2(x) = -\pi^2$
积分 (均为形式计算, 不管定义域之类的) 有

$$\int \frac{q'(x)}{q^2(x) + \pi^2} dx = -x + C \Rightarrow \frac{1}{\pi} \arctan \frac{q(x)}{\pi} = -x + C, q(x) = -\pi \tan \pi(x - C)$$

注意, 我们要保证配方式子里面的积分都是收敛的, 但是显然 $\tan x$ 在一些点处会发散 (并且对应的积分也发散), 现在区间长度是 1, $\tan \pi x$ 的周期也是 1, 因此必定会出现这样的发散点, 为了保证积分收敛, 只能让这样的点位于端点 0, 1, 这时可以用 $f(x)$ 的零点来抵消掉, 因此唯一的取法是 $C = \frac{1}{2}$

综上, 考虑

$$\begin{aligned} & \int_0^1 e^{2x} \left(f'(x) + \left(\pi \tan \pi \left(x - \frac{1}{2} \right) + 1 \right) f(x) \right)^2 dx \\ &= \int_0^1 f'^2(x) e^{2x} dx - (\pi^2 + 1) \int_0^1 f^2(x) e^{2x} dx \geq 0 \end{aligned}$$

即可

□

6.5 综合问题

例题 6.5.1 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 中连续, 恒正, 且对任意 $t \in \mathbb{R}$ 都有 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x) dx \leq 1$, 证明: 对任意 $a < b$ 都有 $\int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{2} + 1$.

证明. 分析一下: 容易看出, 在 $a < b$ 确定之后, 最实惠的取法肯定是让 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 之外恒为零, 然后让 t 在 $[a, b]$ 内取, 但是进一步的 t 应该取到什么位置并不好说, 大致想法应该是让 t 取在 $f(x)$ 较大的地方, 最好

首先设想一个问题, 假如给定连续, 恒正的函数 $p(x)$, 并且 $\int_0^1 p(x) f(x) dx \leq 1$, 现在问 $\int_0^1 f(x) dx$ 最大是多少, 画图容易发现, 让 $f(x)$ 在 $p(x)$ 很小的时候取的尽可能大即可, 因此如果 $p(x)$ 最小值是 A , 那么 $\int_0^1 f(x) dx$ 最大是 $\frac{1}{A}$

所以现在应取一些 $e^{-|x-t_i|}$ 然后做个线性组合, 使得 $\sum_{i=1}^n \lambda_i e^{-|x-t_i|}$ 的最小值尽可能大, 这里系数非负且和为 1

自然的一种取法是各个 $\lambda_i = \frac{1}{n}$ 然后让 $n \rightarrow \infty$, 此时求和趋近于积分, 也就是说在条件两边对 t 积分

下面开始证明:

根据条件有 $\int_a^b e^{-|t-x|} f(x) dx \leq 1, \forall t \in [a, b]$, 两边对 $t \in [a, b]$ 积分得到

$$\int_a^b \int_a^b e^{-|t-x|} f(x) dx dt = \int_a^b f(x) \left(\int_a^b e^{-|t-x|} dt \right) dx = \int_a^b f(x) (2 - e^{a-x} - e^{x-b}) dx \leq b-a$$

利用条件得到

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2} \int_a^b e^{-|x-a|} f(x) dx + \frac{1}{2} \int_a^b e^{-|x-b|} f(x) dx \leq \frac{b-a}{2} + 1$$

□

例题 6.5.2 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续可微且不恒等于 0, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$, 证明:

$$\int_0^1 |f(x)|dx \cdot \int_0^1 |f'(x)|dx > 2 \int_0^1 f^2(x)dx.$$

证明. 方法一: 设 $f(x)$ 最大值 $f(x_1) = M$, 最小值 $f(x_2) = -m$, 则 $M, m > 0$ (否则会导致 $f(x)$ 恒为零), 于是

$$\int_0^1 |f'(x)|dx \geq \left| \int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx \right| \geq \left| \int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx \right| = M + m$$

进一步设

$$I = \{x \in [0, 1] | f(x) > 0\}, J = \{x \in [0, 1] | f(x) < 0\}$$

于是

$$\int_I f(x)dx = A > 0, \int_J f(x)dx = -A, \int_0^1 |f(x)|dx = 2A$$

代入, 只需要证明 $A(M + m) > \int_0^1 f^2(x)dx$, 直接放缩有

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^2(x)dx &= \int_I |f(x)|^2dx + \int_J |f(x)|^2dx \\ &\leq M \int_I |f(x)|dx + m \int_J |f(x)|dx = A(M + m) \end{aligned}$$

显然不能取等, 否则 $f(x)$ 的取值只有 $M, -m, 0$ 这三个数字, 是不可能的

方法二: 利用条件和绝对值不等式有

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 f^2(x)dx &= \int_0^1 f(x)(2f(x) - f(0) - f(1))dx = \int_0^1 f(x) \left(\int_0^x f'(t)dt - \int_x^1 f'(t)dt \right)dx \\ &\leq \int_0^1 |f(x)| \left(\left| \int_0^x f'(t)dt \right| + \left| \int_x^1 f'(t)dt \right| \right)dx \leq \int_0^1 |f(x)| \left(\int_0^1 |f'(t)|dt \right)dx = \int_0^1 |f(x)|dx \int_0^1 |f'(x)|dx \end{aligned}$$

从放缩看显然不能取等, 结论得证

□

注释 6.5.1: 方法一在黎曼积分框架下不严谨, 因为不允许出现在集合上面的积分, 视为勒贝格(数学系内容)就是严格的, 因此这个方法虽然直观, 但是考试有可能扣分, 方法二没有任何问题, 不过或许不容易想到

例 6.5.3 设 $f(x) \in C^1[0, 1]$, θ 是方程 $\tan \frac{x}{2} = \frac{x^2 + 1}{x}$ 的最小正根, 证明:

$$\int_0^1 f'^2(x) dx + (\theta^2 + 1)(f^2(0) + f^2(1)) \geq \theta^2 \int_0^1 f^2(x) dx$$

证明. 待定系数, 考虑

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f'(x) - p(x)f(x))^2 dx &= \int_0^1 f'^2(x) dx + \int_0^1 p^2(x)f^2(x) dx - 2 \int_0^1 p(x)f(x)f'(x) dx \\ &= \int_0^1 f'^2(x) dx + \int_0^1 p^2(x)f^2(x) dx - \int_0^1 p(x)df^2(x) \\ &= \int_0^1 f'^2(x) dx + \int_0^1 f^2(x)(p'(x) + p^2(x)) dx - p(1)f^2(1) + p(0)f^2(0) \geq 0 \end{aligned}$$

所以需要

$$p'(x) + p^2(x) = -\theta^2, p(1) = \theta^2 + 1, p(0) = -(\theta^2 + 1)$$

这个微分方程超了一个条件, 所以不一定有解, 因此有解 (题目能做出来), 肯定是这个数字给的特殊, 刚刚好某个解可以满足全部条件

解微分方程有

$$\begin{aligned} \frac{p'(x)}{p^2(x) + \theta^2} &= -1 \Rightarrow \int_0^x \frac{p'(t)}{p^2(t) + \theta^2} dt = -x = \int_{p(0)}^{p(x)} \frac{1}{u^2 + \theta^2} du = \frac{1}{\theta} \arctan \frac{u}{\theta} \Big|_{p(0)}^{p(x)} \\ \Rightarrow \arctan \frac{p(x)}{\theta} &= \arctan \frac{p(0)}{\theta} - \theta x = \arctan \frac{\theta^2 + 1}{\theta} - \theta x = \frac{\theta}{2} - \theta x \\ \Rightarrow p(x) &= \theta \tan \left(\frac{\theta}{2} - \theta x \right) \end{aligned}$$

刚刚好这个解满足 $p(1) = -p(0)$, 因此满足要求, 同时数值计算容易看出这个 $p(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 中还是连续且可导的, 所以配方有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(f'(x) - \theta \tan \left(\frac{\theta}{2} - \theta x \right) f(x) \right)^2 dx \\ = \int_0^1 f'^2(x) dx - \theta^2 \int_0^1 f^2(x) dx + (\theta^2 + 1)(f^2(0) + f^2(1)) \geq 0 \end{aligned}$$

结论得证

□

例题 6.5.4 设 $f(x)$ 连续且以下各个广义积分都收敛, 证明:

$$\begin{aligned} & 4 \left(\int_0^\infty f^2(x) dx \int_0^\infty x^2 f^2(x) dx + \left(\int_0^\infty f(x) dx \right)^2 \int_0^\infty x f^2(x) dx \right) \\ & \geq \left(\int_0^\infty f(x) dx \right)^4 + 4 \left(\int_0^\infty x f^2(x) dx \right)^2 \end{aligned}$$

证明. 设

$$A = \int_0^\infty f^2(x) dx, B = \int_0^\infty x f^2(x) dx, C = \int_0^\infty x^2 f^2(x) dx, M = \left(\int_0^\infty f(x) dx \right)^2$$

不妨它们都是正数, 要证明的是

$$4(AC + MB) \geq M^2 + 4B^2 \Leftrightarrow (M - 2B)^2 \leq 4AC \Leftrightarrow \begin{cases} M \leq 2B + 2\sqrt{AC} \\ M \geq 2B - 2\sqrt{AC} \end{cases}$$

根据柯西不等式有

$$AC = \int_0^\infty f^2(x) dx \int_0^\infty x^2 f^2(x) dx \geq \left(\int_0^\infty x f^2(x) dx \right)^2 \Rightarrow M \geq 0 \geq 2B - 2\sqrt{AC}$$

所以只需要证明第一个不等式, 考虑待定系数柯西不等式, 则有

$$M = \left(\int_0^\infty f(x) dx \right)^2 = \left(\int_0^\infty f(x) g(x) \frac{1}{g(x)} dx \right)^2 \leq \int_0^\infty f^2(x) g^2(x) dx \int_0^\infty \frac{1}{g^2(x)} dx$$

对比条件可知 $g^2(x) = ux^2 + vx + w$ 这样的形式, 可以先固定其中一个变量, 对比目标, 既然是 $2B$, 不妨先确定 $v = 2$, 于是

$$M \leq \int_0^\infty \frac{1}{ux^2 + 2x + w} dx \int_0^\infty f^2(x) (ux^2 + 2x + w) dx = \int_0^\infty \frac{1}{ux^2 + 2x + w} dx (uC + 2B + wA)$$

由此可见取

$$u = \sqrt{\frac{A}{C}}, w = \sqrt{\frac{C}{A}}, g(x) = \sqrt{\frac{A}{C}}x^2 + 2x + \sqrt{\frac{C}{A}} = ux^2 + 2x + \frac{1}{u}$$

应该正好, 代入可知

$$M \leq \int_0^\infty \frac{1}{ux^2 + 2x + \frac{1}{u}} dx (2B + 2\sqrt{AC}) = (2B + 2\sqrt{AC}) \int_0^\infty \frac{u}{(ux + 1)^2} dx = 2B + 2\sqrt{AC}$$

结论得证

□

例题 6.5.5 设 $f(x) \in C^1[0, +\infty)$ 且以下各个广义积分都收敛, 证明:

$$\left(\int_0^\infty f^2(x) dx \right)^2 \leq 4 \int_0^\infty x^2 f^2(x) dx \int_0^\infty f'^2(x) dx$$

证明. 利用柯西不等式有

$$\begin{aligned} 4 \int_0^\infty x^2 f^2(x) dx \int_0^\infty f'^2(x) dx &\geq \left(2 \int_0^\infty x f(x) f'(x) dx \right)^2 = \left(\int_0^\infty x df^2(x) \right)^2 \\ &= \left(x f^2(x) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f^2(x) dx \right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x f^2(x) - \int_0^\infty f^2(x) dx \right)^2 \end{aligned}$$

由此可见, 问题的关键在于从各个积分收敛出发, 去证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f^2(x) = 0$

分部积分有 $\int_0^A f^2(x) dx = A f^2(A) - 2 \int_0^A x f(x) f'(x) dx$,

任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 任意 $u, v > N, u < v$ 都有 $\int_u^v x^2 f^2(x) dx < \varepsilon, \int_u^v f'^2(x) dx < \varepsilon$, 利用柯西不等式

$$\left(\int_u^v x f(x) f'(x) dx \right)^2 \leq \int_u^v x^2 f^2(x) dx \int_u^v f'^2(x) dx < \varepsilon^2$$

所以 $\int_0^\infty x f(x) f'(x) dx$ 收敛, 进而

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f^2(x) = \int_0^\infty f^2(x) dx + 2 \int_0^\infty x f(x) f'(x) dx$$

存在, 显然极限存在这个极限就只能是零, 结论得证 □

例题 6.5.6 设 $f(x) \in R[0, 1]$ 且 $\int_0^1 f^3(x) dx = 0$, 证明: $\int_0^1 f^4(x) dx \geq \frac{27}{4} \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^4$

注: 你可以尝试写出并证明一下本题的离散版本, 并寻找取等条件

证明. 取 $f(x)$ 为分段常值函数, 所以我们先来证明一下相应的离散版本:

引理 6.5.1: 设 n 为正整数, $a_1, \dots, a_n$ 为实数且 $\sum_{k=1}^n a_k^3 = 0$, 则有 $\sum_{k=1}^n a_k^4 \geq \frac{27}{4n^3} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^4$

根据齐次性, 不妨设 $\sum_{k=1}^n a_k = n$ (如果和为零则显然成立, 无需证明), 要证明 $\sum_{k=1}^n a_k^4 \geq \frac{27}{4} n$

考虑形如 $x^4 \geq ax^3 + bx + c$ 这样子的恒成立的不等式, 如果找到了, 则可以代入 $x = a_k$ 然后求和完成证明, 而这个不等式要想恒成立, 肯定是“切线”关系, 也就是说作差因式分解之后肯定有平方项, 则本质上只有两种

$$(x^2 - ax - b)^2, (x - a)^2(x^2 + bx + c), (b^2 - 4ac < 0)$$

试一下第一个, 要求展开后没有二次项, 所以 $a^2 = 2b$ 进而

$$\left(x^2 - ax - \frac{a^2}{2}\right)^2 = x^4 - 2ax^3 + a^3x + \frac{a^4}{4} \geq 0 \Rightarrow x^4 \geq 2ax^3 - a^3x - \frac{a^4}{4}, \forall a, x$$

代入 $x = a_k$ 求和得到 $\sum_{k=1}^n a_k^4 \geq -a^3n - \frac{a^4}{4}n = n\left(-a^3 - \frac{a^4}{4}\right)$, 希望让 $-a^3 - \frac{a^4}{4}$ 尽可能大, 利用均值不等式

或者求导容易知道, 其最大值刚刚好就是 $\frac{27}{4}$, 在 $a = -3$ 时候取到, 也就是说

$$x^4 \geq -6x^3 + 27x - \frac{81}{4} \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k^4 \geq \frac{27}{4}n$$

回到原题, 不妨设 $\int_0^1 f(x) dx = 1$ (若积分为零则显然成立, 而如果非零, 则齐次性可以不妨设为 1), 要证明 $\int_0^1 f^4(x) dx \geq \frac{27}{4}$, 根据前面的过程, 则有不等式 $f^4(x) \geq -6f^3(x) + 27f(x) - \frac{81}{4}$, 两边积分即可知结论成立 $\square$

注释 6.5.2: 这里对上课讲的方法做了个优化, 实际上本题不需要先证明离散然后用定积分定义和极限过渡到连续, 只需要注意到高考不等式 $x^4 \geq -6x^3 + 27x - \frac{81}{4}$ 然后代入并积分就可以了

本题离散版和连续版的证明核心都是一样的, 就是齐次性不妨设之后直接用高考不等式放缩一下, 两个命题可以一下子同时证出来, 运用这个放缩, 直接做原题一行就能秒掉

连续版本可以取等 (离散版由于 n 已经确定所以无法严格取等, 只能近似按比例分配, 不过系数依旧是最佳),

只需考虑配方对应的 $x^2 + 3x - \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}, \frac{-3(\sqrt{3}+1)}{2}$, 然后按比例分配一下, 计算

$$a \left(\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2} \right)^3 + (1-a) \left(\frac{-3(\sqrt{3}+1)}{2} \right)^3 = 0 \Rightarrow a = \frac{(1+\sqrt{3})^3}{12\sqrt{3}} = 0.981\dots$$

所以构造 $f(x) = \begin{cases} \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}, & x \in \left[0, \frac{(1+\sqrt{3})^3}{12\sqrt{3}}\right] \\ \frac{-3(\sqrt{3}+1)}{2}, & x \in \left(\frac{(1+\sqrt{3})^3}{12\sqrt{3}}, 1\right] \end{cases}$, 易知满足 $\int_0^1 f(x) dx = 1$, 即为取等条件

例题 6.5.7 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 内连续, 在 $(0, 2)$ 内可导, 且 $\int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)dx$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 2)$ 使得 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$.

证明. 要证明的是 $xf(x)$ 导数在 $(0, 2)$ 内有零点, 反证法, 则函数 $(xf(x))'$ 在 $[0, 2]$ 内无零点, 所以 $xf(x)$ 一定严格单调

设 $g(x) = xf(x)$, $g(0) = 0$, 不妨 $g'(x) > 0$ 恒成立, 则 $g(x)$ 严格递增, 直接证明 $2 \int_0^1 g(x)dx < \int_0^2 \frac{g(x)}{x}dx$ 这等价于说明

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g(x) \left(2 - \frac{1}{x}\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 g(x) \left(2 - \frac{1}{x}\right) dx < \int_1^2 \frac{g(x)}{x} dx$$

利用单调性有

$$\begin{aligned} 2 - \frac{1}{x} \leq 0, x \leq \frac{1}{2} &\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} g(x) \left(2 - \frac{1}{x}\right) dx \leq 0 \\ \int_{\frac{1}{2}}^1 g(x) \left(2 - \frac{1}{x}\right) dx &\leq g(1) \int_{\frac{1}{2}}^1 2 - \frac{1}{x} dx = g(1)(1 - \ln 2) \\ \int_1^2 \frac{g(x)}{x} dx &\geq g(1) \int_1^2 \frac{1}{x} dx = g(1) \ln 2 \end{aligned}$$

严格单调保证了 $g(1) > g(0) = 0$, 因为 $2 \ln 2 > 1$ 所以不等式成立, 由此结论得证

□

6.6 练习题

习题 6.6.1 设 $f(x) \in C^2[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$, $|f''(x)| \leq 1$, 证明: $\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{1}{12}$

习题 6.6.2 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 中可导, 给定 $a \in (0, 1)$, $M > 0$, 且 $|f'(x)| \leq M$, $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$, 证明:
 $\left| \int_{-1}^1 f(x) dx \right| < M(1-a)$

习题 6.6.3 设 $f(x) \in C^2[0, 1]$, $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = f(1) = 1$, 证明: $\int_0^1 f''^2(x) dx \geq 12$.

习题 6.6.4 设 $f(x) \in C^2[0, 1]$, $f(0) = f(1)$, $f'(0) = f'(1)$, $f(x) > 0$, 证明: $\int_0^1 \frac{f'^4(x)}{f^2(x)} dx \leq 9 \int_0^1 f'^2(x) dx$

习题 6.6.5 设 $f(x)$ 为连续函数, m 是正整数, 求最大的常数 λ 使得 $\int_0^1 f^2(x) dx \geq \lambda \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 x^m f(x) dx$ 恒成立. (注: 你可以尝试写出并证明一下本题的离散版本)

习题 6.6.6 设 $f(0) = 0$, $f(x) \in C^1[0, 1]$, 证明: $\int_0^1 f'^2(x) dx \geq \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 f^2(x) dx$

习题 6.6.7 设 $b-a \geq 2$, 恒正的连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_a^b \frac{1}{1+f(x)} dx = 1$, 证明: $\int_a^b \frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)} dx \leq 1$.

习题 6.6.8 设 $f(x) \in R[0, 1]$ 满足 $\int_0^1 xf(x) dx = 0$, $|f(x)| \leq M$, 证明: $\int_0^1 f(x) dx$ 的最大值是 $M(\sqrt{2}-1)$.

习题 6.6.9 设 $f(x) \in C^2[0, 1]$, 证明: $\int_0^1 |f'(x)| dx \leq 4 \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |f''(x)| dx$.

习题 6.6.10 设 $f(x), g(x)$ 是恒正的连续函数, 证明:

$$\int_0^1 f(x) + g(x) dx \int_0^1 \frac{f(x)g(x)}{f(x)+g(x)} dx \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(x) dx$$

注: 你可以尝试写出并证明一下本题的离散版本

第七章 微分方程问题

微分方程问题包括解微分方程以及微分方程相关的证明题两类，其中解微分方程部分需要掌握课本上面各种基本常规类型的微分方程及其解法，教材任选一本即可，然后再知乎上搜索微分方程相关的总结补充一下即可。

解微分方程在考试时候，如果是解答题，往往不是直接套用某个模板一步出来的，一般都有综合性，需要多种方法一起使用。

非数的解微分方程只要求出通解以及（如果有）显然的特解，无需深入讨论定义域或者分段函数等等复杂情况，这些只会在数学类的常微分方程题目中考察，因此非数解微分方程本质上是“形式求解”

对于微分方程证明题，大多是可以先求解然后再证明的，少数是无法求解只能走性态分析解决的（这类问题不放在本章），因此解微分方程是基本功，各种地方都会用到，包括之前的中值定理部分也需要用！

基础知识可以去看任何一本教材，我们课上会用例题将各种基本方法过一遍。

7.1 各类标准类型的微分方程

缺项高阶微分方程指式子中少 x 的, 比如 $y'' = f(y, y')$ 这种, 令 $p = y', y'' = p \frac{dp}{dy}$ 即可降低一阶

例题 7.1.1 解微分方程 $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y, y > 0, y(0) = y'(0) = e$. (不含 x 的微分方程)

证明. 令 $p = y', y'' = p \frac{dp}{dy}$, 记 $p' = \frac{dp}{dy}$, 变成关于 y 的, 则有

$$\begin{aligned} ypp' - p^2 &= y^2 \ln y, \frac{y}{2} (p^2)' - p^2 = y^2 \ln y, q = p^2 \\ \Rightarrow yq' - 2q &= 2y^2 \ln y, \left(\frac{q}{y^2}\right)' = \frac{yq' - 2q}{y^3} = \frac{2y}{\ln y} \Rightarrow \frac{q}{y^2} = \ln^2 y + C \\ \Rightarrow q = p^2 &= y^2 (\ln^2 y + C) = y'^2 \end{aligned}$$

代入 $x = 0$ 根据初值得到 $C = 0$, 所以 $y' = \pm y \ln y$, 根据初值知道 $y' = y \ln y$, 积分得到 $x = \ln \ln y$

□

恰当方程就是格林公式 $Q_x = P_y$, 此时能够找到 $U(x, y)$ 使得 $dU = Pdx + Qdy$, 不过需要凑一下恰当方程

例题 7.1.2 解微分方程 $(x^3 - y^2)dx + (x^2y + xy)dy = 0$. (配凑与恰当方程)

证明.

$$\begin{aligned} x^3 - y^2 + (x^2 + x)yy' &= 0, x^3 - y^2 + \frac{x^2 + x}{2} (y^2)' = 0 \\ u = y^2 \Rightarrow u' - \frac{2}{x(x+1)}u + \frac{2x^2}{x+1} &= 0 \\ \left(e^{-\int \frac{2}{x(x+1)}dx}u\right)' &= e^{-\int \frac{2}{x(x+1)}dx} \left(u' - \frac{2}{x(x+1)}u\right) = -e^{-\int \frac{2}{x(x+1)}dx} \frac{2x^2}{x+1} \\ \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 u\right)' &= -\frac{2x^2}{x+1} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 = -2(x+1), \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 u = -(x+1)^2 + C \\ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 y^2 + (x+1)^2 &= C \end{aligned}$$

□

注释 7.1.1: 不推荐寻找积分因子或者配凑, 因为很可能做不出来, 如果一定要这么做, 可以如下变形:

$$xdx + ydy + y \frac{xdy - ydx}{y^2} = \frac{1}{2}d(x^2 + y^2) + yd\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

然后还得接着凑一凑, 详细的可以去看标答

如果要寻找一个积分因子, 可以待定系数算, 最后积分因子是 $\frac{x+1}{x^3}$

常数线性微分方程指 $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$, 利用特征方程, 再找特解即可

例题 7.1.3 解微分方程 $\begin{cases} y''' - 3y'' + 2y' = x + e^x \\ y(0) = 1, y'(0) = -2, y''(0) = -3 \end{cases}$. (常数线性微分方程)

证明. 对第一个式子积分一次得到 $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2}x^2 + e^x + C$, 代入初值得到 $C = 4$, 于是等价于

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2}x^2 + e^x + 4 \\ y(0) = 1, y'(0) = -2 \end{cases}$$

方程的通解是 $C_1 e^x + C_2 e^{2x}$, 下面寻找特解, 拆成两个微分方程:

$$(1): y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2}x^2 + 4, (2): y'' - 3y' + 2y = e^x$$

前者设 y 为二次函数, 待定系数代入计算, 可以解出来 $y = \frac{23 + 6x + 2x^2}{8}$

后者设 $y = e^x p(x)$, 其中 $p(x)$ 是一次函数, 待定系数代入计算, 可以求出 $y = -xe^x$

因此, 微分方程的解形如 $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{23 + 6x + 2x^2}{8} - xe^x$, 代入初值条件可得

$$y = \frac{1}{8} (23 - 16e^x + e^{2x} + 6x - 8e^x x + 2x^2)$$

□

欧拉方程指 $x^n y^{(n)} + \dots + xy' + y = f(x)$ 类型, 令 $x = e^t$ 可以变成高阶线性常系数微分方程

例题 7.1.4 解微分方程 $x^2 y'' - 4xy' + 6y = \ln x$. (欧拉方程)

证明. 令 $x = e^t$, 则

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = y' e^t = xy' \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = \frac{d(xy')}{dx} \frac{dx}{dt} = e^t (y' + xy'') = xy' + x^2 y'' \\ \Rightarrow xy' &= \frac{dy}{dt}, x^2 y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

代入得到 $\frac{d^2 y}{dt^2} - 5 \frac{dy}{dt} + 6y = t$, 特征根为 2, 3, 待定系数计算非齐次特解, 可知

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + \frac{1}{6}t + \frac{5}{36} = c_1 x^2 + c_2 x^3 + \frac{1}{6} \ln x + \frac{5}{36}$$

□

齐次方程指形如 $y' = f(\frac{y}{x})$, 令 $y = xu$ 即可

例题 7.1.5 解微分方程 $xy' = -2\sqrt{xy} + y$. (齐次方程)

证明.

$$y' = -2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, y = xu \Rightarrow xu' = -2\sqrt{u} \Rightarrow (-\sqrt{u})' = \frac{1}{x}, \sqrt{\frac{y}{x}} + \ln x = C$$

□

伯努利方程指 $y' + p(x)y = q(x)y^a$, 此时令 $u = y^{1-a}$ 即可变成一阶线性微分方程

例题 7.1.6 解微分方程 $2yy' = y^2 + \sin x$. (伯努利方程)

证明. $(y^2)' = y^2 + \sin x, u = y^2, u' - u = \sin x$ 解出

$$y^2 = ce^x - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$$

也可以把 y 除过去变成标准的伯努利方程的形式, 做法一样

□

二阶变系数线性微分方程没有通解公式, 必须要猜解, 然后考虑 $(yy'_0 - y'y_0)'$, 这里 y_0 是特解

例题 7.1.7 解微分方程 $y'' - 2xy' - 2y = 0$. (二阶变系数)

证明. 注意 e^{x^2} 是一个特解 (如果注意不到, 对于这种线性的系数还是多项式的, 可以幂级数方法试一下, 只需要代入算系数), 所以考虑

$$\begin{aligned} (y \cdot 2xe^{x^2} - y'e^{x^2})' &= 2x(y \cdot 2xe^{x^2} - y'e^{x^2}) \Rightarrow \ln(y \cdot 2xe^{x^2} - y'e^{x^2}) = x^2 + C \\ y \cdot 2xe^{x^2} - y'e^{x^2} &= Ce^{x^2}, 2xy - y' = C \Rightarrow (e^{-x^2}y)' = e^{-x^2}(y' - 2xy) = Ce^{-x^2} \\ e^{-x^2}y &= C_1 \int e^{-x^2} dx + C_2, y = C_1 e^{-x^2} \int e^{-x^2} dx + C_2 e^{-x^2} \end{aligned}$$

□

一阶线性微分方程组一般可以用矩阵特征值来做, 特殊时候可以配凑或者消元升阶

例题 7.1.8 解微分方程组 $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) - 3 \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t) + 1 \end{cases}, x(0) = y(0) = 0.$ (线性方程组)

证明. 方法一:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

计算特征值为 $2 \pm i$, 计算对角化得到

$$\begin{aligned} A &= P \begin{pmatrix} 2+i & \\ & 2-i \end{pmatrix} P^{-1}, P = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} 2+i & \\ & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + P^{-1} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i & \\ & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-7i \\ 1+7i \end{pmatrix} \\ u' &= (2+i)u + \frac{1-7i}{4}, v' = (2-i)v + \frac{1+7i}{4} \Rightarrow (e^{-(2+i)t}u)' = e^{-(2+i)t} \frac{1-7i}{4} \\ e^{-(2+i)t}u &= -e^{-(2+i)t} \frac{1-7i}{4(2+i)} + C, u = -\frac{1-7i}{4(2+i)} + Ce^{(2+i)t} = \frac{1}{4} + \frac{3i}{4} + Ce^{(2+i)t} \\ \Rightarrow u &= \frac{1}{4} + \frac{3i}{4} + C_1 e^{(2+i)t}, v = \frac{1}{4} - \frac{3i}{4} + C_2 e^{(2-i)t} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3i}{4} \\ \frac{1}{4} - \frac{3i}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 e^{(2+i)t} \\ C_2 e^{(2-i)t} \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1(1-i)e^{(2+i)t} + C_2(1+i)e^{(2-i)t} \\ 2C_1 e^{(2+i)t} + 2C_2 e^{(2-i)t} \end{pmatrix} \\ x(0) &= 2 + C_1(1-i) + C_2(1+i) = 0, y(0) = 1 + 2C_1 + 2C_2 = 0 \\ \Rightarrow C_1 &= -\frac{1}{4} - \frac{3i}{4}, C_2 = -\frac{1}{4} + \frac{3i}{4} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = 2 + e^{2t}(-2\cos t + \sin t) \\ y(t) = 1 - e^{2t}(\cos t - 3\sin t) \end{cases} \end{aligned}$$

方法二:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

计算特征多项式有 $|xI - A| = x^2 - 4x + 5$, 所以

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' &= A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + A\alpha, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' - 4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' + 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (A - 4I)\alpha \\ \Rightarrow x'' - 4x' + 5x &= 10, y'' - 4y' + 5y = 5, x(0) = y(0) = 0 \\ \Rightarrow x(t) &= e^{2t}(a_1 \cos t + a_2 \sin t) + 2, y(t) = e^{2t}(b_1 \cos t + b_2 \sin t) + 1 \\ x(0) &= a_1 + 2 = 0, y(0) = b_1 + 1 = 0 \Rightarrow a_1 = -2, b_1 = -1 \\ x(t) &= e^{2t}(-2 \cos t + a_2 \sin t) + 2, y(t) = e^{2t}(-\cos t + b_2 \sin t) + 1 \end{aligned}$$

再把这个结果代入到题中方程里面, 求导计算 (或者去算 $x'(0), y'(0)$), 可以解出来 a_2, b_2 , 最终

$$x(t) = 2 + e^{2t}(-2 \cos t + \sin t), y(t) = 1 - e^{2t}(\cos t - 3 \sin t)$$

□

线性分式类型微分方程指 $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$, 做线性换元化简即可

例题 7.1.9 解微分方程 $y' = \frac{x+y+4}{x-y-6}, y(2) = -5$. (线性分式)

证明. 换元 $x = x_1 + a, y = y_1 + b$, 代入解方程可知 $a = 1, b = -5$, 因此令 $x = x_1 + 1, y = y_1 - 5$, 便有

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}, u = \frac{y_1}{x_1}, u'x_1 + u = \frac{1+u}{1-u}, x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u}{1-u} - u = \frac{1+u^2}{1-u} \\ \frac{1}{x_1} dx_1 &= \frac{1-u}{1+u^2} du, \ln x_1 + C = \arctan u - \frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) = \arctan \frac{y_1}{x_1} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{y_1^2}{x_1^2} + 1\right) \end{aligned}$$

代入即可

□

有些方程, 将 x 看作是 y 的函数求解会简单很多

例题 7.1.10 解微分方程 $y' = \frac{y}{x+y^3}$. (反函数方法)

证明.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y^3}, \frac{dx}{dy} = \frac{x+y^3}{y} = \frac{1}{y}x + y^2 = x' \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{x'y - x}{y^2} = y, x = y\left(\frac{1}{2}y^2 + C\right)$$

□

缺少 x 或者 y 的一阶微分方程 $F(y, y') = 0$ 或者 $F(x, y') = 0$, 令 $p = y'$ 考虑 $F(x, p) = 0$ 的参数方程即可

例题 7.1.11 解微分方程 $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$. (缺少 y 的微分方程)

证明.

$$p = y' \Rightarrow x^3 + p^3 - 3xp = 0, p = tx \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3t}{t^3 + 1} \\ y' = \frac{3t^2}{t^3 + 1} = \frac{dy}{dx} \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{3t^2}{t^3 + 1} \cdot \frac{3(t^3 + 1) - 9t^3}{(t^3 + 1)^2} = \frac{9(1 - 2t^3)t^2}{(t^3 + 1)^3}$$

$$y = \int \frac{9(1 - 2t^3)t^2}{(t^3 + 1)^3} dt = \frac{3(1 + 4t^3)}{2(t^3 + 1)^2} + C, x = \frac{3t}{t^3 + 1}$$

最后的解以这种参数方程形式给出

□

可以解出 x 或者 y 的一阶微分方程 $x = F(y, y')$ 或者 $y = F(x, y')$, 令 $p = y'$ 然后对 x 求导即可

例题 7.1.12 解微分方程 $y'^3 + 2xy' - y = 0$. (可以解出 x, y 的微分方程)

证明.

$$p = y', y'' = \frac{dp}{dx} = p'$$

$$y = y'^3 + 2xy', y' = 3y'^2 y'' + 2y' + 2xy'', p = 3p^2 \frac{dp}{dx} + 2p + 2x \frac{dp}{dx}$$

$$3p^2 p' + p + 2xp' = 0, (3p^2 + 2x) dp + p dx = 0$$

$$p \frac{dx}{dp} + 3p^2 + 2x = x'p + 2x + 3p^2 = 0, x' = \frac{dx}{dp}$$

$$(p^2 x)' = 2px + p^2 x' = -3p^3, p^2 x = -\frac{3}{4}p^4 + C$$

$$x = \frac{C - \frac{3}{4}p^4}{p^2}, y = p^3 + 2xp = p^3 + \frac{2C - \frac{3}{2}p^4}{p} = \frac{2C - \frac{1}{2}p^4}{p}$$

最后的解以这种参数方程形式给出

□

7.2 综合问题

例题 7.2.1 解微分方程 $y' = \frac{\cos y}{\cos y \sin(2y) - x \sin y}$.

证明. 本题交换 x, y 会很好做

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\cos y}{\cos y \sin(2y) - x \sin y} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \sin 2y - x \tan y = x' \\ \left(\frac{x}{\cos y} \right)' &= \frac{x' \cos y + x \sin y}{\cos^2 y} = \frac{\sin 2y}{\cos y} = 2 \sin y \\ \Rightarrow \frac{x}{\cos y} &= -2 \cos y + C \end{aligned}$$

□

例题 7.2.2 解微分方程 $y'(1+x^3y) + 1 + xy^3 = 0$.

证明. 方法一:

$$\begin{aligned} (1+x^3y)dy + (1+xy^3)dx &= 0, dx + dy + xy(x^2dy + y^2dx) = 0 \\ x^2dy + y^2dx &= x(x+y)dy + y(x+y)dx - xy(dx+dy) \\ &= (x+y)(xdy+ydx) - xyd(x+y) = (x+y)d(xy) - xyd(x+y) \\ &\Rightarrow d(x+y) + (x+y)d(xy) - xyd(x+y) = 0 \\ u = x+y, v = xy &\Rightarrow \frac{du}{dv} = \frac{uv}{v^2-1} = u', \frac{u'}{u} = \frac{v}{v^2-1} \Rightarrow u = C\sqrt{v^2-1} \\ (x+y)^2 &= C(x^2y^2-1) \end{aligned}$$

方法二: 直接换元 $u = x+y, v = xy$, 则求导有

$$\frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{1+y'}{y+xy'} = \frac{1-\frac{1+xy^3}{1+x^3y}}{y-x\frac{1+xy^3}{1+x^3y}} = \frac{xy(x^2-y^2)}{y-x+x^2y^2(x-y)} = \frac{xy(x+y)}{x^2y^2-1} = \frac{uv}{v^2-1}$$

之后分离变量, 积分即可 (同上)

□

例题 7.2.3 解微分方程 $y(xy'' + y') = y'^2(x - x^2)$.

证明. 注意 $(xy')' = y' + xy''$, 所以 $y(xy')' = y'^2x - y'^2x^2 = y' \cdot (xy') - (xy')^2$

这样结构就清晰了, 于是 $\left(\frac{y}{xy'}\right)' = \frac{y' \cdot (xy') - y(xy')'}{(xy')^2} = 1$

所以

$$\begin{aligned}\frac{y}{xy'} &= x + C \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x(x+C)} = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+C} \right) \\ (\ln y)' &= \frac{1}{C} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+C} \right) \\ \ln y &= \frac{1}{C_1} (\ln x - \ln(x+C_1)) + C_2\end{aligned}$$

因此最后答案是 $y = e^{C_1} \left(\frac{x}{x+C_2} \right)^{\frac{1}{C_2}}$

□

例题 7.2.4 解微分方程 $2x^4yy' + y^4 = 4x^6$.

证明. 令 $u = y^2$, 则问题化为 $x^4u' + u^2 = 4x^6$, 这是 Riccati 方程

注意 $u = x^3$ 是一个解, 令 $v = u - x^3$, 则

$$\begin{aligned}v' &= u - 3x^2 = x^2 - \frac{u^2}{x^4} = x^2 - \frac{(v+x^3)^2}{x^4} = -\frac{2}{x}v - \frac{1}{x^4}v^2 \\ \left(\frac{1}{v}\right)' &= -\frac{v'}{v^2} = \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x} \left(\frac{1}{v}\right), w = \frac{1}{v}, w' = \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x}w \\ \left(\frac{w}{x^2}\right)' &= \frac{w'x - 2w}{x^3} = \frac{1}{x^6}, \frac{w}{x^2} = -\frac{1}{5x^5} + C, w = -\frac{1}{5x^3} + Cx^2 = \frac{1}{v} = \frac{1}{u-x^3} \\ u - x^3 &= \frac{1}{-\frac{1}{5x^3} + Cx^2}, y^2 = x^3 + \frac{1}{Cx^2 - \frac{1}{5x^3}} = \frac{Cx^5 + \frac{4}{5}}{Cx^2 - \frac{1}{5x^3}} = \frac{Cx^5 + 4}{Cx^2 - \frac{1}{x^3}} = x^3 \frac{Cx^5 + 4}{Cx^5 - 1}\end{aligned}$$

□

注释 7.2.1: 形如 $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ 的微分方程称为 Riccati 方程, 必须要先猜一个解, 这个解记为 y_0 , 然后令 $u = y - y_0$, 代入计算后就会变成伯努利方程, 进而可以求出全部解来, 但是假如不猜一个特解, 则无法求解

例题 7.2.5 解微分方程 $y'' + 3yy' + y^3 = 1$

证明. 注意到这样的求导规律

$$\begin{aligned}\left(e^{f(x)}\right)' &= e^{f(x)} f'(x) \\ \left(e^{f(x)}\right)'' &= e^{f(x)} (f'^2(x) + f''(x)) \\ \left(e^{f(x)}\right)''' &= e^{f(x)} (f'^3(x) + 3f'(x)f''(x) + f'''(x))\end{aligned}$$

所以令 $g(x) = e^{\int y(x)dx}$, 则有

$$g'''(x) = e^{\int y(x)dx} (y^3 + 3yy' + y'') = e^{\int y(x)dx} = g(x)$$

考虑特征方程, 因此

$$\begin{aligned}g(x) &= C_1 e^x + e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right) \\ \int y(x) dx &= \ln \left(C_1 e^x + e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right) \right)\end{aligned}$$

求导即可得到答案

□

例题 7.2.6 解微分方程 $y^2(x + yy') + x^3(y - xy') = 0$.

证明.

$$\begin{aligned}y^2 \left(x + y \frac{dy}{dx} \right) + x^3 \left(y - x \frac{dy}{dx} \right) &= 0, (xdx + ydy) + x^3 \frac{ydx - xdy}{y^2} = 0 \\ \frac{1}{2}d(x^2 + y^2) + x^3 d\left(\frac{x}{y}\right) &= 0, u = x^2 + y^2, v = \frac{x}{y} \Rightarrow u = x^2 \left(1 + \frac{1}{v^2} \right) \\ du + 2x^3 dv &= du + 2 \left(\frac{u}{1 + \frac{1}{v^2}} \right)^{\frac{3}{2}} dv = 0, \frac{u'}{u^{\frac{3}{2}}} + 2 \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{v^2} \right)^{\frac{3}{2}}} = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{u}} &= \int \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{v^2} \right)^{\frac{3}{2}}} dv + C = \sqrt{v^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{v^2 + 1}} + C \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \sqrt{\frac{x^2}{y^2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{y^2} + 1}} + C\end{aligned}$$

□

注释 7.2.2:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{v^2} \right)^{\frac{3}{2}}} dv &\stackrel{v=\tan x}{=} \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} d(-\cos x) \stackrel{t=\cos x}{=} \int \frac{t^2 - 1}{t^2} dt \\ &= t + \frac{1}{t} = \cos x + \frac{1}{\cos x} = \sqrt{v^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{v^2 + 1}}, \left(\cos x = \frac{1}{\sqrt{v^2 + 1}} \right)\end{aligned}$$

例题 7.2.7 解微分方程 $y' + y'' = y'^2 + 2yy''$.

证明.

$$\begin{aligned} y''(2y-1) &= y'(1-y'), \frac{y''}{1-y'} = \frac{y'}{2y-1} \Rightarrow \ln(2y-1) + 2\ln(1-y') = C \\ (1-y')^2(2y-1) &= C, 1-y' = \pm \frac{C}{\sqrt{2y-1}}, \frac{y'}{1 \pm \frac{C}{\sqrt{2y-1}}} = 1 \end{aligned}$$

最后两边积分即可

□

注释 7.2.3: 本题形式求解即可, 表述不严谨, 实际计算时候应有初始值条件, 就可以明确算出来

例题 7.2.8 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 中可导且 $\int_1^{xy} f(t) dt = x \int_1^y f(t) dt + y \int_1^x f(t) dt, \forall x, y > 0, f(1) = 3$, 求 $f(x)$.

证明. 方法一: 设 $g(x) = \int_1^x f(t) dt$, 则 $g(xy) = xg(y) + yg(x), g(1) = 0, g'(1) = 3$

利用柯西方程结论知

$$\begin{aligned} g(xy) &= xg(y) + yg(x), g(1) = 0, g'(1) = 3 \\ \frac{g(xy)}{xy} &= \frac{g(x)}{x} + \frac{g(y)}{y}, h(x) = \frac{g(x)}{x}, h(xy) = h(x) + h(y) \\ u(x) &= h(e^x) \Rightarrow u(x+y) = h(e^{x+y}) = h(e^x) + h(e^y) = u(x) + u(y) \\ \Rightarrow u(x) &= kx = h(e^x), h(x) = k \ln x = \frac{g(x)}{x}, g(x) = kx \ln x \\ g'(1) &= 3 \Rightarrow k = 3, g(x) = 3x \ln x, f(x) = g'(x) = 3(\ln x + 1) \end{aligned}$$

方法二: 条件中对 y 求导有 $xf(xy) = xf(y) + \int_1^x f(t) dt$, 令 $y = 1$ 得到 $xf(x) = 3x + \int_1^x f(t) dt$, 根据初始条件, 解微分方程容易得到答案是 $f(x) = 3(\ln x + 1)$

□

例题 7.2.9 证明: 微分方程 $y'' + \sin y = 0$ 存在一个解 $y = f(x)$, 使得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pi$.

证明. 因为目标是找到一个解, 所以只需要形式计算, 不用考虑特殊情况或者一些比较怪异的解

$$y'' + \sin y = 0, y''y' + y' \sin y = 0, \frac{1}{2}y'^2 - \cos y = C$$

因为 $y(+\infty) = \pi$, 所以 $y'^2(+\infty) = 2(C - 1)$, 于是 $C = 1$, 进而

$$y'^2 = 2(\cos y + 1) = 4\cos^2 \frac{y}{2} \Rightarrow \left(\frac{y}{2}\right)' = \cos \frac{y}{2}$$

取一个解为

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{2}\right)' &= \cos \frac{y}{2}, u = \frac{y}{2}, \frac{u'}{\cos u} = 1, \int \frac{u'}{\cos u} dx = x + C_1 = \int \frac{1}{\cos u} du = \ln \frac{1 + \tan \frac{u}{2}}{1 - \tan \frac{u}{2}} \\ \Rightarrow \frac{1 + \tan \frac{u}{2}}{1 - \tan \frac{u}{2}} &= C_0 e^x, \tan \frac{u}{2} = \frac{C_0 e^x - 1}{C_0 e^x + 1}, u = 2 \arctan \frac{C_0 e^x - 1}{C_0 e^x + 1} = \frac{y}{2} \\ \Rightarrow y &= 4 \arctan \frac{C_0 e^x - 1}{C_0 e^x + 1} \end{aligned}$$

随便取一个 C_1 均可, 例如 $C_1 = 1$

□

例题 7.2.10 设 $a > 0, f(x) > 0$, 在 $(0, +\infty)$ 中解微分方程 $f'(\frac{a}{x}) = \frac{x}{f(x)}$.

证明. 根据条件 $f(x)f'(\frac{a}{x}) = x, f(\frac{a}{x})f'(x) = \frac{a}{x}$, 进而

$$\begin{aligned} \left(f(x)f\left(\frac{a}{x}\right)\right)' &= f'(x)f\left(\frac{a}{x}\right) - \frac{a}{x^2}f(x)f'\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{a}{x} - \frac{a}{x^2}x = 0 \\ f(x)f\left(\frac{a}{x}\right) &= C, f(x)f'\left(\frac{a}{x}\right) = x \Rightarrow \frac{f'\left(\frac{a}{x}\right)}{f\left(\frac{a}{x}\right)} = \frac{x}{C}, \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a}{xC} \\ \ln f(x) &= \frac{a}{C_1}(\ln x + C_2), f(x) = C_1 x^{\frac{a}{C_2}} = ux^v, u, v > 0 \end{aligned}$$

代入回去得到

$$\begin{aligned} f(x)f'\left(\frac{a}{x}\right) &= ux^v uv \left(\frac{a}{x}\right)^{v-1} = u^2 v a^{v-1} x = x \\ \Rightarrow u &= \frac{1}{\sqrt{va^{v-1}}}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{va^{v-1}}} x^v, v > 0 \end{aligned}$$

□

例题 7.2.11 设 a, b, c 为常数, 若微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 有特解 $y = e^{2x} + (1+x)e^x$, 求 a, b, c 和方程通解.

证明. 将 $y = e^{2x} + (1+x)e^x$ 代入原方程得

$$(4+2a+b)e^{2x} + (3+2a+b)e^x + (1+a+b)xe^x = ce^x, \text{ 则有}$$

$$\begin{cases} 4+2a+b=0, \\ 3+2a+b=c, \\ 1+a+b=0, \end{cases} \text{ 解得 } a=-3, b=2, c=-1,$$

原方程为 $y'' - 3y' + 2y = -e^x$.

原方程的特征方程为 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, 特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, 则 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$, 于是原方程的通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + e^{2x} + (1+x)e^x$ (C_1, C_2 为任意常数).

□

例题 7.2.12 已知 $f(x), g(x)$ 可导, $g(x) \neq 0 (x > 0), f(0) = 0, f'(0) = 1$, 且 $\begin{cases} f(x)g'(x) + f'(x)g(x) = 2x \\ f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = 4x^2 \end{cases}$, 求 $f(x)$ 的表达式

证明. 第一个条件表明 $(f(x)g(x))' = 2x$, 所以 $f(x)g(x) = x^2 + C$, 令 $x = 0$ 得到 $C = 0$, 于是 $f(x)g(x) = x^2$
两个方程相加, 相减可知 $f(x)g'(x) = x + 2x^2, f'(x)g(x) = x - 2x^2$, 所以

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} - 2, \ln f(x) = \ln x - 2x + C, f(x) = Cxe^{-2x}$$

结合 $f'(0) = 1$ 可知 $C = 1$, 故 $f(x) = xe^{-2x}$

□

例题 7.2.13 设 $f(x)$ 是周期 2π 的连续函数, 证明: 微分方程 $y'' + y = f(x)$ 有 2π 为周期的解当且仅当 $\int_0^{2\pi} f(x) \sin x dx = \int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx = 0$.

证明. 齐次方程的通解显然是 $c_1 \sin x + c_2 \cos x$

采用常数变易法计算特解, 考虑形如 $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$ 这样子的特解, 求导有

$$y' = -C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x + C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x$$

方便起见, 令 $C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0$, 于是

$$\begin{aligned} y'' &= -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x - C_1(x) \cos x - C_2(x) \sin x \\ &= -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x - y \end{aligned}$$

所以 $y'' + y = -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = f(x)$, 因此方程是

$$-C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = f(x), C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0$$

解出来 $C_1'(x) = -f(x) \sin x, C_2'(x) = f(x) \cos x$, 因此可以取

$$C_1(x) = -\int_0^x f(t) \sin t dt, C_2(x) = \int_0^x f(t) \cos t dt$$

代入得到原方程通解是

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \cos x + c_2 \sin x - \int_0^x f(t) \sin t dt \cos x + \int_0^x f(t) \cos t dt \sin x \\ &= c_1 \cos x + c_2 \sin x + \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt \end{aligned}$$

因此, $y(x)$ 是周期为 2π 的解, 等价于对任意 x 都有

$$\int_0^x f(t) \sin(x-t) dt = \int_0^{x+2\pi} f(t) \sin(x+2\pi-t) dt \Leftrightarrow \int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = 0$$

对这个式子换元拆分, 将区间变成 $[0, 2\pi]$ 慢慢计算, 即可解决 (过程见上课视频, 更好的方法见注释)

□

注释 7.2.4: 还有一个快些的方法: 对于微分方程 $y'' + ay' + by = f(x)$, 这里 a, b 都是常数, 如果 $y = p(x)$ 满足 $p(0) = 0, p'(0) = 1, p''(x) + ap'(x) + bp(x) = 0$ (满足该初值条件的齐次微分方程解), 则 $y'' + ay' + by = f(x)$ 的一个特解就是 $y_0(x) = \int_0^x p(x-t) f(t) dt$, 自行用含参积分求导公式不难验证这个解

对应到本题中, 显然 $y = \sin x$ 满足 $y(0) = 0, y'(0) = 1, y'' + y = 0$, 所以立即得到特解 $\int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$

设 $p(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt$, 则 (利用 $f(x)$ 的周期性)

$$p'(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t) \cos(x-t) dt, p''(x) = -\int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = -p(x)$$

因此有周期 2π 的解等价于 $p(x)$ 恒为零, 注意 $p''(x) = p(x)$, 所以这也等价于 $p(0) = p'(0) = 0$, 而 $p(0) = -\int_0^{2\pi} f(t) \sin t dt, p'(0) = \int_0^{2\pi} f(t) \cos t dt$, 由此可见结论成立

7.3 练习题

习题 7.3.1 设 $f''(x) \neq 0$, 解微分方程 $y = xy' + f(y')$.

习题 7.3.2 解微分方程 $(e^x + 3y^2)dx + 2xydy = 0$

习题 7.3.3 解微分方程 $x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 3x^2$.

习题 7.3.4 设 $f(x)$ 二阶可导且满足 $f(0) = 1, f'(x) = f(1-x)$, 求 $f(x)$.

习题 7.3.5 设 $x(t), y(t)$ 是实值函数, 解微分方程组 $x'' - y' + x = 0, y'' + x' + y = 0$.

习题 7.3.6 解微分方程 $y'(xy + x^3y^3) = 1$.

习题 7.3.7 解微分方程 $2yy' = e^{\frac{x^2+y^2}{x}} + \frac{x^2+y^2}{x} - 2x$.

习题 7.3.8 解微分方程 $(x^2 + y^2 + 3)y' = 2(2y - \frac{x^2}{y})$.

第八章 决赛线性代数

本节线性代数内容是针对非数决赛的（有一道线性代数大题），对于非数考研也适用，两次课讲完，教材可以去看工科线性代数书籍，也可以看谢起鸿的高等代数（删去明显不考的章节）。

本节不会涉及 Jordan 标准型，内积空间等等高等代数知识，只需要工科线性代数基础。非数线性代数需要掌握矩阵的基本性质与运算，简单的行列式计算方法，分块矩阵的应用，特征值与对角化，二次型和正定阵的简单性质。

分块矩阵是研究秩相关的问题的神器，也能用来解决一些行列式问题，往往分块矩阵会和相抵标准型一并出现。这部分的核心思想就是矩阵打洞：使用分块矩阵的初等变换来消去某个块，借助过程中秩与行列式都不变的性质从而达到目的，解决问题。

大部分非数的线性代数问题都是几步就能解决，主要围绕矩阵的秩，基本乘法运算，分块矩阵的运算，特征值和特征向量展开；而特征值往往伴随着相似对角化（不会出现无法对角化的矩阵，如果出现也不是必须要研究其标准型），因此当你没有思路时候，可以从上面这几个点入手尝试。

有些难题这些方法都做不出来，比如 13 届非数决赛的线性代数，后果就是全场没人会做，不必担心。

8.1 矩阵基本问题

例题 8.1.1 设 n 阶实方阵 A, B 满足 $AB - BA = A^T + B^T$, 求 $A + B$.

证明. 设 $X = A + B$, 将 $B = X - A$ 代入可得 $AX - XA = X^T$, 要证明 $X = 0$
利用迹的性质有

$$\operatorname{tr}(XAX - X^2A) = \operatorname{tr}(XX^T) = \operatorname{tr}(X^2A - X^2A) = 0, \operatorname{tr}(XX^T) = \sum_{i,j=1}^n x_{ij}^2 \geq 0$$

所以 $X = 0$

□

例题 8.1.2 设 A, B 为 n 阶可逆实方阵, 且 $A + B$ 可逆. 如果 $A^{-1} + B^{-1} = (A + B)^{-1}$, 证明: $|A| = |B|$.

证明. 唯一的入手方法也是正常想法就是把逆矩阵乘过来, 然后随机应变

$$(A^{-1} + B^{-1})(A + B) = I = 2I + A^{-1}B + B^{-1}A \Rightarrow A^{-1}B + B^{-1}A + I = 0$$

要证明的是 $|A^{-1}B| = 1$, 于是考虑统一一下, 设 $X = A^{-1}B$ 则条件是 $X^2 + X + I = 0$ 要证明 $|X| = 1$
注意 X 是实矩阵, 上式得到 $|X|^3 = 1$, 进而 $|X| = 1$

□

例题 8.1.3 设实数 a, b, c 两两不同且 $a + b + c > 0$, 三阶方阵 A 的每行每列都恰由 a, b, c 构成, 问这样的矩阵一共有多少个, 其中 $|A|$ 的最大值是多少.

证明. 先看 A 的第一行, 将 a, b, c 三个元素随便排列, 一共 6 种情况, 在第一行排好之后, 然后看 $(2, 1)$ 元, 它有两种选择

写出来容易看出, 确定了第一行以及 $(2, 1)$ 元之后, 剩下的位置元素就全部确定了, 因此 A 总共有 12 个

对任何一个矩阵 A , 我们可以交换列, 将第一行变成 a, b, c 这样子的顺序

现在看第一列, 它的 $(2, 1), (3, 1)$ 元一个是 b 一个是 c , 我们可以交换第 2, 3 行, 使得矩阵第一列为 a, b, c 这个顺序, 整个过程中我们只做了交换行列, 所以行列式至多差一个负号

直接计算有

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = -(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = -(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

所以行列式取值总共就两种可能, 为 $\pm(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$, 最大的是 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

□

例题 8.1.4 设 A, B 分别为 $n \times m, m \times n$ 矩阵且 $E_m - BA$ 可逆, 证明: $E_n - AB$ 也可逆, 并求逆矩阵.

证明. 幂级数形式展开有

$$\begin{aligned} (E - AB)^{-1} &= \frac{1}{E - AB} = E + AB + ABAB + ABABAB + \dots \\ &= E + A(E + BA + BABA + \dots)B = E + A \frac{1}{E - BA} B \\ &= E + A(E - BA)^{-1} B \end{aligned}$$

接着走个形式验算一下

$$(E - AB) \left(E + A(E - BA)^{-1} B \right) = E$$

这是显然的, 得证 (考试时候直接写验算即可, 无需也不要写幂级数)

□

例题 8.1.5 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $s \times n$ 矩阵, W_A 与 W_B 分别是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 的解空间, 则 $W_A \subseteq W_B$ 的充分必要条件是存在 $s \times m$ 矩阵 P 使得 $PA = B$.

证明. 利用矩阵方程 $AX = B$ 有解当且仅当 $r(A) = r(A, B)$, 注意这里并不要求是方阵, 只要矩阵乘法有意义即可, 方便起见以下不再强调矩阵的大小

因此存在矩阵 P 使得 $PA = B$ 当且仅当 $r(A) = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

现在只需说明 $r(A) = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 等价于从 $Ax = 0$ 能推出 $Bx = 0$

如果 $Ax = 0$ 能推出 $Bx = 0$, 则 $Ax = 0$ 也能推出 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}x = 0$, 反之 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}x = 0$ 显然也有 $Ax = 0$, 这说明线性方程组 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}x = 0, Ax = 0$ 是同解的

另一方面, 显然如果 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}x = 0, Ax = 0$ 是同解的, 则从 $Ax = 0$ 能推出 $Bx = 0$

这说明从 $Ax = 0$ 能推出 $Bx = 0$ 等价于 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}x = 0, Ax = 0$ 是同解的, 注意这两个线性方程组的解空间自动具备包含关系, 因此同解就等价于系数矩阵秩相同, 结论得证

□

注释 8.1.1: 补充证明一下 $AX = B$ 有解等价于 $r(A) = r(A, B)$, 显然当 $B = AX$ 时候, 代入进去利用分块矩阵初等变换知 $r(A) = r(A, B)$

如果 $r(A) = r(A, B)$, 则 A 的列向量的极大无关组也是 (A, B) 列向量的极大无关组, 所以矩阵 A 的列向量组, 是可以线性表出 B 的每一个列向量的, 将这个线性组合写出来, 就知道 $AX = B$ 有解

这个结论很重要, 包括过程也重要, 每年非数考研之前总有很多人问类似的问题 (主要出现在考研选择题中), 这一个题目就全覆盖了, 立刻秒

例题 8.1.6 设 a, b, c, d 是互不相同的正实数, x, y, z, w 是实数, 满足 $a^x = bcd$, $b^y = cda$, $c^z = dab$, $d^w = abc$. 计算行列式 $\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -w \end{vmatrix}$ 的值.

证明. 首先来算行列式 (不管条件)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -w \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 & 1 \\ x+1 & -(y+1) & 0 & 0 \\ 0 & y+1 & -(z+1) & 0 \\ 0 & 0 & z+1 & -(w+1) \end{vmatrix} \\ &= -(x+1)(y+1)(z+1) - (w+1) \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ x+1 & -(y+1) & 0 \\ 0 & y+1 & -(z+1) \end{vmatrix} \\ &= pqr - (pqr + pqs + qrs + pqs), p = x+1, q = y+1, r = z+1, s = w+1 \end{aligned}$$

接着看条件, 有

$$a^{x+1} = b^{y+1} = c^{z+1} = d^{w+1} = abcd \Rightarrow p \ln a = q \ln b = r \ln c = s \ln d = \ln(abcd)$$

如果 $abcd \neq 1$, 则 p, q, r, s 都非零, 并且

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{\ln a + \ln b + \ln c + \ln d}{\ln(abcd)} = 1 \Rightarrow pqr = pqr + pqs + qrs + pqs$$

这说明所求的行列式为零

如果 $abcd = 1$, 则 $p \ln a = q \ln b = r \ln c = s \ln d = 0$

此时假如 a, b, c, d 都不是 1, 则 p, q, r, s 均为零, 相应的行列式为零

如果有 1, 则根据条件, 不妨设 $d = 1$ 并且 a, b, c 均不是 1, 则 $p = q = r = 0$, s 任取, 显然行列式依旧是零
综上, 行列式为零

□

注释 8.1.2: 本题还有一个巧妙的线性方程组方法, 注意到这个行列式, 刚刚好是条件, 取对数之后对应的线性方程组的系数矩阵, 这样子一步可以到位, 但是你可能注意不到

例题 8.1.7 1. 设 n 阶方阵 A 的 (i, j) 元为 $\cos((i-1)n+j)$, $1 \leq i, j \leq n$. 是否存在秩为 1 的矩阵 B 和 C , 使得 $A = B + C$.

2. 设 n 阶方阵 A 的 (i, j) 元等于 $(i-j)^2$, $1 \leq i, j \leq n$. 是否存在秩为 1 的矩阵 B 和 C , 使得 $A = B + C$.

证明. 1. 利用三角函数的和角公式 $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, 则可以把矩阵分解, 得到

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \cos 1 & \cos 2 & \cdots & \cos n \\ \cos(n+1) & \cos(n+2) & \cdots & \cos 2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(n(n-1)+1) & \cos(n(n-1)+2) & \cdots & \cos n^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ \cos n & \sin n \\ \vdots & \vdots \\ \cos(n-1)n & \sin(n-1)n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 1 & \cos 2 & \cdots & \cos n \\ -\sin 1 & -\sin 2 & \cdots & -\sin n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^T \\ v^T \end{pmatrix} = \alpha u^T + \beta v^T \end{aligned}$$

这样就写成了两个秩 1 矩阵之和

2. 将 A 写出来, 观察左上角的三阶子式, 行列式是 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8$, 所以 A 的秩至少是 3, 如果能分解为两个秩 1 矩阵之和, 则 $r(A) = r(B+C) \leq r(B) + r(C) = 2$ 矛盾, 所以不存在

其实可以证明 $r(A) = 3$, 利用 $a_{ij} = i^2 - 2ij + j^2$ 可以分解如下:

$$A = \begin{pmatrix} 1^2 \\ \vdots \\ n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$$

这样 A 写成了三个秩 1 矩阵之和, 所以 $r(A) \leq 3$, 于是 $r(A) = 3$

□

注释 8.1.3: 实际上, 这种秩 1 矩阵分解的问题, 就是要你看矩阵 A 的秩, 因为秩 r 的矩阵可以分解为 r 个秩 1 矩阵之和

8.2 分块矩阵

命题 8.2.1: 分块矩阵行列式

1. 若 A 可逆, 则 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| |D - CA^{-1}B|$ (D 可逆时结论类似)
2. 如果某两个矩阵具备交换性, 则行列式结果可以用上一个结论直接代入计算得到 (形式上)

$$AC = CA \Rightarrow \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|, AB = BA \Rightarrow \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |DA - CB|$$

证明. 1. 将第一行乘以 $-CA^{-1}$ 加到第二行上去, 得到 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A| |D - CA^{-1}B|$

2. 如果 A 可逆, 则利用前面的结果有

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| |D - CA^{-1}B| = |AD - ACA^{-1}B| = |AD - CAA^{-1}B| = |AD - CB|$$

一般的, 如果 A 不可逆, 则存在 $\delta > 0$ 使得任意 $t \in (0, \delta)$ 都有 $A + tI$ 可逆, 显然 $(A + tI)C = C(A + tI)$

对于 $A + tI$ 利用前面的结论有 $\begin{vmatrix} A + tI & B \\ C & D \end{vmatrix} = |(A + tI)D - CB|$, 显然左右两端都是关于 t 的多项式, 是

连续的, 因此令 $t \rightarrow 0^+$ 取极限就有 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$

□

注释 8.2.1: 分块矩阵打洞的思想很重要, 后面的操作步骤叫做“摄动法”, 应当学习和掌握

例题 8.2.1 设 A 是 n 阶可逆反对称阵, b 是 n 维列向量, 求 $\begin{pmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{pmatrix}$ 的秩.

证明. 利用分块矩阵初等变换有

$$r \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & -b^T A^{-1}b \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -b^T A^{-1}b \end{pmatrix}$$

注意 A 是反对称阵, 所以 A^{-1} 也是反对称的, 便有

$$b^T A^{-1}b = (b^T A^{-1}b)^T = -b^T A^{-1}b \Rightarrow b^T A^{-1}b = 0$$

故所求的秩为 n

□

例题 8.2.2 设 A, B 为 n 阶方阵, 证明: $r(AB - E) \leq r(A - E) + r(B - E)$.

证明. 设 $X = A - E, Y = B - E$, 则要证明的是 $r(X) + r(Y) \geq r(XY + X + Y)$

利用秩的不等式有

$$r(XY + X + Y) = r(X(Y + E) + Y) \leq r(X(Y + E)) + r(Y) \leq r(X) + r(Y)$$

结论得证, 此外你也可以尝试用分块矩阵来做 (略)

□

例题 8.2.3 设 A, B 是 n 阶实方阵, 证明: $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + iB| |A - iB| \geq 0$.

证明. 利用分块矩阵初等变换有 (将第二行乘以 i 加到第一行, 再将第一列乘以 $-i$ 加到第二列)

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A + iB & -B + iA \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A + iB & 0 \\ B & A - iB \end{vmatrix} = |A + iB| |A - iB|$$

注意 $A + iB, A - iB$ 两个矩阵为共轭关系, 所以行列式也是共轭复数的关系, 那么乘积表示模长, 自然非负

□

注释 8.2.2: 最后的共轭复数, 你可以自己设出矩阵每一个元素 $a_s \pm ib_t$, 然后按照行列式的定义展开, 再取共轭, 就可以验证确实是共轭复数的关系

例题 8.2.4 设 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵, 且满足 $r(A+B) = r(A) + r(B)$, 证明: 存在可逆阵 P, Q 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, PBQ = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & I_s & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

证明. 设 $r(A) = r, r(B) = s$, 对 A, B 做同时相抵变换将 A 变成相抵标准型, 不妨设

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}, r \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = s$$

根据条件有 $r \begin{pmatrix} B_1 + I_r & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = r + s$, 现在看 B 的第二块行 (B_3, B_4) , 作为 B 的子矩阵显然 $r(B_3, B_4) \leq r(B) = s$

假如 $r(B_3, B_4) \leq s-1$, 则 $A+B$ 的后面 $m-r$ 行中, 至多有 $s-1$ 个线性无关的行向量, 注意 $\begin{pmatrix} B_1 + I_r & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ 的第一块行只有 r 行, 所以 $A+B$ 至多有 $r+s-1$ 个线性无关的行向量, 与 $r(A+B) = r+s$ 矛盾

这说明 $r(B_3, B_4) = r \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = s$, 同理有 $r \begin{pmatrix} B_2 \\ B_4 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = s$

下面的操作步骤有两种写法, 思路是一样的, 自行选择认为方便且表述清晰严格的做法

方法一: 因此用 (B_3, B_4) 的行向量可以线性表出 (B_1, B_2) 的每一个行向量, 也就是说可以用 (B_3, B_4) 去消掉 (B_1, B_2) , 因此对 A, B 同时做初等行变换 (注意 A 第二块行都是零), 则 A 保持不变, B 变为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$

接着用 B_4 的列向量去消掉 B_3 , 对 A 也做一样的初等变换, 则 A 依旧保持不变, B 变为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}$

最后再对这两个矩阵的右下角做同时初等变换, 将 B_4 变成相抵标准型, A 还是保持不动, 于是在一系列同时初等变换之下, A, B 变成了题目中的那样子, 得证

方法二: 因为 $r(B_3, B_4) = r \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, 根据矩阵方程 $AX = B$ 有解的充要条件可知, 存在矩阵 X, Y 使得

$$X(B_3, B_4) = (B_1, B_2), \begin{pmatrix} B_2 \\ B_4 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XB_4Y & XB_4 \\ B_4Y & B_4 \end{pmatrix}$$

做分块矩阵初等变换有

$$\begin{pmatrix} I_r & -X \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -Y & I_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_r & -X \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} XB_4Y & XB_4 \\ B_4Y & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -Y & I_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}$$

这说明, 在同时相抵变换之下, A, B 可以分别变为 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}$

现在, 对 A, B 的右下角做同时的相抵变换, 将 B_4 变成其相抵标准型, 过程中 A 不改变, 从而结论得证 $\square$

8.3 特征值与相似对角化

例题 8.3.1 设 A 为 n 阶实方阵且 $E - A$ 的特征值模长均小于 1, 证明: $|A| < 2^n$.

证明. 根据条件可知 $|1 - \lambda| < 1$, 也就是说每一个特征值都在以 1 为圆心, 半径为 1 的圆里面, 所以每一个实数特征值都在 $(0, 2)$ 之间, 而每一个虚数特征值, 都会在圆内成对出现, 很明显这个圆在 $x^2 + y^2 = 4$ 内部 (内切), 所以每一对虚数特征值相乘之后, 都是介于 $(0, 4)$ 之间的数字

而行列式是特征值的乘积, 综上结论得证

□

例题 8.3.2 设 A 是 n 阶复方阵, 证明: 矩阵 $E - A\bar{A}$ 的特征多项式是实系数多项式.

证明. 设 $f(x) = |xE - (E - A\bar{A})| = |(x-1)E + A\bar{A}|$, 利用共轭与行列式的交换性, 也即 $\overline{|A|} = |A|$, 因此对任意实数 t 都有

$$\overline{f(t)} = \overline{|(t-1)E + A\bar{A}|} = |\overline{(t-1)E + A\bar{A}}| = |(t-1)E + \bar{A}A|$$

注意 $|xE - AB| = |xE - BA|$ 对任意 x 恒成立, 所以 $\overline{f(t)} = |(t-1)E + \bar{A}A| = f(t)$, 这说明 $f(x)$ 是实系数多项式, 结论得证

□

注释 8.3.1: 如果要论证的再仔细一点, 可以设 $f(x) = u(x) + iv(x)$, 则前面证明了对任意实数 t 有 $f(t) = \overline{f(t)}$, 所以 $v(t) = 0$ 对一切实数恒成立, 故 $v(x)$ 恒为零, 也即 $f(x) = u(x)$ 是实系数多项式, 至于共轭与行列式的可交换性, 可以按照行列式定义 (展开式) 写出来, 便是显然的

例题 8.3.3 设 $f(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$ 使得 $f(A) = 0$, 这里 A 是 n 阶方阵, 且 $|a_m| > \sum_{i=0}^{m-1} |a_i|$, 证明: 矩阵方程 $2X + AX = XA^2$ 只有零解.

证明. 首先需要有一个常见且重要的引理

引理 8.3.1: 设 A, B 分别是 m, n 阶方阵, 则矩阵方程 $AX = XB$ 只有零解等价于 A, B 无公共特征值

如果有公共特征值, 设为 λ , 注意 B, B^T 有相同的特征值, 则存在非零列向量 u, v 使得 $Au = \lambda u, v^T B = \lambda v^T$, 于是 uv^T 是非零的矩阵, 并且 $Auv^T = \lambda uv^T, uv^T B = \lambda uv^T$, 这说明 $AX = XB$ 有非零解 $X = uv^T$

如果没有公共特征值, 则对于 $AX = XB$, 设 A 的特征多项式是 $f(x)$, 便有 $f(A) = 0$ 且 $f(A)X = Xf(B) = 0$, 设 B 的特征值是 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, 则 $f(B)$ 的特征值是 $f(\mu_1), f(\mu_2), \dots, f(\mu_n)$, 无公共特征值保证了这些数字都非零, 所以 $f(B)$ 是可逆矩阵, 故 $X = 0$, 引理得证

回到原题, 方程是 $(2I + A)X = XA^2$, 所以等价于证明 $2I + A, A^2$ 无公共特征值

对 $f(x)$ 的任意复数根 x , 如果 $|x| \geq 1$, 则由 $a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ 和绝对值不等式有

$$|a_m| = \frac{1}{|x|^m} |a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0| \leq |a_{m-1}| \frac{1}{|x|} + |a_{m-2}| \frac{1}{|x|^2} + \dots + |a_0| \frac{1}{|x|^m} \leq |a_{m-1}| + |a_{m-2}| + \dots + |a_0|$$

与条件矛盾, 从而 $f(x)$ 的根全在单位圆内 (不含边界)

因为 $f(A) = 0$, 所以对 A 的每一个特征值 λ 都有 $f(\lambda) = 0$, 也就是说 A 的特征值全在单位圆内, 所以 $2 + A$ 的特征值在以 2 为圆心, 1 为半径的圆内, A^2 的特征值在单位圆内, 二者没有交集, 因此无公共特征值, 根据引理知只有零解

□

8.4 二次型与实对称矩阵

例 8.4.1 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为实对称矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵. 记

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -x_3 & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ -x_4 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

若 $|A| = -12$, A 的特征值之和为 1, 且 $(1, 0, -2)^T$ 为 $(A^* - 4I)x = 0$ 的一个解. 试给出一正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =$

$Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ 使得 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 化为标准型.

证明. 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 则条件为 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -12$

由条件 $A^*x = 4x \Rightarrow AA^*x = 4Ax = -12x, Ax = -3x$, 所以不妨 $\lambda_3 = -3$, 方程变为 $\lambda_1 + \lambda_2 = 4, \lambda_1 \lambda_2 = 4 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2$, 特征值完全确定

设 A 的属于特征值 2 的特征向量为 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, 则它与 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ 垂直 (因为实对称矩阵不同特征值的特征向

量一定相互正交), 所以 $x = 2z$, 因此任何形如 $\begin{pmatrix} 2x \\ y \\ x \end{pmatrix}$ 的向量, 都是特征值 2 对应的特征向量, 下面找两个相互

垂直的向量: 记 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, 然后分别取 $x = 0, y = 1$ 和 $x = 1, y = 0$ 得到 $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 此时这三个向量是两两垂直的

单位化, 因此令 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 这里 P 是正交阵, 便有 $AP = P \begin{pmatrix} -3 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, 记 $D = \begin{pmatrix} -3 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

最后来计算题中的行列式, 记 $w = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, 利用分块矩阵行列式的降阶公式以及 $A = PDP^{-1}$ 有

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{vmatrix} x_1^2 & w^T \\ -w & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & -w \\ w^T & x_1^2 \end{vmatrix} = |A| |x_1^2 + w^T A^{-1} w| = -12 (x_1^2 + w^T P D^{-1} P^T w)$$

记 $\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = P^T w, y_1 = x_1$, 于是

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -12x_1^2 - 12(P^T w)^T D^{-1} (P^T w) \\ &= -12y_1^2 - 12 \begin{pmatrix} y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = -12y_1^2 + 4y_2^2 - 6y_3^2 - 6y_4^2 \end{aligned}$$

这就是 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 的标准型, 从 $\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ 可知, 中间的正交变换是

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & P & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

显然这个矩阵是正交阵, 结论得证

□

例题 8.4.2 设 A, B, C 都是 n 阶正定实对称矩阵, $g(t) = |t^2A + tB + C|$ 是关于 t 的多项式, 证明: $g(t)$ 的所有根的实部都小于零.

证明. 任取 $g(t)$ 的一个复根 t_0 , 则 $|t_0^2A + t_0B + C| = 0$, 故存在非零复列向量 α , 使得 $(t_0^2A + t_0B + C)\alpha = 0$. 将上述等式左乘 $\bar{\alpha}'$, 可得

$$(\bar{\alpha}'A\alpha)t_0^2 + (\bar{\alpha}'B\alpha)t_0 + (\bar{\alpha}'C\alpha) = 0$$

注意到 A, B, C 也是正定 Hermite 矩阵, 故 $a = \bar{\alpha}'A\alpha > 0, b = \bar{\alpha}'B\alpha > 0, c = \bar{\alpha}'C\alpha > 0$, 并且 t_0 是二次方程 $at^2 + bt + c = 0$ 的根. 若 t_0 是实根, 则 $t_0 < 0$, 否则将由 $t_0 \geq 0$ 得到 $at_0^2 + bt_0 + c \geq c > 0$, 这就推出了矛盾. 若 t_0 是虚根, 则 t_0 的实部为 $-\frac{b}{2a} < 0$, 结论得证. □

例题 8.4.3 设 A, B 均为 n 阶实对称矩阵, 且 B 正定, 多项式 $f(\lambda) = \det(\lambda B - A)$ 的根为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. 证明: (1) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 均为实数; (2) 存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, 使得 $A\varepsilon_i = \lambda_i B\varepsilon_i$ 且 $\varepsilon_i^T B\varepsilon_j = \delta_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n$, 这里的 δ_{ij} 为 Kronecker 符号.

证明. 熟知正定阵可以开方 (对任意正定实对称阵 A , 存在唯一的正定实对称阵 B 使得 $B^2 = A$, 唯一性证明较难, 我们只需要存在性, 可以用对角化来一步完成证明, 这个开方的矩阵记为 $B = A^{\frac{1}{2}}$, 具备对称, 正定, 可逆的性质), 利用行列式的性质, 对条件和结论等价变形有

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= |\lambda B - A| = |B| |\lambda - B^{-1}A| = |B| \left| \lambda - B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}} \right| \\ Ae_i &= \lambda_i Be_i \Leftrightarrow \left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}} \right) \left(B^{\frac{1}{2}}e_i \right) = \lambda_i \left(B^{\frac{1}{2}}e_i \right) \\ e_i^T Be_j &= \delta_{ij} \Leftrightarrow \left(B^{\frac{1}{2}}e_i \right)^T \left(B^{\frac{1}{2}}e_j \right) = \delta_{ij} \end{aligned}$$

所以将 $B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}$ 视为一个整体, 自然也是实对称矩阵, 问题就转化为证明: 实对称矩阵可以正交相似于对角阵, 这是课本结论, 从而成立 □

8.5 综合问题

例题 8.5.1 给定 $x_1, \dots, x_n$, 令 $x_i^{(1)} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, i = 1, \dots, n$, 其中 $x_{n+1} = x_1$.

归纳地定义 $x_i^{(k)} = \frac{x_i^{(k-1)} + x_{i+1}^{(k-1)}}{2}, i = 1, \dots, n$, 其中 $x_{n+1}^{(k-1)} = x_1^{(k-1)}, k = 2, 3, \dots$.

证明: 对于 $i = 1, \dots, n$ 均成立 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

证明. 这个数列写出来就是

$$x_1^{(1)} = \frac{x_1 + x_2}{2}, x_2^{(1)} = \frac{x_2 + x_3}{2}, \dots, x_n^{(1)} = \frac{x_n + x_1}{2}$$

可以用矩阵表示成

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix}$$

因此一般的有 $\begin{pmatrix} x_1^{(N)} \\ \vdots \\ x_n^{(N)} \end{pmatrix} = M^N \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \forall N \geq 1$, 则只需要计算 M^N 的极限矩阵

下面的步骤是循环矩阵的经典处理方法 (特征值, 相似对角化), 本题的 M 是一个特殊的循环矩阵记 $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, 利用范德蒙德矩阵可以将循环矩阵对角化:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_1 \\ c_1 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \cdots & \varepsilon^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \cdots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix}, f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \cdots & \varepsilon^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \cdots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(\varepsilon) \\ \ddots \\ f(\varepsilon^{n-1}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

记 $V = (\varepsilon^{(i-1)(j-1)})_{n \times n}$ 为范德蒙德矩阵, 对应到本题中就是

$$\begin{aligned} M &= V \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1+\varepsilon}{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1+\varepsilon^{n-1}}{2} \end{pmatrix} V^{-1}, \lim_{N \rightarrow \infty} M^N = V \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} V^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_1^{(N)} \\ \vdots \\ x_n^{(N)} \end{pmatrix} &= V \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} V^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{n} \begin{pmatrix} x_1 + \dots + x_n \\ \vdots \\ x_1 + \dots + x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

只需要证明画方框的那个等号，等价于说明

$$n \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \cdots & \varepsilon^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \cdots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \cdots & \varepsilon^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \cdots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

根据等比数列求和公式，这是显然成立的，结论得证

□

注释 8.5.1: 如果一般的循环矩阵看不懂，可以就本题这个特殊情况自己算一下对角化和特征向量，这个方法的好处是最后一步不需要强项算范德蒙德矩阵的逆矩阵，将求逆运算回避掉了，只需要验证一个简单的矩阵乘法

高阶线性递推数列，或者多元一阶线性递推数列，都可以用线性代数的方法来解决，应当掌握

例题 8.5.2 设 $B_1, B_2, \dots, B_{2021}$ 为空间 $\mathbb{R}^3$ 中半径不为零的 2021 个球, $A = (a_{ij})$ 为 2021 阶方阵, 其 (i, j) 元 a_{ij} 为球 B_i 与 B_j 相交部分的体积. 证明: 行列式 $|E + A| > 1$, 其中 E 为单位矩阵.

证明. 根据定义, 计算 a_{ij} 有 $a_{ij} = \int_{B_i \cap B_j} 1 dV$, 显然 A 是实对称矩阵, 考虑二次型

$$\text{设 } x = (x_1, \dots, x_n)^T \text{ 是 } n \text{ 维列向量, 则 } x^T A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n \int_{B_i \cap B_j} x_i x_j dV$$

现在无法化简, 我们希望统一积分区域, 这样子才能把求和拿进去, 定义示性函数 $1_B(x) = \begin{cases} 0, & x \notin B \\ 1, & x \in B \end{cases}$, 则有

$$\begin{aligned} \int_{B_i \cap B_j} x_i x_j dV &= \int_{\mathbb{R}^3} 1_{B_i \cap B_j}(t) x_i x_j dV = \int_{\mathbb{R}^3} 1_{B_i}(t) \cdot 1_{B_j}(t) x_i x_j dV \\ x^T A x &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^3} 1_{B_i}(t) \cdot 1_{B_j}(t) x_i x_j dV = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j=1}^n 1_{B_i}(t) \cdot 1_{B_j}(t) x_i x_j dV \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{i=1}^n 1_{B_i}(t) x_i \right)^2 dV \geq 0, (t = (t_1, t_2, t_3), dV = dt_1 dt_2 dt_3) \end{aligned}$$

所以 A 是半正定实对称矩阵, 故所有特征值非负, 显然 A 特征值不能全为零 (否则 A 正交相似与零矩阵, 导致 $A = 0$, 但是根据题目, 至少 A 的对角元都是正的, 矛盾), 所以 $|E + A| > 1$, 结论得证

□

注释 8.5.2: 这是非数 CMC 决赛真题, 有些人可能认为本题完全想不到, 其实读完题至少应该清楚, 本题无论如何都要引入积分, 否则没法表示 a_{ij} , 至于表示完之后的事情则有较强的技巧性了. 当然这种方法并非是只能解决一道题的奇技淫巧, 而且具备普适性的, 有许多利用积分来研究的二次型或者高中竞赛不等式题目, 处理手法均类似.

例题 8.5.3 设 n 为偶数, 证明: 存在 n 阶实方阵 A, B 使得对任意非零实向量 v , 都有 Av, Bv 线性无关.

证明. 首先考虑 $n = 2$ 的情况, 要找两个二阶实方阵, 使得一切非零实向量都有 Av, Bv 线性无关

显然 A, B 都必须是可逆矩阵, 否则取一个零特征值对应的特征向量, 就会导致矛盾, 这时让 v 在所有二维实向量里面取一遍, Bv 也会取一遍, 因此把 Bv 看成整体 (换句话说, 令 $v = B^{-1}x$), 则问题变成找一个可逆矩阵 A 使得 v, Av 总是线性无关, 也即不妨 $B = I$

这要求 A 不能有实特征值, 否则相应的实特征向量就不满足题目要求, 那么从标准型的角度看, A 有一对共轭虚根为特征值, 本质上便只能是 $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ 这种旋转矩阵, 只有一种情况

换个角度看, 如果这个线性变换是旋转变换, 自然 v, Av 不可能共线, 也就是线性无关, 所以特别的, 我们可以取旋转 90° 度的变换, 也即

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

直接按定义验证, 显然满足要求, 一般情况我们只要取这种矩阵, 拼成分块对角阵即可

□

例题 8.5.4 设 A 是 n 阶方阵, 证明: 存在对角线为 $1, -1$ 的对角阵 J 使得 $A + J$ 可逆.

证明. 对 n 采用归纳法, $n = 1$ 时显然成立, 假设 n 时成立, 则 $n + 1$ 时

设 $A = \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \beta^T & x \end{pmatrix}$, 对 A_1 利用归纳假设可知存在 n 阶的对角线为 $1, -1$ 的对角阵 J_1 , 使得 $A_1 + J_1$ 可逆, 则对 $\varepsilon = \pm 1$, 利用分块矩阵行列式公式有

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \beta^T & x \end{pmatrix}, \left| \begin{array}{cc} A_1 + J_1 & \alpha \\ \beta^T & x + \varepsilon \end{array} \right| = |A_1 + J_1| \left| x + \varepsilon - \beta^T (A_1 + J_1)^{-1} \alpha \right|$$

现在只需保证第二个行列式非零, 注意行列式里面就是一个数字, 因此总可以在 $-1, 1$ 中选取一个作为 ε , 使其非零, 由此构造 J , 结论得证 $\square$

注释 8.5.3: 本题是曾经数学类 CMC 真题, 但是很简单

例题 8.5.5 设 n 为奇数, 实方阵 A, B 满足 $AB = 0$, 设 $J_A \sim A, J_B \sim B$, 证明: $A + J_A, B + J_B$ 之中一定有不可逆矩阵.

证明. 设 $n = 2m + 1$, 由 $AB = 0$ 知 $r(A) + r(B) \leq 2m + 1$, 所以 $r(A), r(B)$ 里面一定有一个秩不超过 n , 不妨设为 A , 因为相似的矩阵秩相同, 所以 $r(A + J_A) \leq r(A) + r(J_A) \leq 2n$, 所以它不可逆, 结论得证 $\square$

注释 8.5.4: 本题也是曾经数学类 CMC 真题, 但是很简单, 或许你读完题不知道该干嘛, 此时可以像我本章开头时候说的那样, 去试一下矩阵的秩, 特征值, 等等

例题 8.5.6 设 A, B 分别为实数域上的 3×4 和 4×3 矩阵, 且满足

$$AB = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -20 & 5 & 4 \\ -35 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -14 & 2x-5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -15 & 3x-3 & 3 & 6 \\ -32 & 6x-7 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$

求 x 的值.

证明. 首先计算特征多项式, 可以化简 (自行计算) 出 $|\lambda I - AB| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$, 这说明 A 的特征值是 1, 2, 其中 1 的代数重数是 2

为了确定其标准型, 我们还需要算秩, 计算特征值 1 的几何重数:

因为 $AB - I = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 2 \\ -20 & 4 & 4 \\ -35 & 7 & 7 \end{pmatrix}$, 所以 $r(AB - I) = 1$, 几何重数是 2 等于代数重数, 从而 AB 可对角化, 也

即 $AB \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, 由此可知 $BA \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

所以 $r(BA - I) = 2$, 计算有

$$\begin{aligned} r(BA - I) &= r \begin{pmatrix} -15 & 2x-5 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & 3x-3 & 2 & 6 \\ -32 & 6x-7 & 4 & 13 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -15 & 2x-5 & 2 & 6 \\ -15 & 3x-3 & 2 & 6 \\ -32 & 6x-7 & 4 & 13 \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} -15 & 2x-5 & 2 & 6 \\ 0 & x+2 & 0 & 0 \\ -2 & 2x+3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -3 & 2x-5 & 2 & 6 \\ 0 & x+2 & 0 & 0 \\ 0 & 2x+3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow x = -2 \end{aligned}$$

□

注释 8.5.5: 本题或许有点难度, 不知从何下手, 不过再次印证了: 当你不知道要做什么时, 可以去关注一下秩, 特征值这些, 很多时候有奇效

另外, 对任意的 x , 矩阵 BA 的特征多项式都是 $\lambda(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$, 所以从特征多项式角度看, 是解不出来 x 的, 因此需要更细致的去看几何重数, 特征多项式告诉我们, 唯一不确定的就是特征值 1 的几何重数, 因此我们要关注它 (假如关注它还是做不出来, 那题目就错了)

如果是数学专业学生做这个题, 则可以借助 Jordan 标准型和有关的推论顺利而快速解决

8.6 练习题

习题 8.6.1 设 A, B, C 为 n 阶方阵且 A 可逆, 满足 $(A - B)C = BA^{-1}$, 证明: $C(A - B) = A^{-1}B$

习题 8.6.2 设 A, B, C 为矩阵 (不一定是方阵), 证明: $r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B)$.

习题 8.6.3 设 A, B 为 n 阶方阵, 证明 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + B| \cdot |A - B|$.

进一步地, 设 A, B, C, D 均为 n 阶方阵, 则

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A + C & B + D \\ B + D & A + C \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A - C & B - D \\ B - D & A - C \end{vmatrix} \\ = |A + B + C + D| \cdot |A - B + C - D| \cdot |A + B - C - D| \cdot |A - B - C + D|.$$

习题 8.6.4 设矩阵 A, B 满足 $AB = BA = 0$, 证明: 存在可逆阵 P, Q 使得

$$A = P \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q, B = Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} P^{-1}.$$

习题 8.6.5 设 A, B 是 2020 阶正交阵, 线性方程组 $Ax = Bx$ 的解空间维数是 3, 问 A, B 能否相似.

习题 8.6.6 设二次型 $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 的矩阵 A 为 $\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & \cdots & a & 1 & a \\ a & a & \cdots & a & 1 \end{pmatrix}$ 其中

$n > 1, a \in R$, 求 f 在正交变换下的标准形.

习题 8.6.7 已知三元实二次型 $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 经正交变换后所得的标准形为 $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, 矩阵 B 满足 $\left(\left(\frac{1}{2}\mathbf{A}\right)^*\right)^{-1} B \mathbf{A}^{-1} = 2\mathbf{A}B + 4\mathbf{E}$ 且 $\mathbf{A}^* \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^*$ 表示 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵. 试求出二次

型 $\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}$ 的表达式.

习题 8.6.8 设 A 是 n 阶复方阵, 证明: A 为数量矩阵当且仅当存在 $n + 1$ 个 A 的特征向量 $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$, 满足其中任意 n 个都是线性无关的.

习题 8.6.9 设 A 是数域 F 上的 n 阶方阵, 对任意 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in F^n$, 有 $\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\beta} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} = 0$. 求证: A 要么是对称的, 要么是反对称的.

习题 8.6.10 求分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵.

第九章 16 届决赛非数学类

例题 9.0.1 1. 设 $a \neq 0$, 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{3x}}{ax}, & x > 0 \\ b + 2\tan^5 x, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 连续, 求 ab

2. 设 $a_1 = 2, \sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} = \sqrt{2}$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(n+1)^2}$.

3. 求 $f(x, y, z) = 2 - x^2 - y^2 + 2 \arctan z$ 在 $(1, 2, -1)$ 处最大的方向导数值.

4. 设 L 是由 $|x|^3 + 3|y| = 1$ 确定的封闭曲线, 计算 $\int_L |x|^3 ds$

5. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1^{2025} + 2^{2025} + \dots + n^{2025})^{2025}}{(1^{2024} + 2^{2024} + \dots + n^{2024})^{2026}}$

6. 设 $z = xe^x(1 + ye^y)$, 计算 $z_{xy}(1, 1)$

7. 设 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 求 $x - 2y + 3z$ 的最大值.

证明. 1. 在 $x = 0$ 处有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{3x}}{ax} = \frac{3}{2a}$, 所以 $ab = \frac{3}{2}$

2. 求和易知 $a_n = 2n^2$, 所以极限是 2

3. 求偏导, 在 $(1, 2, -1)$ 处有 $f_x = -2, f_y = -4, f_z = 1$, 利用柯西不等式

$$\frac{\partial f}{\partial n} = -2 \cos \alpha - 4 \cos \beta + \cos \gamma \leq \sqrt{4 + 16 + 1} = \sqrt{21}$$

所以方向导数最大值是 $\sqrt{21}$

4. 注意对称性, 所以积分可以只看第一象限, 然后将曲线积分变成定积分, 则有

$$\int_L |x|^3 ds = 4 \int_0^1 x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx = \int_0^1 \sqrt{x + 1} dx = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

5. 利用定积分定义有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1^{2025} + 2^{2025} + \dots + n^{2025})^{2025}}{(1^{2024} + 2^{2024} + \dots + n^{2024})^{2026}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{n} \left(\left(\frac{1}{n} \right)^{2025} + \left(\frac{2}{n} \right)^{2025} + \dots + \left(\frac{n}{n} \right)^{2025} \right) \right)^{2025}}{\left(\frac{1}{n} \left(\left(\frac{1}{n} \right)^{2024} + \left(\frac{2}{n} \right)^{2024} + \dots + \left(\frac{n}{n} \right)^{2024} \right) \right)^{2026}} = \frac{2025^{2026}}{2026^{2025}}$$

6. 求偏导可知 $z_{xy} = e^{x+y}(x+1)(y+1)$, 所以答案是 $4e^2$

7. 根据柯西不等式, 显然最大值是 $\sqrt{14}$

□

例题 9.0.2 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + \sin^2 x) - 6(\sqrt[3]{2 - \cos x} - 1)}{x^3}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 证明: $f'(0)$ 存在, 并计算 $f'(0)$.

证明. 利用导数定义和泰勒展开有

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2 x) - 6(\sqrt[3]{2 - \cos x} - 1)}{x^4} \\ \ln(1 + \sin^2 x) &= \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin^4 x + o(\sin^4 x) = \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) = x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4) \\ \sqrt[3]{2 - \cos x} &= (1 + 1 - \cos x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}(1 - \cos x) - \frac{1}{9}(1 - \cos x)^2 + o(x^4) = 1 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \\ \Rightarrow f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{5}{6}x^4 - 6\left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{24}x^4\right) + o(x^4)}{x^4} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

□

例题 9.0.3 求微分方程 $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$ 的通解.

证明. 利用二阶常系数线性微分方程的公式有

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{yy'' - y'^2}{y^2} = \ln y = (\ln y)'' \Rightarrow \ln y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

□

例题 9.0.4 设 $f(0) = 0, f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x) + 1}, \forall x \geq 0$, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在且不超过 $\frac{\pi}{2}$.

证明. 根据条件, $f(x)$ 单调递增, 所以极限一定存在 (可能为无穷), 显然 $f(x)$ 非负, 进而

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x) + 1} \leq \frac{1}{x^2 + 1} \Rightarrow f(x) = \int_0^x f'(t) dt \leq \arctan t, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

□

例题 9.0.5 计算积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{1 + \tan^3 x} dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{1 + \cot^3 x} dx$

证明. 换元 $x \rightarrow \frac{\pi}{2} - x$, 显然 $I = J$, 下面计算 I , 万能代换得

$$\begin{aligned} t = \tan x, x = \arctan t, \tan^2 x + 1 &= \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{t^2 + 1}, \sin^2 x = \frac{t^2}{t^2 + 1} \\ I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{1 + \tan^3 x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\frac{t^2}{t^2 + 1} \cdot \frac{1}{t^2 + 1}}{(t^3 + 1)(t^2 + 1)^3} dt = \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{t^2}}{(\frac{1}{t^3} + 1)(\frac{1}{t^2} + 1)^3 t^2} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{t^5}{(t^3 + 1)(t^2 + 1)^3} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^2 + t^5}{(t^3 + 1)(t^2 + 1)^3} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(t^2 + 1)^3} dt, x = \frac{1}{t^2 + 1} \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} (1 - x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4} B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)} = \frac{\pi}{32} = J \end{aligned}$$

□

例题 9.0.6 设 $a, b, c > 0$, S 是方向朝上的上半椭球面 $S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z \geq 0$, 计算

$$I = \iint_S xy^2 dydz + yz^2 dzdx + zx^2 dxdy$$

证明. 补一个 xoy 面对应的部分, 显然这一部分的积分是零, 记区域是 Ω , 然后利用高斯公式可知

$$\begin{aligned} I &= \iint_S xy^2 dydz + yz^2 dzdx + zx^2 dxdy = \iiint_{\Omega} x^2 + y^2 + z^2 dxdydz \\ &\begin{cases} x = ar \sin \varphi \cos \theta \\ y = br \sin \varphi \sin \theta \\ x = cr \cos \varphi \end{cases}, r \in [0, 1], \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in [0, 2\pi], J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = abcr^2 \sin \varphi \\ I &= \iiint_{\Omega'} abcr^4 (a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \varphi) \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= abc \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^4 (a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \varphi) \sin \varphi dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{abc}{5} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a^2 \sin^3 \varphi \cos^2 \theta + b^2 \sin^3 \varphi \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\theta d\varphi \\ &= \frac{abc}{5} \int_0^\pi \pi a^2 \sin^3 \varphi + \pi b^2 \sin^3 \varphi + 2\pi c^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{\pi abc}{5} \int_0^\pi a^2 \sin^3 \varphi + b^2 \sin^3 \varphi + 2c^2 \sin \varphi (1 - \sin^2 \varphi) d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{15} abc (a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

□

例题 9.0.7 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 中二阶可导且是奇函数, 证明: 存在 $u \in (-1, 1)$ 使得 $f''(u) - f'(u) + f(1) = 0$.

证明. 先看目标, 其实是要证 $(e^{-x}(f'(x) - f(1)))' = 0$, 因此需要说明 $f'(x) - f(1)$ 有两个零点, 对应的是函数 $f(x) - xf(1)$ 的导函数, 由此找到需要构造的函数 (如果看不出来, 也可以不妨设 $f(1) = 0$ 试一下)

考虑函数 $g(x) = f(x) - xf(1)$, 则 $g(x)$ 是奇函数并且满足 $g(1) = g(0) = g(-1) = 0$, 所以 $g'(x) = 0$ 有两个零点, 进一步考虑函数 $h(x) = e^{-x}g(x)$, 它也有两个零点, 求导利用罗尔中值定理即可得证

□

例题 9.0.8 设 $p \geq 1$, 讨论级数 $1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{(2n)^p} + \dots$ 的敛散性

证明. $p = 1$ 时, 级数为 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ 显然收敛, 实际上是 $\ln 2$, 并且条件收敛

$p > 1$ 时, 显然 $1 + \frac{1}{3} + \dots = +\infty$, $\frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \dots < +\infty$, 所以级数发散

□

例题 9.0.9 给定 $t > 0, t \neq 1$, 定义数列

$$a_1 = 2t - 3, a_{n+1} = \frac{3(t^{n+1} - 1)(a_n + 1) - 2(t^n + a_n) + a_n + 1}{a_n + 2t^n - 1}$$

求 a_n 的通项公式, 并判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)$ 的敛散性.

证明. 求通项有

$$\begin{aligned} a_{n+1} + 1 &= \frac{3(t^{n+1} - 1)(a_n + 1)}{a_n + 2t^n - 1} \Rightarrow \frac{a_{n+1} + 1}{t^{n+1} - 1} = 3 \frac{a_n + 1}{a_n + 1 + 2t^n - 2} = 3 \frac{\frac{a_n + 1}{t^n - 1}}{\frac{a_n + 1}{t^n - 1} + 2} \\ b_n &= \frac{a_n + 1}{t^n - 1}, b_1 = 2, b_{n+1} = \frac{3b_n}{b_n + 2}, \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{2}{3} \frac{1}{b_n} + \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{b_{n+1}} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1}{b_n} + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \\ \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1}{b_n} &= \frac{3}{2} \frac{1}{b_1} + \frac{1}{3} \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^n \right) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{4} \\ \Rightarrow \frac{1}{b_n} &= 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^n, a_n = b_n(t^n - 1) - 1 = \frac{t^n - 1}{1 - \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n} - 1 \end{aligned}$$

容易看出, 不论 t 为何值, 级数都会发散

□

例题 9.0.10 1. 设 A, B 为 n 阶实对称矩阵且 A 正定, 证明: 存在可逆阵 P 使得 $P^T A P = I, P^T B P = D$, 这里 I 是单位阵, D 为对角阵

2. 设 A, B 为 n 阶正定阵, 证明:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}((A+B)^2) &\geq \operatorname{tr}(A^2) + \operatorname{tr}(B^2), \operatorname{tr}((A+B)^3) \geq \operatorname{tr}(A^3) + \operatorname{tr}(B^3) \\ \ln(|xA + (1-x)B|) &\geq x \ln |A| + (1-x) \ln |B|, \forall x \in (0, 1) \end{aligned}$$

证明. 1. 因为 A 正定, 所以存在可逆阵 P 使得 $P^T A P = I, P^T B P = B_1$, 这里 B_1 是实对称矩阵

进而存在正交阵 U 使得 $U^T B_1 U = D$, 所以有 $(PU)^T A (PU) = I, (PU)^T B (PU) = D$, 结论得证

2. 对于正定实对称阵 A , 显然存在正定实对称阵 X 使得 $X^2 = A$ (其实也是唯一的, 不过不需要唯一性), 将 X 记为 $A^{\frac{1}{2}}$, 相应的 $A^{-\frac{1}{2}}$ 表示 X^{-1} , 进而

$$\operatorname{tr}((A+B)^2) \geq \operatorname{tr}(A^2) + \operatorname{tr}(B^2) \Leftrightarrow \operatorname{tr}(AB) + \operatorname{tr}(BA) = 2\operatorname{tr}(AB) \geq 0$$

因为 $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} B) = \operatorname{tr}(A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}})$, 里面的矩阵与 B 合同, 所以正定, 不等式成立
对于第二个不等式

$$\operatorname{tr}((A+B)^3) \geq \operatorname{tr}(A^3) + \operatorname{tr}(B^3) \Leftrightarrow \operatorname{tr}(A^2 B + B A^2 + A B A + B A B + B^2 A + A B^2) \geq 0$$

同理有

$$\operatorname{tr}(A^2 B + B A^2 + A B A + B A B + B^2 A + A B^2) = 3\operatorname{tr}(A B A) + 3\operatorname{tr}(B A B) \geq 0$$

得证

对于最后一个不等式, 因为

$$\begin{aligned} \ln(|xA + (1-x)B|) &= \ln \left| xI + (1-x)A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \right| + \ln |A|, \ln |B| = \ln \left| A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \right| + \ln |A| \\ \ln(|xA + (1-x)B|) &\geq x \ln |A| + (1-x) \ln |B| \Leftrightarrow \ln \left| xI + (1-x)A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \right| \geq (1-x) \ln \left| A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \right| \end{aligned}$$

记 $C = A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}$ 是正定阵, 则 C 可以正交相似于对角阵, 设 C 的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 则有

$$\begin{aligned} \ln \left| xI + (1-x)A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \right| &\geq (1-x) \ln \left| A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \right| \Leftrightarrow \ln |xI + (1-x)C| \geq (1-x) \ln |C| \\ &\Leftrightarrow \ln \begin{vmatrix} x + (1-x)\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x + (1-x)\lambda_n \end{vmatrix} \geq (1-x) \ln \begin{vmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{vmatrix} \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (\ln(x + (1-x)\lambda_k) - (1-x) \ln \lambda_k) \geq 0, \forall x \in (0, 1), \forall \lambda_k > 0 \end{aligned}$$

最后只需要证明高中不等式: 对任意 $x \in (0, 1)$ 都有

$$f(\lambda) = \ln(x + (1-x)\lambda) - (1-x) \ln \lambda \geq 0, \forall \lambda > 0$$

求导可知

$$f'(\lambda) = \frac{1-x}{x + (1-x)\lambda} - \frac{1-x}{\lambda} = \frac{x(1-x)(\lambda-1)}{(x + (1-x)\lambda)\lambda} \Rightarrow f(\lambda) \geq f(1) = 0$$

结论得证

□

以下部分来自于 16 届决赛数学类真题, 纯粹微积分水平, 若有富裕时间就讲, 没有则留作习题

例题 9.0.11 1. 设 2025 阶实对称方阵 A 的秩为 2012 且 $A^2 = A$, 求二次型 $x^T A x$ 的规范型.

2. 求二元函数 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3y$ 的极小值点.

3. 将二重积分 $\int_0^1 \left(\int_x^1 f(x, y) dy \right) dx$ 写成极坐标形式

4. 求微分方程 $y' = 1 + xe^y$ 的通解

证明. 1. 幂等矩阵的特征值是 0, 1, 因为秩是 2012, 所以规范型 (也是标准型) 是 $x_1^2 + \dots + x_{2012}^2$

2. 求导解方程有 $f_x = 2x + y = 0, f_y = 2 + 2y - 3 = 0$, 解得 $(x, y) = (-1, 2)$

3. 极坐标换元, 结果为 (对应的是单位正方形中那个上三角)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

4. 令 $u = e^y$ 也即 $y = \ln u$, 则有

$$\begin{aligned} y' &= \frac{u'}{u} = 1 + xe^y = 1 + xu \Rightarrow u' = u + xu^2 \\ \left(\frac{1}{u} \right)' &= -\frac{u'}{u^2} = -\frac{u + xu^2}{u^2} = -\frac{1}{u} + x, v = \frac{1}{u} \\ v' + v &= -x, (e^x v)' = -xe^x, ve^x = -\int xe^x dx + C = C - (x-1)e^x \\ v &= Ce^{-x} - x + 1 = \frac{1}{u} = e^{-y} \Rightarrow y = -\ln(Ce^{-x} + 1 - x) \end{aligned}$$

□

例题 9.0.12 定义勒让德多项式为

$$L_0(x) = 1, L_1(x) = x, L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xL_n(x) - \frac{n}{n+1}L_{n-1}(x)$$

记 $\delta_{mn} = \begin{cases} 0, m \neq n \\ 1, m = n \end{cases}$, 利用下面三个等式

$$(a) : \int_{-1}^1 L_m(x) L_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$$

$$(b) : L'_{n-1}(x) = xL'_n(x) - nL_n(x)$$

$$(c) : L'_{n+1}(x) = xL'_n(x) + (n+1)L_n(x)$$

证明

$$(1) : (x^2 - 1)L'_n(x) = nxL_n(x) - nL_{n-1}(x), \forall n \geq 1$$

$$(2) : \int_{-1}^1 (1-x^2)L'_m(x)L'_n(x)dx = \frac{2n(n+1)}{2n+1}\delta_{mn}, \forall m, n \geq 1$$

证明. 1. 采用归纳法, $n=1$ 时显然成立, 假设 n 时成立, 则 $n+1$ 时, 要验证

$$(x^2 - 1)L'_{n+1}(x) = (n+1)xL_{n+1}(x) - (n+1)L_n(x)$$

利用等式 (c) 和题干递推式有

$$(x^2 - 1)L'_{n+1}(x) = x(x^2 - 1)L'_n(x) + (n+1)(x^2 - 1)L_n(x)$$

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

所以

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)L'_{n+1}(x) &= (n+1)xL_{n+1}(x) - (n+1)L_n(x) \\ \Leftrightarrow x(x^2 - 1)L'_n(x) + (n+1)(x^2 - 1)L_n(x) &= (2n+1)x^2L_n(x) - nxL_{n-1}(x) - (n+1)L_n(x) \\ \Leftrightarrow x(x^2 - 1)L'_n(x) &= nx^2L_n(x) - nxL_{n-1}(x) \\ \Leftrightarrow (x^2 - 1)L'_n(x) &= nxL_n(x) - nL_{n-1}(x) \end{aligned}$$

这刚刚好就是归纳假设, 结论得证

2. 利用第一问, 以及等式 (b), 代入有 (最后化简运用等式 (a))

$$\begin{aligned} (1-x^2)L'_m(x)L'_n(x) &= (nL_{n-1}(x) - nxL_n(x))L'_m(x) \\ \int_{-1}^1 (1-x^2)L'_m(x)L'_n(x)dx &= \int_{-1}^1 (nL_{n-1}(x) - nxL_n(x))dL_m(x) \\ &= (nL_{n-1}(x) - nxL_n(x))L_m(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 L_m(x)(nL_{n-1}(x) - nxL_n(x))'dx \\ &= (1-x^2)L'_n(x)L_m(x) \Big|_{-1}^1 - n \int_{-1}^1 L_m(x)(L'_{n-1}(x) - xL'_n(x) - L_n(x))dx \\ &= -n \int_{-1}^1 L_m(x)(-nL_n(x) - L_n(x))dx = n(n+1) \int_{-1}^1 L_m(x)L_n(x)dx = \frac{2n(n+1)}{2n+1}\delta_{mn} \end{aligned}$$

□

注 9.0.1: 已知的三个等式也是容易证明的, 感兴趣的同学可以自己做一些, 都是基本方法

第十章 习题答案

10.1 第二章习题答案

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cot x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cos x - \ln \sin x}{\ln x} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln x} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = -1$$

因此所求的极限是 $\frac{1}{e}$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left((1+x)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x}}\right)(x \ln x)^2}{x^{\frac{1}{x}} - x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{x}} \left(e^{\frac{\ln(1+x) - \ln x}{x}} - 1\right)(x \ln x)^2}{x \left(e^{\left(x^{\frac{1}{x}} - 1\right) \ln x} - 1\right)} \\ &\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{1}{x}} - 1\right) \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1\right) \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \ln x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(1+x) - \ln x}{x} (x \ln x)^2}{x \left(x^{\frac{1}{x}} - 1\right) \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln x}{\left(x^{\frac{1}{x}} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln x}{\frac{\ln x}{x}} = 1 \end{aligned}$$

3. 参考例题 2.1.6 的 (2), 方法和操作一模一样, 分段放缩立刻得证

4. $\sum_{k=2}^n n^{\frac{1}{\ln k}} = n^{\frac{1}{\ln 2}} + n^{\frac{1}{\ln 3}} + \dots + n^{\frac{1}{\ln n}}$ 最大项是 $n^{\frac{1}{\ln 2}}$, 于是推测 $a = \frac{1}{\ln 2}, b = 1$

一般采用分段放缩来证明, 估值 $\frac{1}{\ln 2} \approx 1.44, \frac{1}{\ln 11} \approx 0.41$ 相差超过 1 (当然可以选择别的, 粗糙一些), 所以

$$n^{\frac{1}{\ln 2}} < \sum_{k=2}^n n^{\frac{1}{\ln k}} = n^{\frac{1}{\ln 2}} + \sum_{k=3}^{10} n^{\frac{1}{\ln k}} + \sum_{k=11}^n n^{\frac{1}{\ln k}} < n^{\frac{1}{\ln 2}} + 10n^{\frac{1}{\ln 3}} + n \cdot n^{\frac{1}{\ln 11}} = n^{\frac{1}{\ln 2}} + 10n^{\frac{1}{\ln 3}} + n^{\frac{1}{\ln 11} + 1}$$

由此可以看出, 根据夹逼准则, 就能立即得到结论 $a = \frac{1}{\ln 2}, b = 1$

5. 运用 stolz 公式和等价替换有

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=2}^{n-2} \frac{\ln C_n^k}{\ln k}}{\sum_{k=2}^{n-2} \frac{n-k}{\ln k}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=2}^{n-2} \frac{\ln C_n^k}{\ln k} - \sum_{k=2}^{n-3} \frac{\ln C_{n-1}^k}{\ln k}}{\sum_{k=2}^{n-2} \frac{n-k}{\ln k} - \sum_{k=2}^{n-3} \frac{n-k}{\ln k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln C_n^2}{\ln(n-2)} + \sum_{k=2}^{n-3} \frac{\ln \frac{C_n^k}{C_{n-1}^k}}{\ln k}}{\frac{2}{\ln(n-2)} + \sum_{k=2}^{n-3} \frac{1}{\ln k}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln \frac{n(n-1)}{2}}{\ln(n-2)} + \sum_{k=2}^{n-3} \frac{\ln n - \ln(n-k)}{\ln k}}{\frac{2}{\ln(n-2)} + \sum_{k=2}^{n-3} \frac{1}{\ln k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=2}^{n-3} \frac{\ln n - \ln(n-k)}{\ln k}}{\sum_{k=2}^{n-3} \frac{1}{\ln k}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=2}^{n-3} \frac{\ln n - \ln(n-k)}{\ln k}}{\frac{n}{\ln n}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{\ln n}}{\sum_{k=2}^{n-3} \frac{1}{\ln k}} \stackrel{\text{stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} \sum_{k=2}^{n-3} \frac{\ln n - \ln(n-k)}{\ln k}
 \end{aligned}$$

再待定系数分段放缩, 容易说明所求的极限是 1 (可能这并不容易, 简要证明如下)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^{n-3} \frac{\ln n - \ln(n-k)}{\ln k} &= \sum_{k=2}^{n-3} \frac{-\ln(1 - \frac{k}{n})}{\ln k}, m = \left[\frac{n}{\ln n} \right] \rightarrow \infty \\
 \frac{\ln n}{n} \sum_{k=m}^{n-3} \frac{-\ln(1 - \frac{k}{n})}{\ln k} &\sim \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{n-3} -\ln\left(1 - \frac{k}{n}\right), \left(\ln \left[\frac{n}{\ln n} \right] \sim \ln n\right) \\
 &\sim \int_{\frac{m}{n}}^{1 - \frac{3}{n}} -\ln(1-x) dx \sim \int_{\frac{1}{\ln m}}^1 -\ln(1-x) dx \sim \int_0^1 -\ln(1-x) dx = 1 \\
 \frac{\ln n}{n} \sum_{k=2}^m \frac{-\ln(1 - \frac{k}{n})}{\ln k} &\sim \frac{\ln n}{n} \sum_{k=2}^m \frac{\frac{k}{n}}{\ln k}, \left(\frac{k}{n} \leq \frac{1}{n} \left[\frac{n}{\ln n} \right] \rightarrow 0\right) \\
 \frac{\ln n}{n} \sum_{k=2}^m \frac{\frac{k}{n}}{\ln k} &= \frac{\ln n}{n^2} \sum_{k=2}^m \frac{k}{\ln k} \leq \frac{\ln n}{n^2 \ln 2} \frac{m(m+1)}{2} = O\left(\frac{m^2 \ln n}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{\ln n}\right) \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

6. 不妨设 $a = 0$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得 $n > N$ 时 $|a_n| < \varepsilon$, 并且 $|a_n| < M, \forall n \geq 1$ 对任意 $n > 2N$, 注意组合数 C_n^k 的单调性 (在 $k \leq n$ 时 k 越大组合数越大), 则

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2^n} \left| \sum_{k=0}^n C_n^k a_k \right| &\leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^N C_n^k |a_k| + \frac{1}{2^n} \sum_{k=N+1}^n C_n^k |a_k| < \frac{M}{2^n} \sum_{k=0}^N C_n^k + \frac{\varepsilon}{2^n} \sum_{k=N+1}^n C_n^k \\
 &< \frac{M(n+1)}{2^n} C_n^N + \varepsilon = \frac{M(n+1)n(n-1)\dots(n-N+1)}{N! 2^n} + \varepsilon
 \end{aligned}$$

指数快于多项式, 所以 n 充分大时成立 $\frac{1}{2^n} \left| \sum_{k=0}^n C_n^k a_k \right| < 2\varepsilon$, 结论得证

7. 本题的想法就是高中的二阶线性递推数列, 可以利用特征根凑一个等比数列, 然后迭代即可

记 $\lambda = \frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\varepsilon}}{2}, \mu = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\varepsilon}}{2}$, 可以取充分小的正数 $\varepsilon > 0$ 使得 $\frac{1}{\mu} > 1$

根据条件, 对于 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得 $n \geq N$ 时成立 $\frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n+2}} < \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon a_{n+2} + \varepsilon a_{n+1} > a_n$

代入计算可知上式等价于 $a_n + \lambda a_{n+1} < \mu(a_{n+1} + \lambda a_{n+2}), n \geq N$, 递推得到 $a_N + \lambda a_{N+1} < \mu^k(a_{N+k} + \lambda a_{N+k+1})$

也即 $a_{N+k} + \lambda a_{N+k+1} > \frac{1}{\mu^k}(a_N + \lambda a_{N+1})$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时右边趋于无穷, 因此左边两项中必有一个是无界的, 这就证明了数列 a_n 无界

8. 这种递推数列完全可以把通项公式求出来

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{\frac{1+a_n}{2}}, a_n = \cos x_n, \cos x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+\cos x_n}{2}} = \cos \frac{x_n}{2} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n \\ x_1 &= \arccos a_1, x_n = \frac{1}{2^{n-1}}x_1 = \frac{\arccos a_1}{2^{n-1}}, a_n = \cos x_n = \cos \frac{x_1}{2^{n-1}} \\ 4^n(1-a_n) &= 4^n\left(1 - \cos \frac{x_1}{2^{n-1}}\right) = 2 \cdot 4^n \sin^2 \frac{x_1}{2^n} = 2\left(2^n \sin \frac{x_1}{2^n}\right)^2 \rightarrow 2\arccos^2 a_1 \end{aligned}$$

9. 把根号里面的东西配方, 注意 $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ 便能去掉根号, 考虑三角换元

令 $a_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan b_n - \frac{1}{2}, b_n \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 则 $\tan b_1 = \sqrt{3}, b_1 = \frac{\pi}{3}$ 代入可得

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} \tan b_{n+1} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \tan b_n + \sqrt{\left(a_n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan b_n + \sqrt{\frac{3}{4}(\tan^2 b_n + 1)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \tan b_n + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos b_n} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sin b_n + 1}{\cos b_n} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{(\sin \frac{b_n}{2} + \cos \frac{b_n}{2})^2}{(\cos \frac{b_n}{2} + \sin \frac{b_n}{2})(\cos \frac{b_n}{2} - \sin \frac{b_n}{2})} \\ &= \frac{\sqrt{3} \cos \frac{b_n}{2} + \sin \frac{b_n}{2}}{2 \cos \frac{b_n}{2} - \sin \frac{b_n}{2}} = \frac{\sqrt{3} \frac{1 + \tan \frac{b_n}{2}}{2}}{1 - \tan \frac{b_n}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \left(\frac{b_n}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

所以 $b_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{2^{-n}}{3}\right)\pi$ 即 $a_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \left(\frac{1}{2} - \frac{2^{-n}}{3}\right)\pi - \frac{1}{2}$

来看等价量:

$$a_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \left(\frac{1}{2} - \frac{2^{-n}}{3}\right)\pi - \frac{1}{2} \sim \frac{\sqrt{3} \cos \frac{2^{-n}}{3}\pi}{2 \sin \frac{2^{-n}}{3}\pi} \sim \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\frac{2^{-n}}{3}\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} 2^{n-1}$$

10. 取对数, 利用斯特林公式有

$$\begin{aligned} \ln \left(\sqrt{n} \prod_{k=1}^n \frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \right) &= \frac{1}{2} \ln n + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k} - k \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln n + n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - n \ln(n+1) + \ln n! \\ &= \frac{1}{2} \ln n + n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - n \ln(n+1) + \ln \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} + \ln \left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + n \ln n - n \ln(n+1) + \ln \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \\ &= \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \left(\ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \gamma - 1 \end{aligned}$$

所以极限为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \prod_{k=1}^n \frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = e^{\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \gamma - 1} = \frac{\sqrt{2\pi}}{e^{\gamma+1}}$

11.

$$\begin{aligned}
& \ln \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+n+k}} \right)^n = n \ln \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+n+k}} \right) = n \ln \left(1 - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^2+n+k}} \right) \right) \\
& = n \ln \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^2+n+k} - n}{n\sqrt{n^2+n+k}} \right) = n \ln \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n\sqrt{n^2+n+k}(\sqrt{n^2+n+k}+n)} \right) \\
& \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n\sqrt{n^2+n+k}(\sqrt{n^2+n+k}+n)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{2n}{n\sqrt{n^2+n}(\sqrt{n^2+n}+n)} = \frac{2}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \rightarrow 0 \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+n+k}} \right)^n = - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{\sqrt{n^2+n+k}(\sqrt{n^2+n+k}+n)} \\
& \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{\sqrt{n^2+n+k}(\sqrt{n^2+n+k}+n)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{\sqrt{n^2+n}(\sqrt{n^2+n}+n)} = \frac{n^2 + \frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n^2+n}(\sqrt{n^2+n}+n)} \rightarrow \frac{3}{2} \\
& \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{\sqrt{n^2+n+k}(\sqrt{n^2+n+k}+n)} \geq \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{\sqrt{n^2+2n}(\sqrt{n^2+2n}+n)} = \frac{n^2 + \frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n^2+2n}(\sqrt{n^2+2n}+n)} \rightarrow \frac{3}{2} \\
& \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+n+k}} \right)^n = e^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

12. 利用压缩映射是最快的方法, 比单调有界和考虑二次复合要省事很多:

$$|x_{n+2} - 2| = \frac{|x_n - 2|}{(3 + \sqrt{x_n + 7})(\sqrt{7 - \sqrt{7 + x_n}} + 2)} \leq \frac{1}{6} |x_n - 2|$$

由此可知所求的极限是 2

13.

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \sqrt{x^2+k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (\sqrt{x^2+k} - x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{1}{\sqrt{x^2+k} + x} \\
& \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \sqrt{x^2+k} \right| \leq \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{\sqrt{x^2+k} + x} \leq \frac{1}{2x} \sum_{k=0}^n C_n^k = \frac{2^{n-1}}{x}
\end{aligned}$$

由此可知所求极限是 0

14. 直接解决一个推广问题

命题 10.1.1: 一般结论

$$\text{设 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = A > 0, \text{ 令 } y_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \text{ 则有 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^2}{y_{n+1}} - \frac{n^2}{y_n} \right) = \frac{e}{A}.$$

证明. 不妨设 $A = 1$, 否则将 a_n 换成 Aa_n 即可, 设 $a_n = nb_n$, 则 $b_n \rightarrow 1$ 且 $y_n = \sqrt[n]{n!b_1b_2\dots b_n}$
 先来证明 $y_{n+1} - y_n \rightarrow \frac{1}{e}$, 运用斯特林公式 $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, stolz 公式以及等价无穷小替换有

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} (y_{n+1} - y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n+1]{(n+1)!b_1b_2\dots b_nb_{n+1}} - \sqrt[n]{n!b_1b_2\dots b_n} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} \sqrt[n]{b_1b_2\dots b_n} \left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!b_1b_2\dots b_nb_{n+1}}}{\sqrt[n]{n!b_1b_2\dots b_n}} - 1 \right), \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln b_k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln b_n = 0 \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e} \left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!b_1b_2\dots b_nb_{n+1}}}{\sqrt[n]{n!b_1b_2\dots b_n}} - 1 \right), \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n+1]{b_1b_2\dots b_nb_{n+1}}}{\sqrt[n]{b_1b_2\dots b_n}} = 1 \right) \\
&= \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!b_1b_2\dots b_nb_{n+1}}}{\sqrt[n]{n!b_1b_2\dots b_n}} \right) = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{((n+1)!b_1b_2\dots b_nb_{n+1})^{\frac{n}{n+1}}}{n!b_1b_2\dots b_n}, \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)!)^{\frac{n}{n+1}}}{n!} = e \right) \\
&= \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{eb_{n+1}^{\frac{n}{n+1}}}{(b_1b_2\dots b_n)^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \ln b_{n+1} - \frac{\sum_{k=1}^n \ln b_k}{n+1} \right) = \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

显然 $y_n \rightarrow \infty$, 结合以上结果有

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^2}{y_{n+1}} - \frac{n^2}{y_n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{y_{n+1}} - \frac{1}{y_n} \right) + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{y_n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_{n+1} - y_n} - \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{y_{n+1} - y_n}{y_n y_{n+1}} \\
&= 2e - \lim_{n \rightarrow \infty} (y_{n+1} - y_n) \left(\frac{n}{y_n} \right)^2 = 2e - \frac{1}{e} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{y_n} \right)^2 = e
\end{aligned}$$

由此, 原题作为一种特殊情况, 根据斯特林公式可知结论成立

□

15. 将数列分成 p 个不相交的子列, 证明每一个的极限都是 $\frac{\lambda}{p}$ 即可, 由 stolz 公式知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{kp+r}}{kp+r} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{(k+1)p+r} - a_{kp+r}}{p} = \frac{\lambda}{p}, r = 1, 2, \dots, p$$

结论得证

10.2 第三章习题答案

1. 不一定存在, 考虑形如 $x^m \sin \frac{1}{x^n}$ 的函数即可

2. 利用二倍角公式知

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{\cos^2 2x + 1}{2} = \frac{\frac{1 + \cos 4x}{2} + 1}{2} = \frac{1}{4} \cos 4x + \frac{3}{4}$$

进而根据 $\cos ax$ 的高阶导公式可知结论显然成立

3.

$$p(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k)^{r_k}, \ln p(x) = \sum_{k=1}^n r_k \ln(x - x_k), \frac{p'(x)}{p(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{x - x_k}$$

$$\frac{p''(x)p(x) - p'^2(x)}{p^2(x)} = - \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{(x - x_k)^2} \leq 0 \Rightarrow p'^2(x) - p''(x)p(x) \geq 0$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) \tan 3x}{(e^{x^2} - 1) \sin x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x)}{x^2}$$

$$= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) - f(1)}{\sin^2 x + \cos x - 1} \cdot \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{x^2}$$

$$= 3f'(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{x^2} = \frac{3}{2} f'(1)$$

5. 归纳容易证明, 只需要代入验证, 均为显然的

6. 考虑

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{x^2 + 1} \Rightarrow g\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{\frac{1}{n^2} + 1} = 0, \forall n \geq 1$$

然而 $g(x)$ 是任意阶可导的并且 $x = 0$ 是 $g(x)$ 零点的聚点, 所以 (和上课例题一样) $g^{(n)}(0) = 0$ 对任意 n 恒成立, 因此所求记为 $\frac{1}{x^2 + 1}$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数, 显然奇数阶是零, 偶数阶是 $(-1)^n (2n)!$

7.

$$x^2 + 4xy + e^y = 1, 2x + 4(y + xy') + e^y y' = 0 \Rightarrow y' = -2 \frac{2y + x}{e^y + 4x}$$

$$y'' = -2 \frac{(2y' + 1)(e^y + 4x) - (e^y y' + 4)(2y + x)}{(e^y + 4x)^2} \Rightarrow y(0) = 0, y'(0) = -2, y''(0) = 6$$

8. 直接代入验证计算即可

9. 任意给定 $\varepsilon > 0$. 因为 $f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = o(x)$ ($x \rightarrow 0$), 存在 $\delta \in (0, 1)$, 对任何 $x \in U^\circ(0; \delta)$, 有

$$\left| \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{即} \quad \left| f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{3} |x|.$$

于是对任何 $x \in U^\circ(0; \delta)$ 及 $n \in \mathbf{N}_+$, 有

$$\left| \frac{f(x)}{x} - 0 \right| = \frac{|f(x)|}{|x|} \leq \frac{|f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)|}{|x|} + \dots + \frac{|f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)|}{|x|} + \frac{|f\left(\frac{x}{2^n}\right)|}{|x|}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{2} + \dots + \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{|f\left(\frac{x}{2^n}\right)|}{|x|} = \frac{2\varepsilon}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{|f\left(\frac{x}{2^n}\right)|}{|x|}.$$

因此, 对任何 $x \in U^\circ(0; \delta)$, 由条件 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 有

$$\left| \frac{f(x)}{x} - 0 \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{x} - 0 \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2\varepsilon}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{|f\left(\frac{x}{2^n}\right)|}{|x|} \right) = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

这就证明了 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 。

10. 运用柯西方程, 结合连续性可知所求为 $f(x) = Ce^x$

11. 不妨设 $a \in (1, 2)$, 否则利用条件递推有限次, 将 a 卡在 2 的两个相邻的幂次之间即可, 对于 $a \in (1, 2)$ 的情况, 结合条件和单调性可知结论显然, 本题得证

12. 回忆高考题: 一个函数如果有两个对称中心, 那么就是周期函数, 只不过这里等式变成了极限式

注意一次函数显然具备题中所说的性质, 因此减去一个一次函数, 不妨设 $f(0) = f(1) = 0$, 我们的目标是证明 $f(x)$ 恒为零, 从条件

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f(-x)) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(1+x) + f(1-x)) = 0$$

可知

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f(2-x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(2-x) - f(-x)) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+2) - f(x)) = 0 \\ 2f(a+2) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(a+2+x) + f(a+2-x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(a+x) + f(a-x)) = 2f(a) \\ 2f(-a) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(-a+x) + f(-a-x)) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(a-x) + f(a+x)) = 2f(a) \\ &\Rightarrow f(x+2) = f(x), f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

也就是说, $f(x)$ 是周期为 2 的连续的奇函数, 并且 $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$, 如果 $f(x)$ 不恒为零, 则考虑最值点 a , 代入到条件中可知矛盾, 从而得证

13. 容易求出 $g'(x) = \begin{cases} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{A}{2}, & x = 0 \end{cases}$, 显然是连续的

14. 考虑 $g(x) = e^{(a+bi)x}$, 则 $g^{(n)}(x) = (a+bi)^n e^{(a+bi)x}$, 再设 $a+bi = \sqrt{a^2+b^2}e^{i\theta}$, $\theta = \arctan \frac{b}{a}$ 因此

$$(e^{ax} \cos x)^{(n)} + i(e^{ax} \sin x)^{(n)} = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{(a+bi)x} e^{ni\theta} = e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} (\cos(bx + n\theta) + i \sin(bx + n\theta))$$

两边取虚部得到 $f^{(n)}(x) = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \sin\left(bx + n \arctan \frac{b}{a}\right)$

15. 如果不同的数列对应着不同的极限, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = A, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(d_n) - f(c_n)}{d_n - c_n} = B, A \neq B$$

现在取 $A_n = \begin{cases} a_k, n = 2k-1 \\ c_k, n = 2k \end{cases}$, $B_n = \begin{cases} b_k, n = 2k-1 \\ d_k, n = 2k \end{cases}$ 则相应的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(B_n) - f(c_n)}{d_n - c_n}$ 不存在

这说明 a_n, b_n 随便取极限都是一样的, 取 $a_n = x, b_n = 2x, x > 0$, 则问题化为上课例题或者习题 9, 进而得证

10.3 第四章习题答案

1. 不妨设 $a = 0, b = 1$ 。待定系数换元, 可以发现: 考虑

$$g(x) = f(x) + \frac{f'(0) - f'(1)}{2}x^2 - f'(0)x$$

则 $g(x)$ 满足

$$g'(0) = g'(1) = 0, g''(x) = f''(x) - (f'(1) - f'(0))$$

于是等价于说明: $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 中可导, 在 $(0, 1)$ 中二阶可导, 且 $g'(0) = g'(1) = 0$, 则存在 $u \in (0, 1)$ 使得 $g''(u) = 0$

反证法, 利用导数介值性, 则不妨设 $g''(x) > 0, x \in (0, 1)$ 恒成立, 于是对任意充分小的正数 $\varepsilon > 0$, $g'(x)$ 在区间 $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ 中严格单调递增

因为 $g'(0) = 0$, 所以存在一列严格递减的 $x_n > 0, x_n \rightarrow 0$ 使得 $g'(x_n) \rightarrow 0$ (思考这个命题的反面, 反证法, 意味着存在 $\delta > 0, \varepsilon_0 > 0$ 使得对任意 $x \in (0, \varepsilon_0)$ 都有 $|f'(x)| \geq \delta$, 进而在 $(0, \varepsilon_0)$ 区间内, $f'(x) \geq \delta$ 与 $f'(x) \leq -\delta$ 必有一个恒成立, 不妨设为前者, 接着利用达布中值定理也就是导数介值性, 可以看出来矛盾, 比如说考虑 $f(x) - \frac{\delta}{2}x$ 这个函数, 在 0 处导数为负, 在另一端导数为正, 所以会在内点取到最小值, 那么该点导数为零, 该点就有 $g'(x) = \frac{\delta}{2}$, 导致矛盾), 同样也存在一列严格递增的 $y_n \rightarrow 1, y_n < 1$ 使得 $g'(y_n) \rightarrow 0$

由此容易说明, 上述性质与任意 $\varepsilon > 0$, $g'(x)$ 在区间 $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ 中严格单调递增这个性质是矛盾的 (当然严格来讲还需要写几步证明), 结论得证

注: 本题本质上是一个性态分析问题, 来自谢惠民参考题二, 有一定难度

2. 本题的核心想法是对导数积分, 从二阶导开始往回推, 则有

$$\begin{aligned} -1 - \frac{x}{4a} &\leq f'(x) \leq -1 + \frac{x}{4a} \\ b = f(a) &= f(0) + \int_0^a f'(x) dx \leq a + \int_0^a -1 + \frac{x}{4a} dx = \frac{a}{8} \\ b = f(a) &= f(0) + \int_0^a f'(x) dx \geq a + \int_0^a -1 - \frac{x}{4a} dx = -\frac{a}{8} \\ f(a+b) &= f(a) + \int_a^{a+b} f'(x) dx \leq b + \int_a^{a+b} -1 + \frac{x}{4a} dx = \frac{b^2 + 2ab}{8a} \leq \frac{17a}{512} \\ f(a+b) &= f(a) + \int_a^{a+b} f'(x) dx \geq b + \int_a^{a+b} -1 - \frac{x}{4a} dx = -\frac{b^2 + 2ab}{8a} \geq -\frac{17a}{512} \end{aligned}$$

所以结论成立

3. 本题只需要将目标视为一个微分方程, 把解算出来, 减去这个解, 就可以把所有的边界点条件以及右端的函数全部调成零, 然后应用定理 4.6.2 (注意不是完全一模一样的直接用, 但是几乎一样, 方法更是一样的) 即可

具体证明如下: 先作齐次化, 找一个函数 g 满足 $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}, g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi, g(0) = 1$ 且 $2g''(x) - 2g'(x) + g(x) - (x^2 - 4x) = 4$

解微分方程可得 $g(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) + x^2$

令 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则 h 满足 $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = h(0) = 0$, 要证明: 存在 $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $2h''(\xi) - 2h'(\xi) + h(\xi) = 0$, 对应的特征方程为 $2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}$.

令 $F(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} h(x)}{\cos \frac{x}{2}}$, 则 $F(0) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, 所以存在 $\xi_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $F'(\xi_1) = 0$

又 $F'(x) = e^{-\frac{x}{2}} \frac{(2h'(x) - h(x)) \cos \frac{x}{2} + h(x) \sin \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}$, 令 $H(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left((2h'(x) - h(x)) \cos \frac{x}{2} + h(x) \sin \frac{x}{2} \right)$, 则 $H(\xi_1) = H\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, 因而存在 $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $H'(\xi) = 0$, 由此即得 $2h''(\xi) - 2h'(\xi) + h(\xi) = 0$, 得证

4. 插值, 容易发现应该考虑函数

$$g(x) = f(x) - \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{2} - \left(\frac{11}{24} - f(0)\right)x^2 - f(0)$$

它满足 $g(-1) = g(0) = g'(0) = g(1) = 0$, 使用三次罗尔中值定理, 就得到了 $g'''(u) = f'''(u) - u - 3 = 0$, 得证

5. 反证法, 利用导数的介值性, 不妨设 $f''(x) > 2f(x)f'(x)$ 恒成立, 于是

$$\begin{aligned} (f'(x) - f^2(x))' &> 0, f'(x) - f^2(x) > f'(0) - f^2(0) = 1 \\ \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} &> 1, (\arctan f(x) - x)' > 0, \arctan f(x) - x > \arctan f(0) - 0 = 0 \\ \arctan f(x) &> x \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \arctan f\left(\frac{\pi}{4}\right) > \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

导致矛盾

6. 根据条件容易看出 $f(0) = f'(0) = f(\pi) = 0$, 所以函数 $e^x f(x)$ 有三个零点, 利用罗尔中值定理可知 $f(x) + f'(x)$ 有两个零点, 进而考虑 $e^{-x}(f(x) + f'(x))$, 再来一次罗尔中值定理可知, $f''(x) - f(x)$ 有一个零点, 结论得证

7. 首先考虑微分方程 $f''(x) + xf'(x) + \frac{(x^2+1)}{4}f(x) = 0$, 解微分方程 (需要观察, 尝试) 得到两个线性无关的解为 $f(x) = e^{\frac{x^2-2x}{4}}, e^{\frac{x^2+2x}{4}}$, 所以考虑这样子的求导关系

$$\begin{aligned} \left(e^{\frac{x^2-2x}{4}}f(x)\right)' &= e^{\frac{x^2-2x}{4}}\left(f'(x) + \frac{x-1}{2}f(x)\right), \left(e^{\frac{x^2+2x}{4}}f(x)\right)' = e^{\frac{x^2+2x}{4}}\left(f'(x) + \frac{x+1}{2}f(x)\right) \\ \left(e^{\frac{x^2-2x}{4}}\left(f'(x) + \frac{x-1}{2}f(x)\right)\right)' &= e^{\frac{x^2-2x}{4}}\left(f''(x) + xf'(x) + \frac{x^2+1}{4}f(x)\right) \\ \left(e^{\frac{x^2+2x}{4}}\left(f'(x) + \frac{x+1}{2}f(x)\right)\right)' &= e^{\frac{x^2+2x}{4}}\left(f''(x) + xf'(x) + \frac{x^2+1}{4}f(x)\right) \end{aligned}$$

根据导数的介值性 (注意, 必须是利用导数介值性, 而不是“连续性”, 因为 $f''(x)$ 并没有连续性), 采用反证法, 则可以设 $f''(x) + xf'(x) + \frac{x^2+1}{4}f(x)$ 在 $(0, 1)$ 中恒正或者恒负, 下面分类讨论

若 $f''(x) + xf'(x) + \frac{x^2+1}{4}f(x) > 0$ 在 $(0, 1)$ 中恒成立, 令

$$g(x) = e^{\frac{x^2-2x}{4}}\left(f'(x) + \frac{x-1}{2}f(x)\right), h(x) = e^{\frac{x^2+2x}{4}}\left(f'(x) + \frac{x+1}{2}f(x)\right)$$

则 $g(x), h(x)$ 均在 $[0, 1]$ 中严格单调递增, 根据条件有

$$g(0) = f'(0) - \frac{1}{2}f(0) = 0, h(1) = e^{\frac{3}{4}}(f'(1) + f(1)) = 0$$

所以 $g(1) > g(0) = 0, h(0) < h(1) = 0$ 也即

$$g(1) = f'(1) > 0 \Rightarrow f(1) < 0, h(0) = f'(0) + \frac{1}{2}f(0) = f(0) < 0$$

进而 $p(x) = f'(x) + \frac{x}{2}f(x)$ 满足

$$p(0) = f'(0) = \frac{1}{2}f(0) < 0, p(1) = f'(1) + \frac{1}{2}f(1) = -\frac{1}{2}f(1) > 0$$

这与条件: $p(x)$ 没有零点矛盾

对于另一种情况, 也即 $f''(x) + xf'(x) + \frac{x^2+1}{4}f(x) < 0$ 在 $(0, 1)$ 中恒成立, 则 $g(x), h(x)$ 均在 $[0, 1]$ 中严格单调递减, 且 $g(0) = h(1) = 0$, 于是 $g(1) < 0, h(0) > 0$, 代入, 对应的是

$$f'(1) < 0, f(1) > 0, f(0) > 0, f'(0) > 0$$

进而

$$p(0) = f'(0) = \frac{1}{2}f(0) > 0, p(1) = f'(1) + \frac{1}{2}f(1) = -\frac{1}{2}f(1) < 0$$

导致矛盾, 结论得证

注: 本题难度较大, 综合性强, 而且条件那个等式并不是让你考虑微分方程的! 有迷惑性, 容易让你走偏

8. 考虑 (利用 Beta 函数)

$$g(x) = f(x) - \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \int_0^x t^k(1-t)^{n-k-1} dt, g(0) = g(1)$$

利用罗尔中值定理可知结论成立

9. 反证法, 对于第一个, 不妨设 $xf(x) > \int_0^x tf(t) dt, x \in (0, 1)$, 考虑

$$g(x) = e^{-x} \int_0^x tf(t) dt, g'(x) = e^{-x} \left(xf(x) - \int_0^x tf(t) dt \right) > 0$$

所以 $g(x)$ 单调递增, 得到 $g(x) \geq g(0) = 0$ 也即

$$\int_0^x tf(t) dt > 0, x \in (0, 1] \Rightarrow xf(x) > \int_0^x tf(t) dt > 0, f(x) > 0, x \in (0, 1]$$

这会导致 $\int_0^1 f(x) dx > 0$, 矛盾

对于第二个, 设 $f(x)$ 的最大值是 $f(x_0) = M$, 最小值是 m , 则不妨设 $M > 0, m < 0$ (因为若其中一个是零, 根据条件, 则 $f(x)$ 恒为零, 结论显然成立), 采用反证法, 不妨设 (不然可以考虑 $-f(x)$)

$$x^2 f(x) < \int_0^x (t^2 + t) f(t) dt, x \in (0, 1)$$

进而对任意 $x \in [0, 1]$ 有

$$x^2 f(x) \leq \int_0^x (t^2 + t) f(t) dt \leq M \int_0^x t^2 + t dt = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) M \Rightarrow f(x) \leq \frac{5}{6} M$$

这与 $f(x)$ 最大值 M 矛盾, 结论得证

10. 注意到 $f(x) = 1, x - \frac{1}{2}$ 时条件等式都成立, 所以不妨设 $f(\frac{1}{2}) = f'(\frac{1}{2}) = 0$, 然后采用反证法, 不妨设 $f''(x) > 0, x \in (0, 1)$ 也即 $f'(x)$ 在 $[0, 1]$ 中严格单调递增, 根据条件等式有

$$\int_0^{\frac{1}{4}} f(x) dx + \int_{\frac{3}{4}}^1 f(x) dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x) dx$$

然而根据 $f'(x), f''(x)$ 性质可知, $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 中严格递减, 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 中严格递增, 于是上面的等式, 左边一定比右边大, 导致矛盾

11. 对任意 $v \in (0, 1)$, 中值定理有 $w \in (0, v)$ 使得

$$f''(w) = \frac{f'(v) - f'(0)}{v - 0} = \frac{f'(v)}{v} \Rightarrow v f''(w) = f'(v)$$

记 $g(x) = f'(x)$ 是连续函数, 满足 $g(0) = 0$, 则需要证明: 存在 $u, v \in (0, 1)$ 使得 $g(u) = \frac{\pi}{2} g(v) \sin 2u$

显然 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 中有最大值 $M \geq 0$ 以及最小值 $m \leq 0$, 不妨设 $M > m$, 否则 $M = m = 0$ 意味着 $g(x)$ 恒为零, 结论显然成立

并且函数 $h(x) = \frac{g(x)}{\frac{\pi}{2} \sin 2x}$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{\frac{\pi}{2} \sin 2x} = \frac{1}{\pi} f''(0)$ 存在, 所以 $h(x)$ 是 $[0, \frac{\pi}{2})$ 中的连续函数, 因此只要证明存在 $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ 使得 $h(x) \in (m, M)$ 即可 (一旦成立, 则利用连续性可知一个邻域内取值都在 (m, M) 之间, 进而能够克服“区间端点”的问题, 保证都在开区间中, 细节自行说明, 直观上是显然的)

反证法, 不妨设 $h(x) \geq M$ 恒成立, 则

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\pi} g\left(\frac{\pi}{4}\right) \geq M \Rightarrow M \geq g\left(\frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\pi}{2} M \Rightarrow M = 0$$

这说明 $g(x) \leq 0$ 恒成立, 并且 $h(x) = \frac{g(x)}{\frac{\pi}{2} \sin 2x} \geq 0$ 在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 中恒成立, 那只能 $g(x)$ 恒为零, 导致矛盾, 得证
注: 本题也可以去凑柯西中值定理然后做掉, 无需性态分析, 不过你不一定凑的出来

12. 本题只需要证明 $f(x)$ 有两个零点, 显然 $f(x)$ 有一个零点, 若只有一个, 可以记为 $f(x_0)$, 条件表明 $g(x)$ 严格单调, 所以考虑函数 $g(x) - g(x_0)$, 它也是只有一个零点 x_0 , 根据条件得到 $\int_0^1 f(x)(g(x) - g(x_0)) dx = 0$, 但是被积函数不变号并且只有一个零点, 这是不可能的, 矛盾

13. 直接分部积分即可解决问题

$$\begin{aligned} \int_0^1 (360x^2 - 360x + 60) f(x) dx &= \int_0^1 f(x) d(120x^3 - 180x^2 + 60x) \\ &= (120x^3 - 180x^2 + 60x) f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (120x^3 - 180x^2 + 60x) f'(x) dx \\ &= - \int_0^1 f'(x) d(30x^4 - 60x^3 + 30x^2) = \int_0^1 f''(x) (30x^4 - 60x^3 + 30x^2) dx \\ &= 30 \int_0^1 f''(x) x^2 (x-1)^2 dx = 30 f''(\xi) \int_0^1 x^2 (1-x)^2 dx = f''(\xi) \end{aligned}$$

14. 看成给定初值的微分方程, 先对这一组初值去解微分方程, 得到 $f(x) = e^x(2x+1)$ (注意, 实际上边界条件多给了一个, 但是刚刚好是不冲突的), 然后考虑 $g(x) = f(x) - e^x(2x+1)$, 则 $g(0) = g(1) = g'(1) = 0$, 要证明 $g''(u) - 2g'(u) + g(u) = 0$, 接下来就是标准做法, 考虑

$$\begin{aligned} p(x) &= e^{-x} g(x), p'(x) = e^{-x} (g'(x) - g(x)), p'(\xi) = p'(1) = 0 \\ p''(x) &= e^{-x} (g''(x) - 2g'(x) + g(x)), p''(u) = 0 \end{aligned}$$

由此得证

10.4 第五章习题答案

1.

$$\begin{aligned}
 \int \arcsin x \arccos x dx &= x \arcsin x \arccos x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} (\arccos x - \arcsin x) dx \\
 &= x \arcsin x \arccos x + \int (\arccos x - \arcsin x) d\sqrt{1-x^2} \\
 &= x \arcsin x \arccos x + \sqrt{1-x^2} (\arccos x - \arcsin x) + \int 2dx \\
 &= x \arcsin x \arccos x + \sqrt{1-x^2} (\arccos x - \arcsin x) + 2x + C
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} f(a \cos x + b \sin x) dx &= \int_0^{2\pi} f(\sqrt{a^2+b^2} \cos(x+\theta)) dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2} \cos x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2} \cos x) dx
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos 2x} dx &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos x} dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2+\frac{1-\tan^2 \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{2+\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}} dx \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{2}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{2}{t^2+3} dt = \frac{2 \arctan \frac{t}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

4. 可以强行三角换元去做

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx &\stackrel{x^3=-\sin^2\theta}{=} \int \frac{1}{\sqrt[3]{1-\sin^2\theta}} \cdot \frac{-2}{3} \frac{1}{\sin^{\frac{1}{3}}\theta} \cos\theta d\theta = -\frac{2}{3} \int \frac{1}{\tan^{\frac{1}{3}}\theta} d\theta \\
 (y = \tan^{\frac{1}{3}}\theta, \theta = \arctan y^3) &= -\frac{2}{3} \int \frac{1}{y} \frac{3y^2}{1+y^6} dy = -2 \int \frac{y}{y^6+1} dy \stackrel{u=y^2}{=} - \int \frac{1}{u^3+1} du
 \end{aligned}$$

之后的积分容易计算, 当然从这个过程里面也可以找到直接的换元, 如下

$$x^3 = -\sin^2\theta, y^3 = \tan\theta, y^6 = u^3 = \tan^2\theta, u^3 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{1}{1-\sin^2\theta} = \frac{1}{1+x^3} \Rightarrow u = -\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$$

因此, 做这个换元, 一步就可以换过去, 并且中间还不会遇到开方正负或者定义域之类的问题 (三角换元那个做法, 过程的严谨性会差一点), 最终的结果是

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2} \ln|u+1| - \frac{1}{6} \ln|u^3+1| + C, u = -\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$$

受前面的启发, 第二个可以直接做换元

$$u = \frac{x}{\sqrt[4]{1+x^4}} \Leftrightarrow x = \frac{u}{\sqrt[4]{1-u^4}}, dx = \frac{1}{(1-u^4)^{\frac{5}{4}}} du, \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \sqrt[4]{1-u^4}$$

于是最终答案为

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} dx = \int \frac{1}{1-u^4} du = \frac{\arctan u}{2} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C, u = \frac{x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$$

由此可见, 其实一般的这种类型的积分, 基本上都可以类似的根号换元做出来

注: 本题比较不正经, 简单看看即可, 考试应该不会考, 属于积分爱好者范畴, 记住换元就够了

5. 注意求导关系 $\left(e^{-x} \left(1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)\right)' = -e^{-x} \frac{x^n}{n!}$, 所以

$$\begin{aligned} \int \frac{x^n}{1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}} dx &= -n! \int \frac{-e^{-x} \frac{x^n}{n!}}{e^{-x} \left(1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)} dx \\ &= -n! \int \frac{\left(e^{-x} \left(1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)\right)'}{e^{-x} \left(1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)} dx = -n! \ln \left(e^{-x} \left(1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)\right) + C \end{aligned}$$

6. 你可以直接分区间计算, 然后斯特林公式求极限 (自行完成), 实际上这个积分长的很像欧拉麦克劳林公式, 因为刚刚好 $\{x\} - \frac{1}{2}$ 就是欧拉麦克劳林公式里面的 $b_1(x)$, $\frac{1}{x} = (\ln x)'$, 这样做更快更直接, 所以考虑

$$\sum_{k=1}^n \ln k = \int_1^n \ln x dx + \frac{\ln 1 + \ln n}{2} + \int_1^n \frac{\{x\} - \frac{1}{2}}{x} dx$$

取极限得到积分为

$$\int_1^\infty \frac{\{x\} - \frac{1}{2}}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n! - (n \ln n - n + 1) - \frac{1}{2} \ln n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} - 1 = \frac{1}{2} \ln(2\pi) - 1$$

7.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(x^2 + 6)(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(x \cos x - 3 \sin x)^2} dx \\ &= \int \begin{vmatrix} x & 3 \\ -2 & x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} \frac{dx}{(x \cos x - 3 \sin x)^2} \\ &= \int \begin{vmatrix} x \cos x - 3 \sin x & x \sin x + 3 \cos x \\ -2 \cos x - x \sin x & x \cos x - 2 \sin x \end{vmatrix} \frac{dx}{(x \cos x - 3 \sin x)^2} \\ &= \int \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x \cos x - 3 \sin x} dx + \int \frac{(x \sin x + 3 \cos x)(2 \cos x + x \sin x)}{(x \cos x - 3 \sin x)^2} dx \end{aligned}$$

由于 $\frac{d}{dx}(x \cos x - 3 \sin x) = -(2 \cos x + x \sin x)$, 故可对上述第二个积分利用分部积分, 得

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{(x \sin x + 3 \cos x)(2 \cos x + x \sin x)}{(x \cos x - 3 \sin x)^2} dx \\ &= \int (x \sin x + 3 \cos x) d\left(\frac{1}{x \cos x - 3 \sin x}\right) \\ &= \frac{x \sin x + 3 \cos x}{x \cos x - 3 \sin x} - \int \frac{d(x \sin x + 3 \cos x)}{x \cos x - 3 \sin x} \\ &= \frac{x \sin x + 3 \cos x}{x \cos x - 3 \sin x} - \int \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x \cos x - 3 \sin x} dx \end{aligned}$$

所以 $I = \int \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x \cos x - 3 \sin x} dx + I_1 = \frac{x \sin x + 3 \cos x}{x \cos x - 3 \sin x} + C$.

注: 本题欣赏一下即可, 不必纠结, 这种方法和题目在正经考试中比较偏, 一般不出现

8. 从被积函数来看, 可以待定系数猜一下原函数, 求导有

$$\begin{aligned} \left(e^{x+\frac{1}{x}} f(x)\right)' &= e^{x+\frac{1}{x}} \left(f'(x) + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) f(x)\right) = e^{x+\frac{1}{x}} \left(x + 1 - \frac{1}{x}\right) \\ f'(x) + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) f(x) &= x + 1 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 f'(x) + (x^2 - 1) f(x) = x^3 + x^2 - x \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 应该是一次函数, 进而容易算出来 $f(x) = x$, 所以 $\int e^{x+\frac{1}{x}} \left(x+1-\frac{1}{x}\right) dx = e^{x+\frac{1}{x}} x + C$

9.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x (\arctan e^x + \arctan e^{-x}) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2}$$

10. 显然, 曲线关于 x 轴, y 轴以及 $y = x$ 都是对称的, 并且画图 (可以取点看, 比如固定 $x_0 \in (0, 1)$, 那么 $y(x_0)$ 在 $n \rightarrow \infty$ 时, 显然要趋于 1, 就确定了曲线) 直观上容易看出来曲线趋近于一个正方形, 所以拖测极限是 8

下面进行证明, 易知曲线与 $y = x$ 在第一象限内交点是 $P\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}\right)$, 解方程有 $y = (1 - x^{2n})^{\frac{1}{2n}}$, 于是在 $x \in \left[0, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}\right]$ 时 $y(x)$ 单调递减, 并且直观上看 $y'(x)$ 非常小, 几乎是零, 由此放缩, 可知

$$I = \int_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}} \sqrt{y'^2 + 1} dx < \int_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}} |y'| + 1 dx = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} - \int_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}} y' dx = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} - 1\right) = 1$$

因此结论得证, 所求的极限是 8

11. 极坐标换元 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 代入则方程变为 $r = a \cos \theta (\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta)$, 来求参数范围

根据 $r \geq 0$, 参数应该满足两种情况之一:

$$\begin{aligned} \cos \theta \geq 0, \cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta \geq 0 &\Leftrightarrow |\tan \theta| \leq \frac{1}{3}, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \\ \cos \theta \leq 0, \cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta \leq 0 &\Leftrightarrow |\tan \theta| \geq \frac{1}{3}, |\theta| \geq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

因此参数分为三个部分: $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right], \left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right]$, 容易知道每一部分图像其实都是一样的 (如果不知道, 那你就同样的积分算三遍, 或者利用显然的关于 x 轴对称, 这样积分只需要算两遍, 无非麻烦点), 所以面积为

$$S = 3 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{a \cos \theta (\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta)} r dr d\theta = \frac{3}{2} a^2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 \theta (1 - 4 \sin^2 \theta)^2 d\theta = \frac{\pi}{4} a^2$$

最后的一元三角函数定积分计算自行完成

12. 此类问题都是采用微元法解决, 近似成规则的图形然后用高考知识算几何量, 再积分

首先, 由 $0 \leq \theta \leq \beta, 0 \leq r \leq a$ 所表示的扇形区域绕极轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V = \frac{\pi}{3} a^2 \sin^2 \beta a \cos \beta + \pi \int_{a \cos \beta}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{2\pi}{3} (1 - \cos \beta) a^3$$

然后作 $[\alpha, \beta]$ 的划分: $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n = \beta$,

考察由 $\theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i, 0 \leq r \leq r(\theta)$ 所表示的小曲边扇形区域绕极轴旋转一周所成的旋转体的体积, 这小块可近似看作扇形, 于是这小块的体积应近似等于

$$\Delta V_i = \frac{2\pi}{3} r^3(\theta_i) (1 - \cos \theta_i) - \frac{2\pi}{3} r^3(\theta_i) (1 - \cos \theta_{i-1}) \approx \frac{2\pi}{3} r^3(\theta_i) \cdot \sin \theta_i \Delta \theta_i$$

$$\text{从而 } V \approx \sum_{i=1}^n \frac{2\pi}{3} r^3(\theta_i) \sin \theta_i \Delta \theta_i$$

$$\text{令 } \lambda = \max_{1 \leq i \leq n} (\Delta \theta_i) \rightarrow 0, \text{ 就有 } V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\theta) \sin \theta d\theta$$

注: 实际考试书写可以简洁不少, 简单计算微元面积和体积, 然后直接给最终的公式即可

13. 本题的图形比较奇怪, 可以分几个部分然后慢慢算, 不过最快的方法是重积分换元公式

令 $\ln x = u, \ln y = v$, 则 $x = e^u, y = e^v, D' : |u| + |v| \leq 1, J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^v \end{vmatrix} = e^u \cdot e^v$. 进而

$$\iint_D dx dy = \iint_{D'} |J| du dv = \iint_{D'} e^u \cdot e^v du dv = \int_{-1}^0 e^u du \int_{-u-1}^{u+1} e^v dv + \int_0^1 e^u du \int_{u-1}^{1-u} e^v dv = e - \frac{1}{e}$$

14. 分部积分, 并利用付汝兰尼积分的结果可知

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{(e^{-ax} - e^{-bx})^2}{x^2} dx &= \int_0^\infty (e^{-ax} - e^{-bx})^2 d\frac{-1}{x} = \int_0^\infty \frac{2}{x} (e^{-ax} - e^{-bx}) (-ae^{-ax} + be^{-bx}) dx \\ &= 2b \int_0^\infty \frac{e^{-(a+b)x} - e^{-2bx}}{x} dx + 2a \int_0^\infty \frac{e^{-(a+b)x} - e^{-2ax}}{x} dx = 2a \ln \frac{2a}{a+b} + 2b \ln \frac{2b}{a+b} \\ \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - \cos bx}{x^2} dx &= \int_0^\infty e^{-ax^2} - \cos bx d\frac{-1}{x} = \int_0^\infty \frac{-2axe^{-ax^2} + b \sin bx}{x} dx = -\sqrt{a\pi} + \frac{\pi}{2}b \end{aligned}$$

15. 作替换 $x = \frac{\alpha t + \beta}{t + 1}$, 则 (让 t 的一次项消失, 再定 α, β) 得

$$\begin{aligned} x^2 + 2 &= \frac{(\alpha t + \beta)^2 + 2(t + 1)^2}{(t + 1)^2} = \frac{(\alpha^2 + 2)t^2 + \beta^2 + 2}{(t + 1)^2}, \\ 2x^2 - 2x + 5 &= \frac{(2\alpha^2 - 2\alpha + 5)t^2 + 2\beta^2 - 2\beta + 5}{(t + 1)^2}, \end{aligned}$$

其中, 利用方程组 $\begin{cases} 2\alpha\beta + 4 = 0, \\ 4\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta + 10 = 0, \end{cases} \begin{cases} \alpha = 2, \\ \beta = -1, \end{cases} \begin{cases} \alpha = -1, \\ \beta = 2, \end{cases}$ 确定 α, β , 取 $\alpha = -1, \beta = 2$ 则

$$x = \frac{2-t}{1+t}, t = \frac{2-x}{1+x}, dx = \frac{-3 dt}{(1+t)^2}, x^2 + 1 = \frac{3t^2 + 6}{(t+1)^2}, 2x^2 - 2x + 5 = \frac{9t^2 + 9}{(t+1)^2}.$$

从而可知 $I = -\frac{1}{3} \int \frac{t + 1 dt}{(t^2 + 2)\sqrt{t^2 + 1}}$. 我们有

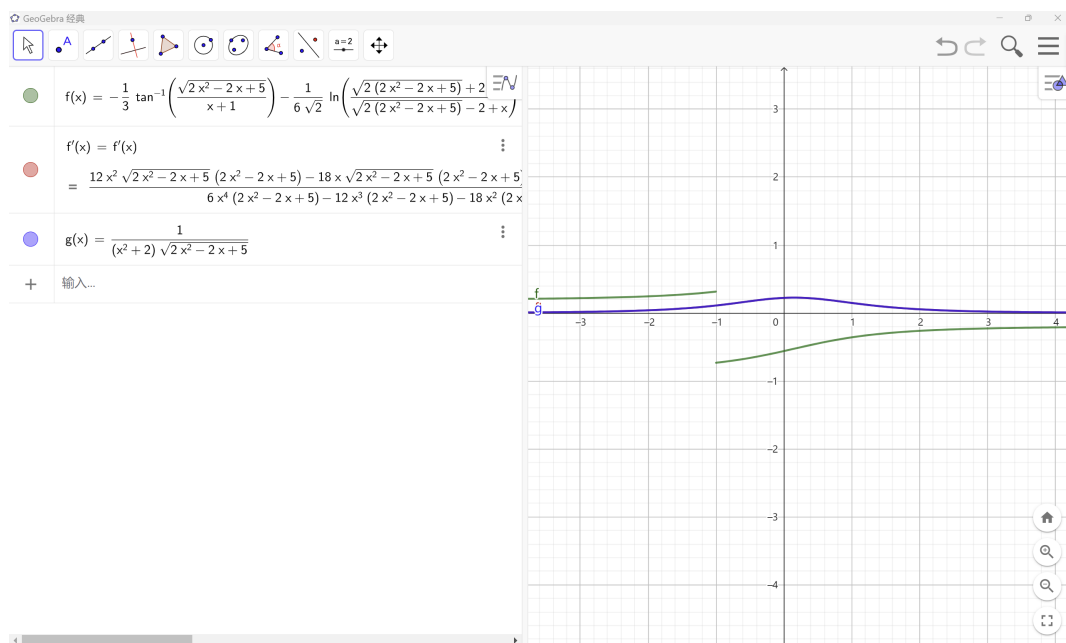
$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{3} \int \frac{t dt}{(t^2 + 2)\sqrt{t^2 + 1}} - \frac{1}{3} \int \frac{dt}{(t^2 + 2)\sqrt{t^2 + 1}} \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{du}{u^2 + 1} - \frac{1}{3} \int \frac{dv}{2 - v^2} = -\frac{1}{3} \arctan u - \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + v}{\sqrt{2} - v} + C \\ &= -\frac{1}{3} \arctan \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 5}}{x + 1} - \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2(2x^2 - 2x + 5)} + 2 - x}{\sqrt{2(2x^2 - 2x + 5)} - 2 + x} + C. \end{aligned}$$

在上面的过程中我们默认了 $t + 1 > 0$, 如果 $t + 1 < 0$, 是完全类似的

注: 本题不要用欧拉代换硬做, 那样实在是太难算了, 不信你可以试试, 不管用哪一种欧拉代换去做都能让你手算根本就不想算, 只能说: 理论上可以做出来

另外, 本题我们最终得到的这个原函数它有一个间断点 $x = -1$, 图像如下

这个图像说明上面的计算结果是正确的, 求导之后对的上, 唯一一个问题就是有一个间断点, 因此最终的答案里面, 应当分段来写, 其中最后的函数是一样的, 只需要修改常数 C , 也就是两个区间对应两个常数 C 使得函数连续, 那么这个分段函数就是连续且处处可导的, 满足求导后等于被积函数, 这样才是真正的答案 (略, 自己算一下 $x = -1$ 处的左右极限, 然后写出两个 C)



16. 本题需要利用伽马函数的余元公式

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln \Gamma(x) dx &= \int_0^1 \ln \Gamma(1-x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \ln \Gamma(x) dx + \int_0^1 \ln \Gamma(1-x) dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \ln \frac{\pi}{\sin \pi x} dx = \frac{1}{2} \ln \pi - \frac{1}{2} \int_0^1 \ln \sin \pi x dx = \frac{1}{2} \ln \pi - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \frac{1}{2} \ln(2\pi) \end{aligned}$$

17. 直接待定系数分解, 然后取极限 (令 $x \rightarrow -k$) 就可以确定分解式

$$\frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x+1} + \dots + \frac{a_n}{x+n} \Rightarrow a_k = \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}(-1)^k C_n^k$$

所以

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} dx &= \int_1^\infty \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!}(-1)^k C_n^k \frac{1}{x+k} dx \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!}(-1)^k C_n^k \int_1^A \frac{1}{x+k} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!}(-1)^k C_n^k (\ln(A+k) - \ln(1+k)) \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{A \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \left(\ln \left(1 + \frac{k}{A} \right) + \ln A - \ln(1+k) \right), \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0 \right) \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{A \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \ln \left(1 + \frac{k}{A} \right) - \frac{1}{n!} \lim_{A \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \ln(1+k) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \ln(1+k) \end{aligned}$$

18. 利用付汝兰尼积分结果即可一步解决

$$\int_0^\infty \frac{\sin 3x}{3x^2} - \frac{\sin 2x}{2x^2} dx = \int_0^\infty \frac{\frac{\sin 3x}{3x} - \frac{\sin 2x}{2x}}{x} dx = -\ln \frac{3}{2}$$

10.5 第六章习题答案

1. 根据条件, 构造函数求二阶导容易说明 $|f(x)| \leq \frac{x(1-x)}{2}$, 代入即可

2. 不妨设 $M = 1$, 否则考虑函数 $\frac{f(x)}{M}$ 即可, 根据对称性, 不妨设 $|f(a)| \geq |f(-a)|$, 进一步不妨设 $f(a) \geq 0$, 否则考虑函数 $-f(x)$ 即可

现在 $|f'(x)| \leq 1, f(a) \geq |f(-a)|$, 要证明 $\left| \int_{-1}^1 f(x) dx \right| < 1 - a$

利用 $|f'(x)| \leq 1$ 放缩可知

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^{-a} f(x) dx + \int_a^1 f(x) dx \\ &\leq \int_{-1}^{-a} f(-a) - x - a dx + \int_a^1 f(a) + x - a dx \\ &= (1-a)(f(-a) + f(a) - a + 1) \\ \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^{-a} f(x) dx + \int_a^1 f(x) dx \\ &\geq \int_{-1}^{-a} f(-a) + x + a dx + \int_a^1 f(a) + a - x dx \\ &= (1-a)(f(-a) + f(a) + a - 1) \end{aligned}$$

注意 $f(a) + f(-a) \geq 0$, 根据条件分部积分 (自行绕开, 回避导数不可积的问题) 有

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= a(f(a) + f(-a)) - \int_{-a}^a x f'(x) dx = 0 \\ \Rightarrow f(a) + f(-a) &= \frac{1}{a} \left| \int_{-a}^a x f'(x) dx \right| \leq \frac{1}{a} \int_{-a}^a |x| dx = a \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} f(-a) + f(a) - a + 1 &\in (1-a, 1) \subset (0, 1] \\ f(-a) + f(a) + a - 1 &\in (a-1, 2a-1) \subset (-1, 1) \end{aligned}$$

取绝对值就有 $\left| \int_{-1}^1 f(x) dx \right| \leq 1 - a$, 显然取等时候函数在 $x = 0$ 不可导, 因此不等式是严格的

注: 实际上对任意 $a \in (0, 1)$, 不等式是系数都是最佳的, 取 $F(x) = \begin{cases} |x| - \frac{a}{2} - \frac{\varepsilon^2}{6a}, & |x| \in [\varepsilon, 1] \\ \frac{1}{2\varepsilon}x^2 + \frac{\varepsilon - a}{2} - \frac{\varepsilon^2}{6a}, & |x| < \varepsilon \end{cases}$, 满足所

有题目条件, 然后令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 即可 (这里约定 $\varepsilon \in (0, a)$)

3. 利用柯西不等式有

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} f''^2(x) dx \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx &\geq \left(\int_0^{\frac{1}{2}} x f''(x) dx \right)^2 = \left(\frac{1}{2} f' \left(\frac{1}{2} \right) - 1 \right)^2 \\ \int_{\frac{1}{2}}^1 f''^2(x) dx \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^2 dx &\geq \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) f''(x) dx \right)^2 = \left(\frac{1}{2} f' \left(\frac{1}{2} \right) \right)^2 \end{aligned}$$

相加, 然后看二次函数, 求最值即可

4. 因为左右两端刚刚好都是平方项, 所以直接考虑作差的平方, 然后积分, 变形就有

$$\int_0^1 \left(\frac{f'^2(x)}{f(x)} - 3f''(x) \right)^2 dx = 9 \int_0^1 f''^2(x) dx - \int_0^1 \frac{f'^4(x)}{f^2(x)} dx \geq 0$$

5. 方法一: 设 $u = \int_0^1 f(x) dx, v = \int_0^1 x^m f(x) dx$, 然后待定系数考虑

$$\int_0^1 (f(x) - a - bx^m)^2 dx = \int_0^1 f^2(x) dx + a^2 + \frac{b^2}{2m+1} - 2au - 2bv + 2\frac{ab}{m+1} \geq 0$$

关于系数 a, b 求最小值, 可得

$$a = \frac{(1+m)(u-v+(u-2v)m)}{m^2}, b = \frac{(1+m)(1+2m)(-u+v+vm)}{m^2}$$

代入回去得到

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq \frac{(1+m)\left((u-v)^2 + (u-3v)(u-v)m + 2v^2m^2\right)}{m^2}$$

再用均值不等式即可得到 $\lambda = \frac{2}{\frac{1}{1+m} + \frac{1}{\sqrt{1+2m}}}$, 显然是最佳的

方法二: 将问题变成离散的根据定积分定义有

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^2(x) dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f^2\left(\frac{k}{N}\right), \int_0^1 f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}\right) \\ \int_0^1 x^m f(x) dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^m f\left(\frac{k}{N}\right) \end{aligned}$$

下面证明

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}\right) \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^m f\left(\frac{k}{N}\right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m+1} + \sqrt{\frac{1}{2m+1}} \right) \sum_{k=0}^{N-1} f^2\left(\frac{k}{N}\right)$$

记

$$a_k = f\left(\frac{k}{N}\right), u_k = \frac{k^m}{N^{m+1}}, \lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m+1} + \sqrt{\frac{1}{2m+1}} \right)$$

则要证明

$$(a_0 + \dots + a_{N-1})(u_0 a_0 + \dots + u_{N-1} a_{N-1}) \leq \lambda(a_0^2 + \dots + a_{N-1}^2)$$

不妨设右边的平方和是 1, 则左边的最大值就是相应的二次型矩阵的最大特征值, 于是只要计算系数矩阵

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_0 + u_0 & \cdots & u_0 + u_{N-1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{N-1} + u_0 & \cdots & u_{N-1} + u_{N-1} \end{pmatrix}$$

的特征多项式

$$\begin{aligned} |xI - A| &= \left| xI - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_0 & & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_{N-1} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ u_0 & \cdots & u_{N-1} \end{pmatrix} \right| \\ &= x^{N-2} \left| xI - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ u_0 & \cdots & u_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ u_{N-1} & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= x^{N-2} \left(\left(x - \frac{u_0 + \dots + u_{N-1}}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} n (u_0^2 + \dots + u_{N-1}^2) \right) \end{aligned}$$

因此最大特征值是

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{2} \left(u_0 + \dots + u_{N-1} + \sqrt{n(u_0^2 + \dots + u_{N-1}^2)} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\int_0^1 x^m dx + \sqrt{\int_0^1 x^{2m} dx} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m+1} + \sqrt{\frac{1}{2m+1}} \right) \end{aligned}$$

恰好为 λ , 所以我们证明了

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}\right) \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^m f\left(\frac{k}{N}\right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m+1} + \sqrt{\frac{1}{2m+1}} \right) \sum_{k=0}^{N-1} f^2\left(\frac{k}{N}\right)$$

令 $N \rightarrow \infty$ 取极限即可得到目标结论

6. 可以对着取等条件配, 也可以待定系数走微分方程, 最后是

$$\int_0^1 \left(f'(x) - \frac{\pi f(x)}{2 \tan \frac{\pi x}{2}} \right)^2 dx = \int_0^1 f'^2(x) dx - \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 f^2(x) dx \geq 0$$

7. 直接待定系数寻找

$$\frac{y}{b-a-1+y^2} \leq \lambda \frac{1}{b-a} + (1-\lambda) \frac{1}{1+y}, \forall y > 0$$

这样的不等式, 求极限算出来 $\lambda = \frac{1}{b-a-1}$, 容易验证是对的, 然后代入 $y = f(x)$ 两边积分即可

8. 记 $a = \int_0^1 f(x) dx$, 则对任意 $\lambda \in (0, 1)$ 都有

$$\int_0^1 (x - \lambda) f(x) dx = -\lambda a$$

利用绝对值不等式有

$$|a| \lambda = \int_0^1 |x - \lambda| |f(x)| dx \leq M \int_0^1 |x - \lambda| dx = \frac{\lambda^2 + (1-\lambda)^2}{2} M$$

所以

$$|a| \leq \frac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2\lambda} M = M \left(\lambda + \frac{1}{2\lambda} - 1 \right)$$

利用均值不等式可知, 取 $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时右端达到最小值, 故 $a \leq M(\sqrt{2} - 1)$

显然当 $f(x) = \begin{cases} M, x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ -M, x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] \end{cases}$ 时不等式取等, 故所求的最大值就是 $M(\sqrt{2} - 1)$

9. 对任意 $u \in [0, 1]$ 有

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leq |f'(x) - f'(u)| + |f'(u)| = \left| \int_x^u f''(t) dt \right| + |f'(u)| \\ &\leq \left| \int_x^u |f''(t)| dt \right| + |f'(u)| \leq \int_0^1 |f''(x)| dx + |f'(u)| \end{aligned}$$

所以只需证明: 存在 $u \in [0, 1]$ 使得

$$|f'(u)| \leq 4 \int_0^1 |f(x)| dx$$

反证法, 根据导数的连续性, 则不妨设

$$\int_0^1 |f(x)| dx = 1, f'(x) \geq 4 + \delta > 4, \forall x \in [0, 1]$$

积分得到 $f(x) \geq (4 + \delta)x + f(0)$

此条件下, 如果 $f(x)$ 恒正或者恒负, 则

$$\int_0^1 |f(x)| dx \geq (4 + \delta) \int_0^1 x dx = 2 + \frac{\delta}{2}$$

矛盾

如果 $f(0) < 0, f(1) > 0$, 则

$$\int_0^1 |f(x)| dx \geq (4 + \delta) \int_0^1 \left| x - \frac{1}{2} \right| dx = 1 + \frac{\delta}{4}$$

矛盾, 结论得证

10. 连续版和离散版显然是等价的, 这里证明一下离散的 (高考不等式), 方法不唯一

对任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 和 $a_k, b_k \geq 0$, 要证明 $\sum_{k=1}^n a_k + b_k \sum_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{a_k + b_k} \leq \sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n b_k$, 利用 $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$ 有

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_k + b_k \sum_{k=1}^n \frac{(a_k + b_k)^2 - (a_k - b_k)^2}{a_k + b_k} \leq 4 \sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n b_k \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_k + b_k \sum_{k=1}^n \frac{(a_k - b_k)^2}{a_k + b_k} \geq \left(\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \right)^2 - 4 \sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n b_k = \left(\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) \right)^2 \end{aligned}$$

最后一个是柯西不等式, 显然成立, 结论得证, 当然这个方法要是注意不到, 你也可以用重积分做

10.6 第七章习题答案

1. 两边求导得到 $y''(x + f'(y')) = 0$, 若 $y'' = 0$, 则 $y = cx + f(c)$, 如果 $x + f'(y') = 0$, 则解为 $x = -f'(p), y = -pf'(p) + f(p)$, 其中 p 为参数

注: 求出通解即可, 无需讨论一会这个为零, 一会那个为零的情况, $f''(x) \neq 0$ 其实并不重要, 只是为零保证第二种情况里面可以解出来 $p = u(x)$ 是关于在 x 的函数, 本题只要会对具体的 $f(x)$ 求解就可以了

2. 根据条件有 $e^x + 3y^2 + 2xyy' = 0, u = y^2, e^x + 3u + xu' = 0$, 至此化为一阶线性微分方程, 可得

$$u(x) = -\frac{e^x(2-2x+x^2)}{x^3} + \frac{C}{x^3} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{C}{x^3} - \frac{e^x(2-2x+x^2)}{x^3}}$$

3. 本题为欧拉方程, 令 $p = y'$ 则方程为 $x^2 p'' + xp' - 4p = 3x$, 再令 $x = e^t$ 则有 (这个结果前面上课例题已经算过一次了) $xp' = \frac{dp}{dt}, x^2 p'' = \frac{d^2 p}{dt^2} - \frac{dp}{dt}$, 进而方程是 $\frac{d^2 p}{dt^2} - 4p = 3e^t$, 这是二阶线性微分方程, 容易算出通解是

$$p = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} - e^t = y' = \frac{dy}{dx}$$

进而最终结果是

$$y' = C_1 x^2 + C_2 \frac{1}{x^2} - x, y = C_1 x^3 + C_2 \frac{1}{x} - \frac{1}{2} x^2 + C_3$$

注: 到底哪里是对 x 求导, 哪里是对 t 求导, 自己心里要清楚, 别搞混了

4. 直接求导即可

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(1-x), f'(1-x) = f(x), f''(x) = -f'(1-x) = -f(x) \\ \Rightarrow f(x) &= C_1 \cos x + C_2 \sin x, f(0) = 1 \Rightarrow f(x) = \cos x + c \sin x \\ f'(x) &= -\sin x + c \cos x = f(1-x) = \cos(1-x) + c \sin(1-x) \\ -\sin x + c \cos x &= \cos 1 \cos x + \sin 1 \sin x + c \sin 1 \cos x - c \cos 1 \sin x \\ \cos x (\cos 1 + c \sin 1 - c) + \sin x (1 + \sin 1 - c \cos 1) &= 0 \Rightarrow c = \frac{1 + \sin 1}{\cos 1}, c = \frac{\cos 1}{1 - \sin 1} \end{aligned}$$

最后这两个 c 显然是一样的, 所以答案为 $f(x) = \cos x + \frac{1 + \sin 1}{\cos 1} \sin x$

注: 一个更快的方法是直接考虑 $f'(1) = f(0) = 0$, 利用这两个条件确定 c_1, c_2 , 不过这样子做完需要检验

5. 本题强行消元然后升阶, 再看特征方程硬做肯定可以做, 但是较为麻烦, 有以下简单方法

根据条件, 引入虚数单位 i , 将第二个等式乘以 i 再和第一个相加, 则 $(x + iy)'' + i(x + iy)' + (x + iy) = 0$

记 $z = x + iy$, 则 $z'' + iz' + z = 0$, 这是二阶线性微分方程, 由特征根可知 $z = C_1 e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}it} + C_2 e^{\frac{-\sqrt{5}-1}{2}it}$, 这里 C_1, C_2 是任意复数, 因此考虑实部虚部一共就有四个任意的实参数, 接着乘法展开, 合并, 写成实数, 最终答案为

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos \frac{-1+\sqrt{5}}{2}t - b \sin \frac{-1+\sqrt{5}}{2}t + c \cos \frac{-1-\sqrt{5}}{2}t - d \sin \frac{-1-\sqrt{5}}{2}t \\ y(t) &= a \sin \frac{-1+\sqrt{5}}{2}t + b \cos \frac{-1+\sqrt{5}}{2}t + c \sin \frac{-1-\sqrt{5}}{2}t + d \cos \frac{-1-\sqrt{5}}{2}t \end{aligned}$$

6. 本题交换 dx, dy 会比较好做, 根据条件有 $xy + x^3 y^3 = \frac{dx}{dy} = x'$, 这是伯努利方程

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{x^2}, u' = -2 \frac{x'}{x^3} = -2 \frac{xy + x^3 y^3}{x^3} = -2uy - 2y^3, u' + 2uy = -2y^3 \\ v &= e^{y^2} u, v' = e^{y^2} (u' + 2yu) = -2y^3 e^{y^2} \Rightarrow v = -e^{y^2} (y^2 - 1) + C \\ u &= C e^{-y^2} - y^2 + 1 = \frac{1}{x^2}, x = \frac{1}{\sqrt{C e^{-y^2} - y^2 + 1}} \end{aligned}$$

7. 记 $u(x) = \frac{x^2 + y^2}{x}$, 则

$$\begin{aligned} y^2 &= xu(x) - x^2, 2yy' = u + xu' - 2x = e^u + u - 2x \Rightarrow e^u = xu' = x \frac{du}{dx} \\ e^{-u} du &= \frac{1}{x} dx \Rightarrow -e^{-u} = \ln x + C, e^{-u} = C - \ln x = e^{-\frac{x^2+y^2}{x}} \end{aligned}$$

此即通解

8.

$$y' = \frac{2x \left(2y - \frac{x^2}{y} \right)}{x^2 + y^2 + 3} = \frac{2y(2y^2 - x^2)}{y(x^2 + y^2 + 3)} = \frac{dy}{dx}$$

所以 $2 \frac{2y^2 - x^2}{x^2 + y^2 + 3} = \frac{ydy}{xdx} = \frac{dy^2}{dx^2}$, 令 $u = xH@, v = y^2$ 则化为线性分式 $\frac{dv}{du} = 2 \frac{2v - u}{u + v + 3}$

令 $u_1 = u + 2, v_1 = v + 1$, 则化为齐次方程 $\frac{dv_1}{du_1} = \frac{dv}{du} = 2 \frac{2v_1 - u_1}{u_1 + v_1}$

令 $w = \frac{v_1}{u_1}$, 则 $v_1 = wu_1$, 两边对 u_1 求导有 $\frac{dv_1}{du_1} = w + u_1 \frac{dw}{du_1}$

代入可知 $w + u_1 \frac{dw}{du_1} = \frac{dv_1}{du_1} = 2 \frac{2v_1 - u_1}{u_1 + v_1} = 2 \frac{2w - 1}{w + 1}$, 这是一个可分离变量的微分方程

分离变量, 所以 $-\frac{1}{u_1} du_1 = \frac{w+1}{w^2-3w+2} dw = \left(\frac{3}{w-2} - \frac{2}{w-1} \right) dw$

两边积分可知 $-\ln|u_1| = 3\ln|w-2| - 2\ln|w-1| + C$

将这些变量逐一代回去可知

$$\begin{aligned} -\ln|u_1| &= 3\ln|w-2| - 2\ln|w-1| + C \\ \Rightarrow -\ln|e^C u_1| &= \ln \left| \frac{(w-2)^3}{(w-1)^2} \right|, u_1 = u+2, v_1 = v+1, w = \frac{v_1}{u_1} \\ \Rightarrow -\ln|e^C(u+2)| &= \ln \left| \frac{\left(\frac{v_1}{u_1}-2\right)^3}{\left(\frac{v_1}{u_1}-1\right)^2} \right| = \ln \left| \frac{(v_1-2u_1)^3}{u_1(v_1-u_1)^2} \right| \\ \Rightarrow \frac{e^{-C}}{u+2} &= \left| \frac{(v_1-2u_1)^3}{u_1(v_1-u_1)^2} \right| = \left| \frac{(2u-v+3)^3}{(u+2)(u-v+1)^2} \right|, u = x^2, v = y^2 \\ \Rightarrow \frac{e^{-C}}{x^2+2} &= \frac{|2x^2-y^2+3|^3}{(x^2+2)(x^2-y^2+1)^2} \\ \Rightarrow C(x^2-y^2+1)^2 &= (2x^2-y^2+3)^3, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

注: 这是 14 届非数 CMC 的一道解答题, 综合性较强, 有一定难度

10.7 第八章习题答案

1. 条件即 $(B-A)(C+A^{-1}) = -I$, 所以 $(C+A^{-1})(B-A) = -I$, 展开即可 (要是看不出来, 可以试试 $A=I$)

2. 分块矩阵初等变换有

$$\begin{aligned} r(B) + r(ABC) &= r \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & ABC \end{pmatrix} \geq r \begin{pmatrix} B & BC \\ 0 & ABC \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} B & BC \\ -AB & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} AB & \\ B & BC \end{pmatrix} \geq r(AB) + r(ABC) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A-B & B-A \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-B & 0 \\ B & A+B \end{vmatrix} = |A-B| |A+B| \\ \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A-C & B-D & C-A & D-B \\ B-D & A-C & D-B & C-A \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A-C & B-D & 0 & 0 \\ B-D & A-C & 0 & 0 \\ C & D & A+C & B+D \\ D & C & B+D & A+C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-C & B-D \\ B-D & A-C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A+C & B+D \\ B+D & A+C \end{vmatrix} \\ &= |A+B+C+D| |A-B+C-D| |A+B-C-D| |A-B-C+D| \end{aligned}$$

4. 注意到同时相抵变换 $A \rightarrow PAQ, B \rightarrow Q^{-1}BP^{-1}$ 之下问题的条件和结论都不变, 因此不妨设 A 就是相抵标准型, 代入立即得到 B 就是题中那样, 得证

5. 条件等价于正交阵 $A^{-1}B$ 的特征值 1 的几何重数是 3, 所以代数重数也是 3, 注意特征值虚根成对, 并且正交阵的特征值都在单位圆上, 所以特征值 -1 一定是奇数重的, 这导致 $|A^{-1}B| = -1$, 因此行列式不同, 就不可能相似

6. 因为 $A = a \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - (a-1)I$, 计算特征多项式有

$$\begin{aligned} |xI - A| &= \left| (x+a-1)I - a \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right| = (x+a-1)^n \left| I - \frac{a}{x+a-1} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= (x+a-1)^{n-1} |x+a-1-na| = (x+a-1)^{n-1} (x-(n-1)a-1) \end{aligned}$$

所以标准型就是 $(1-a)(y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2) + ((n-1)a+1)y_n^2$

7. 根据条件, A 特征值 $2, -1, -1$, 所以 A^* 特征值 $1, -2, -2$, 由此容易算出 $B = 2(E-A)^{-1}$, 利用特征向量, 最终可以算出 B , 所求表达式为 $-2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

8. 如果 A 是数量矩阵, 则需要找 $n+1$ 个向量使得其中任何 n 个都线性无关, 考虑 $e_1, e_2, \dots, e_n, e_1+e_2+\cdots+e_n$ 即可满足要求

反之如果存在 $n+1$ 个特征向量, 使得其中任意 n 个都线性无关, 则在其中任取 n 个, 对应的 A 就会相似于一个对角阵, 从 $n+1$ 个特征向量中任取 n 个, 一共有 $n+1$ 种取法, 因此得到了 $n+1$ 个两两相似的对

角阵, 对角线上的数字由特征值 $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$ 这些中任取 n 个构成, 显然这些数字必须全相等 (例如考虑矩阵 $\text{diag}(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n) \sim \text{diag}(t_1, \dots, t_{n-1}, t_{n+1})$ 就得到了 $t_n = t_{n+1}$, 然后重复操作, 继续下去), 所以 A 相似于数量矩阵, A 就必须是数量矩阵

9. 先证命题: 如果 $\alpha, \beta \in F^n$ 满足 $\alpha^T A \beta = \beta^T A \alpha$, 且存在 $\gamma \in F^n$ 使 $\alpha^T A \gamma \neq \gamma^T A \alpha$, 那么 $\alpha^T A \beta = 0$. 特别地, 有 $\alpha^T A \alpha = 0$.

证明如下: 注意到 $\alpha^T A \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha^T A \beta (\alpha^T A \gamma - \gamma^T A \alpha) = 0$, 而

$$\begin{aligned}\alpha^T A \beta (\alpha^T A \gamma - \gamma^T A \alpha) &= \beta^T A \alpha (\alpha^T A \gamma) - \alpha^T A \beta (\gamma^T A \alpha) \\ &= \alpha^T A [(\beta^T A \alpha) \gamma - (\gamma^T A \alpha) \beta]\end{aligned}$$

并且

$$[(\beta^T A \alpha) \gamma - (\gamma^T A \alpha) \beta]^T A \alpha = (\beta^T A \alpha) \gamma^T A \alpha - (\gamma^T A \alpha) \beta^T A \alpha = 0$$

根据题设条件, 可知 $\alpha^T A \beta (\alpha^T A \gamma - \gamma^T A \alpha) = 0$, 因此 $\alpha^T A \beta = 0$. 命题得证.

现在, 设 A 不是对称矩阵, 即 $A^T \neq A$, 则存在 $x, y \in F^n$ 使得 $x^T A y \neq y^T A x$. 根据上述命题, 有 $x^T A x = 0$ 且 $y^T A y = 0$. 进一步, 对任意 $\alpha \in F^n, \alpha \neq x, y$, 也都有 $\alpha^T A \alpha = 0$. 这是因为:

若 $\alpha^T A x \neq x^T A \alpha$ 或 $\alpha^T A y \neq y^T A \alpha$, 则 $\alpha^T A \alpha = 0$; 对于相反的情形, 必有 $\alpha^T A x = 0$, 以及

$$(\alpha + x)^T A y = x^T A y \neq y^T A x = y^T A (\alpha + x)$$

仍由上述命题, 得 $(\alpha + x)^T A (\alpha + x) = 0$. 把等式左边展开, 即得 $\alpha^T A \alpha = 0$. 于是, 对于任意 $\alpha, \beta \in F^n$, 有

$$\alpha^T (A^T + A) \beta = (\alpha + \beta)^T A (\alpha + \beta) - \alpha^T A \alpha - \beta^T A \beta = 0$$

因此 $A^T + A = O$, 即 $A^T = -A$, 这就证明了 A 是反对称矩阵.

注: 本题较难, 非数学生如果不会做跳过即可, 不用纠结, 其实“难”的一大关键因素是在非数考试范围内, 似乎只有这一种方法不超纲, 代价就是不好想 (让我来做题我肯定不会这样子做). 对于数学专业学生来说, 本题则可以利用归纳法以及正交相似标准型来解决, 以后在数学类课程中会讲, 这个方法就是很直接很无脑而且一定可以做出来的通用方法

10. 当做可逆矩阵, 把逆算出来然后除以行列式形式得到答案, 再将答案中的逆矩阵全部换成伴随, 最后用摄动法说明不妨设可逆, 即可完成证明

第十一章 补充题

1. 设 n 为正整数, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx - n \sin x}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 计算 $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(\pi m! x))^{2n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k - \sin^2 k}{n^2} (\ln(n + k - \sin^2 k) - \ln n) = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2\sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{2})^n}{n^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.
5. 设 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{2 \ln n}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

题 11.0.1

有界正整数数列 a_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = 1$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = 1$.

题 11.0.2

1. 设 $f_1(x) = \frac{x+3}{2}, f_2(x) = \frac{x+6}{3}$, n_k 是取值于 $\{1, 2\}$ 的整数列, 令 $F_1(t) = f_{n_1}(t), F_{k+1}(t) = F_k(f_{n_{k+1}}(t))$, 证明: 对任何 $x \in \mathbb{R}$, 极限 $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x)$ 均存在且与 x 无关.
2. 如果将 f_1, f_2 改为 $f_1(t) = t - \arctan t, f_2(t) = 2 \arctan t - t$, 结论如何?

题 11.0.3

设方程 $x^n + x = 1$ 在 $(0, 1)$ 中的根为 x_n , 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - na_n - \ln n}{\ln \ln n}$.

题 11.0.4

设 n, v 为正整数, $1 \leq v \leq n$. 记 n_v 为 v 除 n 所产生的余数. 计算

- (i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{n_1}{1} + \frac{n_2}{2} + \frac{n_3}{3} + \dots + \frac{n_n}{n} \right);$ (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_n}{n^2}.$

题 11.0.5

设 $x > e^e$, 定义 $u_0 = e, u_{n+1} = \frac{\ln x}{\ln u_n}$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 存在.

题 11.0.6

若函数 $f(x)$ 对于一切 $u \neq v$ 均有 $\frac{f(u) - f(v)}{u - v} = \alpha f'(u) + \beta f'(v)$, 其中, $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$. 试求 $f(x)$ 的表达式.

题 11.0.7

设 $\lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k > 0, k = 1, 2, \cdots$, $f(x) = \frac{1}{(1 - \lambda_1 x)(1 - \lambda_2 x) \cdots (1 - \lambda_n x)}$, 求证: $f^{(k)}(0) > 0$.

题 11.0.8

设 f 在 $[0, +\infty)$ 中可导且 $|f'| \leq M, M > 0$. 证明: 当 $x, y > 0$ 时, $\left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - \frac{1}{y} \int_0^y f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2} M |x - y|$.

题 11.0.9

设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上两次连续可微且恒大于 0 的有界函数, $C > 0$ 是常数, 对任意 $x \geq 0$, 有 $f''(x) \geq Cf(x)$, 求证: 对任意 $x \geq 0$, 有 $f(x) \leq f(0)e^{-\sqrt{C}x}$.

题 11.0.10

设 f 在 $(a, +\infty)$ 中可导. 证明:

- (1) 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x) f'(x) = \alpha \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$
- (2) 如果 f 为有界函数, 且 $xf'(x)$ 为单调函数, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x) f'(x) = 0$

题 11.0.11

对正整数 n , 定义 $I_n = \int_0^1 \frac{\ln x}{(x+1)^{n+1}} dx$, 求 I_n 的递推公式并计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n I_n}{\ln n}$.

题 11.0.12

设 $x_0 \neq 1, x_{n+1} = \cos x_n - 3x_n$, 讨论 x_n 的有界性与收敛性.

题 11.0.13

设 A 是三阶实方阵, 且对任意实向量 α 都有 α 与 $A\alpha$ 垂直, 证明: 存在向量 β 使得对任意 α 都有 $A\alpha = \alpha \times \beta$.

题 11.0.14

设 $f(x) \in C[0, 1], f(0) = f(1) = 0$, 证明: $\left(\int_0^1 |f(x)| dx \right)^2 \leq \frac{1}{12} \int_0^1 f'^2(x) dx$.

题 11.0.15

设 A, B 为 n 阶方阵, 满足 $A + B + AB = 0, r(A) \geq n - 1$, 证明: 对 $k = 1, 2$ 有 $r(A^k) + r(B^k) \geq 2r(AB)$.

本题是著名的算术几何平均数列, 其极限竟然是一个不能初等表达的积分值, 却又能算出来!

题 11.0.16

设 $a > b > 0$, 定义 $a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}} dx$$

题 11.0.17

若连续函数 $f(x)$ 满足 $\frac{x}{2} \int_0^x f^2(t) dt = \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2$, 求 $f(x)$.